UC-NRLF
$B 26 835

IN MEMORIAM
Eugene W. Hilgard

Eugen W. Hilgard.
1851.

Lehrbuch

der

Ingenieur- und Maschinen-Mechanik.

Digitized by Google

Lehrbuch

der

Ingenieur- und Maschinen-Mechanik.

Mit

den nöthigen Hülfslehren aus der Analysis

für den

Unterricht an technischen Lehranstalten

sowie zum

Gebrauche für Techniker

bearbeitet

von

Julius Weisbach,
Professor an der königlich Sächsischen Bergakademie zu Freiberg

In drei Theilen.

Erster Theil.

Theoretische Mechanik.

Zweite, verbesserte und vervollständigte Auflage.

Mit 667 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Braunschweig,
Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1850.

Digitized by Google

TA350
W4
v.1

Vorrede zur ersten Auflage.

Nicht ohne Zagen schicke ich hier den ersten Theil meiner elementaren Bearbeitung der Ingenieur- und Maschinenmechanik in die Welt. Obwohl ich mir sagen kann, daß ich bei dieser Schrift mit aller möglichen Sorgfalt und Bedachtsamkeit zu Werke gegangen bin, so befürchte ich dennoch, den Wünschen Aller in ihr nicht entsprechen zu können. Die Ansichten, Wünsche und Ansprüche sind nun einmal so sehr verschieden, daß es nicht möglich ist, alle zu befriedigen. Mancher wird das eine Kapitel zu ausführlich, Mancher wird es zu kurz finden; Einige werden in der Behandlung gewisser Materien eine höhere Wissenschaftlichkeit vermissen, während Andere vielleicht gerade hierin eine größere Popularität gewünscht hätten. Indeß vieljährige Studien, vielfacher Unterricht und mannichfaltige Beobachtungen und Erfahrungen haben mich nun einmal auf die Methode geführt, nach welcher das vorliegende Werk bearbeitet ist, und welche ich für den beabsichtigten Zweck als die angemessenste halte.

Mein Hauptbestreben bei Bearbeitung dieses Werkes war darauf gerichtet, die größte Einfachheit bei der Entwickelung und Beweisführung zu erzielen und alle in der Anwendung auf die Praxis wichtigen Sätze nur mit Hülfe der niedern Mathematik abzuhandeln. Wenn man berücksichtigt, welche mannichfache Kenntnisse ein Techniker sich anzueignen hat, um in seinem Fache etwas Tüchtiges zu leisten, so muß es uns, als Lehrer und Schriftsteller für Techniker, eine Pflicht sein, das gründliche Studium der Wissenschaft durch Vereinfachung im Vortrage, durch Be-

415434

seitigung alles Ueberflüssigen und durch die Anwendung der bekanntesten und zugänglichsten Hülfslehren zu erleichtern. Ich habe deshalb auch in dem vorliegenden Werke die Anwendung der Differenzial- und Integralrechnung gänzlich vermieden. Wenn auch jetzt die Gelegenheit zur Erlernung dieser Rechnung nicht so selten mehr ist, so ist es doch eine unbestreitbare Thatsache, daß ohne immerwährende Uebung die nöthige Fertigkeit in Handhabung derselben sehr bald verloren geht, und es deshalb manchen übrigens sehr tüchtigen Praktiker giebt, welcher mit der früher erlernten Differenzial- und Integralrechnung nicht mehr umzugehen versteht. Da ich mit manchen Schriftstellern, welche in populären Schriften die schwierigeren Sätze ohne Beweise mittheilen, nicht einerlei Meinung bin, so habe ich es vorgezogen, praktisch wichtige Sätze stets auf elementarem, wenn auch zuweilen etwas weitläufigem Wege, abzuleiten oder zu beweisen. Man wird daher in diesem Werke nur selten eine Formel ohne ihre Begründung hingestellt finden. Einige ganz allgemeine Kenntnisse gewisser Lehren aus der Naturlehre, zumal aber eine gründliche Kenntniß der reinen Elementarmathematik, müssen wir allerdings bei dem Studium dieser Schrift voraussetzen. Vorzüglich bin ich bemüht gewesen, bei Bearbeitung dieses Werkes, die rechte Mitte zwischen Generalisiren und Specialisiren zu halten. Obwohl ich die Vorzüge des Generalisirens nicht verkenne, so bin ich doch der Meinung, daß man in diesem Werke, wie bei jedem elementaren Vortrage, das allzugroße Generalisiren zu vermeiden habe. Das Einfache kommt ja in der Praxis häufiger vor, als das Zusammengesetzte. Auch ist nicht zu leugnen, daß in der Betrachtung des allgemeinen Falles oft die tiefere Kenntniß des specielleren Falles verloren geht, und daß es nicht selten leichter ist, aus dem Einfachen das Zusammengesetztere abzuleiten, als aus dem Allgemeineren das Einzelne herauszuziehen.

Man erwarte in der Ingenieur- und Maschinenmechanik keine Maschinenbaulehre oder Maschinenbaukunst, sondern nur die Einleitung oder Vorbereitungswissenschaft zu dieser. Die Mechanik soll sich insofern zur Maschinenbaukunst verhalten, wie die darstellende Geometrie zum Maschinenzeichnen. Nach Erlangung der Kenntnisse der Mechanik und der darstellenden Geometrie scheint es am zweckmäßigsten zu sein, den Unterricht

über Maschinenbaukunst und den über Maschinenzeichnen in einem Curse zu vereinigen.

Vielleicht wird noch in Zweifel gezogen, daß es zweckmäßig sei, die Ingenieur- und Maschinenmechanik in zwei Theile, in einen theoretischen und in einen angewandten, zu theilen. Wenn man berücksichtigt, daß dieses Werk Unterricht über alle mechanische Verhältnisse der Bau- und Maschinenlehre ertheilen soll, so stellt sich die Nützlichkeit, oder vielmehr die Nothwendigkeit dieser Eintheilung von selbst heraus. Um ein Bauwerk und zumal um eine Maschine vollständig beurtheilen zu können, sind oft die verschiedensten Lehren der Mechanik, z. B. die der Reibung, die der Festigkeit, die der Trägheit, des Stoßes, des Ausflusses u. s. w. in Anspruch zu nehmen, es ist also das Material zum mechanischen Studium eines Bau- oder Maschinenwerkes fast aus allen Theilen der Mechanik zusammenzulesen. Da es nun aber für den praktischen Gebrauch viel zweckmäßiger ist, die mechanischen Lehren über jede Maschine im Zusammenhange studiren zu können, als sie aus fast allen Theilen der Mechanik zusammentragen zu müssen, so möchte die Nützlichkeit der gemachten Theilung außer allem Zweifel sein.

Immer die Anwendung im Praktischen vor Augen habend, bin ich beim Aufsetzen dieses Werkes stets bemüht gewesen, die vorgetragenen Lehren durch passende Beispiele aus dem Leben soviel wie möglich zu erläutern. Mit Recht kann ich aber auch behaupten, daß sich dieses Werk durch die große Anzahl und passende Auswahl durchgerechneter Beispiele vor vielen ähnlichen Werken auszeichnet. Nächstdem hoffe ich auch, daß die große Anzahl der sorgfältig ausgeführten Figuren dem beabsichtigten Zwecke dieser Schrift sehr förderlich sein werde. Endlich muß ich es der Verlagshandlung noch besonders Dank wissen, daß sie dem Werke in aller Hinsicht die vorzüglichste Ausstattung hat zu Theil werden lassen. Auf die Richtigkeit der Rechnungen ist eine besondere Sorgfalt verwendet worden; in der Regel ist jedes Beispiel, und zwar nicht von einer und derselben Person, dreimal durchgerechnet worden. Es möchte daher nicht so leicht sein, wesentliche oder ansehnliche Fehler in denselben aufzufinden. In den Beispielen sowie in den Formeln habe ich immer das preußische Maaß und Gewicht

Digitized by Google

zu Grunde gelegt, in der Erwartung, daß die größere Zahl der Leſer mit dieſem zu rechnen gewohnt ſein werde. Aber auch in Hinſicht auf die Correctheit des hier ſo ſchwierigen Druckes möchte wenig zu wünſchen übrig bleiben. Die bis jetzt gefundenen Schreib- und Druckfehler ſind dem Buche beigefügt. Ich glaube nicht, daß noch eine größere Ergänzung zu dieſem Verzeichniſſe nöthig ſein werde. Eine nähere Prüfung der Zeichnungen wird die Ueberzeugung herbeiführen, daß auch bei Ausführung dieſer mit Sorgfalt zu Werke gegangen iſt. Größere Zeichnungen, und zumal ſolche, welche Gegenſtände nach allen drei Raumdimenſionen abbilden, ſind nach der von mir zuerſt abgehandelten axonometriſchen Projectionsmethode (ſ. polytechn. Mittheilungen, Band I., Tübingen 1845) ausgeführt. Dieſe Zeichnungsmethode hat mit der iſometriſchen Perſpective gleiche Vorzüge, zeichnet ſich aber von dieſer noch dadurch aus, daß ſie nicht nur ſchönere, ſondern auch ſolche Bilder liefert, welche die Vorſtellung des abgebildeten Gegenſtandes leichter erwecken, als die iſometriſche Perſpective. In der Regel ſind die Zeichnungen im Buche ſo ausgeführt, daß die Breiten- oder Tiefendimenſionen bei gleicher Größe im abgebildeten Gegenſtande nur halb ſo groß erſcheinen, als die Längen- und Höhendimenſionen.

Weſentlich zur Correctheit dieſes Werkes haben die Reviſionen des Herrn Ernſt Röting, Studirenden an der hieſigen Bergakademie, beigetragen, weshalb ich nicht unterlaſſen kann, meinen Dank hier öffentlich auszuſprechen.

Endlich iſt es nöthig, dem Leſer noch anzuzeigen, daß er in dem Buche viel Neues und manches, dem Verfaſſer Eigenthümliches vorfinden wird. Ohne mich auf viele kleine Artikel, die faſt in jedem Kapitel vorkommen, einzulaſſen, will ich den Leſer nur auf folgende umfaſſendere Gegenſtände aufmerkſam machen. Eine allgemeine und leicht ausführbare Beſtimmung der Schwerpunkte ebener Flächen und ebenflächigen Polyeder wird man in den Paragraphen 107, 112 und 113 finden, eine angenäherte Formel für die Kettenlinie in dem Paragraphen 148; Ergänzungen zur Axenreibung in den Paragraphen 167, 168, 169, 172 und 173. Die Lehre vom Stoße wird namentlich durch die Paragraphen 277 und 278

eine weſentliche Ergänzung erhalten haben, da man ſeither den Stoß unvollkommen elaſtiſcher Körper zu wenig berückſichtigt und den Fall, wenn ein vollkommen elaſtiſcher Körper mit einem unvollkommen elaſtiſchen Körper zuſammenſtößt, gar nicht betrachtet hat. Die meiſten Ergänzungen und zum Theil ganz neue Geſetze wird man allerdings in der Hydraulik mitgetheilt finden, da ich dieſen Theil ſchon ſeit einer Reihe von Jahren zu einem Gegenſtande meiner ſpeciellen Studien gemacht habe. Die Geſetze der vom Verfaſſer zuerſt beobachteten unvollkommenen Contraction der Waſſerſtrahlen, treten hier zum erſten Male in einem Lehrbuche der Mechanik auf. Ebenſo werden die für die Praxis ſehr wichtigen Hauptreſultate der Verſuche des Verfaſſers über den Ausfluß des Waſſers durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile mitgetheilt. Endlich führt der Verfaſſer auch die Hauptergebniſſe ſeiner neueſten Verſuche, betreffend den Ausfluß des Waſſers durch ſchiefe Anſatzröhren, gebrochene, krumme und lange gerade Röhren u. ſ. w. hier auf, obgleich das dritte Heft ſeiner dieſe Verſuche umfaſſenden »Unterſuchungen im Gebiete der Mechanik und Hydraulik« dem Drucke noch nicht hat übergeben werden können. Den Kapiteln über die fließenden Waſſer, über das Waſſermeſſen und über den Waſſerſtoß ſind ebenfalls durch den Verfaſſer einige Bereicherungen zu Theil geworden.

Uebrigens kann ich dem Leſer nicht bergen, daß ich jetzt, nach Beendigung des erſten Bandes, auch hin und wieder Einiges anders aufgefaßt oder behandelt zu haben wünſche; doch muß ich hinzufügen, daß ſich weſentliche Mängel mir noch nicht herausgeſtellt haben. Wenn hie und da noch Manches vermißt wird, ſo muß ich auf den zweiten Band verweiſen, welcher nicht bloß zufällig, ſondern meiſt abſichtlich Ergänzungen zum erſten Bande nachbringen wird, wie auch ſchon im erſten Bande an vielen Stellen angedeutet wird. Der Druck des zweiten Bandes wird nun ſeinen ununterbrochenen Fortgang haben, ſo daß ſich erwarten läßt, daß das ganze Buch am Ende dieſes Jahres in den Händen der Leſer ſein werde. Auch wird nun bald das unter dem Namen »der Ingenieur« in der Mechanik citirte Hülfsbuch, welches in einer Sammlung von Formeln, Regeln und Tabellen der Arithmetik, Geometrie und Mechanik beſteht, erſcheinen.

Digitized by Google

Es ſollte mir eine große Beruhigung und Freude gewähren, wenn mit dieſem Werke das erreicht wird, was ich damit bezielt habe, nämlich Praktikern ein nützlicher Rathgeber in Fällen der Anwendung, Lehrern der praktiſchen Mechanik ein brauchbarer Leitfaden beim Unterrichte, und Studirenden des Ingenieur- und Maſchinenweſens ein willkommenes Hülfsmittel zur Erlernung der Mechanik zu ſein.

Freiberg, den 19. März 1846.

Julius Weisbach.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Die vorliegende zweite Auflage vom erſten Bande der Ingenieur- und Maſchinenmechanik iſt in der Methode und Anordnung nicht weſentlich von der erſten Auflage verſchieden. Nur der innere Ausbau dieſes Werkes hat mit dieſer zweiten Auflage manche Veränderungen und Vervollſtändigungen erlitten, auch iſt die Ausdehnung deſſelben nicht unbedeutend größer geworden. Ueberdies hat ſich der Verfaſſer bemüht, die bemerkten Mängel und Unrichtigkeiten ſo viel wie möglich in dieſer zweiten Bearbeitung zu beſeitigen. Die größere Ausdehnung dieſer Auflage iſt beſonders aus drei Zugaben erwachſen. Die erſte derſelben beſteht in einer gedrängten und möglichſt populären Darſtellung des ſogenannten Infinitesimalcalcüls am Kopfe des ganzen Werkes, und iſt beſonders deshalb hinzugefügt worden, um verwickelte und zugekünſtelte Entwickelungen mittels des niedern Calcüls zu vermeiden, und um zugleich dem Leſer mehr Selbſtſtändigkeit in der Mechanik zu verſchaffen und ihn auf einen höheren Standpunkt in dieſem wichtigen Gebiete zu ſtellen. Durch Anwendung der in dieſem Vorcurs enthaltenen Lehren aus der Analyſis iſt es möglich geworden, auch ſolche praktiſch wichtige Gegenſtände mit in den Vortrag aufzunehmen, welche ſich entweder gar nicht, oder nur ſehr unvollſtändig mittels der elementaren Algebra und Geometrie behandeln laſſen. Um aber Denjenigen, welche ſich mit den vorausgeſchickten Elementen der Differenzial- und Integralrechnung nicht bekannt gemacht haben, keine Störungen zu bereiten, ſind alle diejenigen Paragraphen, in welchen die Anwendung dieſes Calcüls vorkommt, durch ein Sternchen (*) beſonders ausgezeichnet worden.

Digitized by Google

Die zweite Zugabe beſteht in einem neuen Kapitel in der Hydroſtatik, und behandelt die Molecularwirkungen des Waſſers. Da die Kenntniß der Molecularkräfte (Capillarität) bei hydrauliſchen und pneumatiſchen Beobachtungen und Meſſungen von Wichtigkeit iſt, ſo hat es der Verfaſſer für zweckmäßig gehalten, in einem beſonderen Kapitel die Hauptlehren über dieſe Kräfte des Waſſers hier einzuſchalten. Endlich iſt dem ganzen Werke noch ein Kapitel über die Schwingungen und Wellenbewegungen als Anhang beigegeben worden. Der Verfaſſer hat ſich dazu bewogen gefunden, weil eine nähere Kenntniß der Schwingungen für den Ingenieur von großer Wichtigkeit iſt. Der große Einfluß, welchen die Schwingungen auf den Gang und auf die Haltbarkeit und Dauerhaftigkeit der Maſchinen und anderer Bauwerke ausüben, iſt ein Gegenſtand, dem man nicht zuviel Aufmerkſamkeit ſchenken kann! Ueberdies verdanken wir den Schwingungsbeobachtungen die neueſten Beſtimmungen der für die Praxis ſo ſehr wichtigen Elaſticitätsmodule. Auch der magnetiſchen Kraft habe ich in dem Anhange gedacht, vorzüglich weil dieſelbe der Ingenieur beim Orientiren in unterirdiſchen Räumen, und an Orten, welche keine freie Ausſicht gewähren, nicht entbehren kann. Die Theorie der Waſſerwellen, welche den Schluß dieſes Bandes ausmacht, gehört ganz in die Hydraulik; ihre Aufnahme in dieſe Schrift bedarf daher keiner weiteren Rechtfertigung. Leider läßt ſie nur noch Vieles zu wünſchen übrig!

Was den übrigen Theil dieſer Schrift anlangt, ſo hat vorzüglich das Kapitel über die Elaſticität und Feſtigkeit umfänglichere Veränderungen und Ergänzungen erfahren; nächſtdem iſt aber auch der Hydraulik durch die fortgeſetzten Verſuche des Verfaſſers manche Ergänzung und Berichtigung zu Theil geworden.

Möchte auch dieſe zweite Auflage ſich der Beachtung und des Beifalles erfreuen, womit die erſte Auflage aufgenommen und der Verfaſſer in der weiteren Bearbeitung dieſes Werkes aufgemuntert worden iſt.

Freiberg, den 15ten Mai 1850.

Julius Weisbach.

Digitized by Google

Inhalt des ersten Theiles.

I. Hülfslehren aus der Analysis.

Seite 1 ÷ 43; Artikel 1 ÷ 29.

II. Theoretische Mechanik.

Erster Abschnitt.
Phoronomie oder rein mathematische Bewegungslehre.

Erstes Kapitel. Die einfache Bewegung. Seite 47 ÷ 63; §. 1 ÷ §. 25.

Zweites Kapitel. Zusammengesetzte Bewegung. Seite 63 ÷ 78; §. 26 ÷ §. 43.

Zweiter Abschnitt.
Mechanik oder physische Bewegungslehre im Allgemeinen.

Erstes Kapitel. Grundbegriffe und Grundgesetze der Mechanik. Seite 79 ÷ 90; §. 44 ÷ §. 63.

Zweites Kapitel. Mechanik des materiellen Punktes. Seite 90 ÷ 112; §. 64 ÷ §. 82.

Dritter Abschnitt.
Statik fester Körper.

Erstes Kapitel. Allgemeine Lehren der Statik fester Körper. Seite 113 ÷ 128; §. 83 ÷ §. 97.

Zweites Kapitel. Die Lehre vom Schwerpunkte. Seite 128 ÷ 154; §. 98 ÷ §. 120.

Drittes Kapitel. Gleichgewicht festgehaltener und unterstützter Körper. Seite 154 ÷ 176; §. 121 ÷ §. 137.

Viertes Kapitel. Gleichgewicht an den Seilmaschinen. Seite 176 ÷ 199; § 138 ÷ §. 153.

Fünftes Kapitel. Die Widerstände der Reibung und Steifigkeit. Seite 200 ÷ 240; §. 154 ÷ §. 182.

Sechstes Kapitel. Elasticität und Festigkeit. Seite 241 ÷ 311; §. 183 ÷ §. 225.

Vierter Abschnitt.
Dynamik fester Körper.

Erstes Kapitel. Die Lehre von den Trägheitsmomenten. Seite 312 ÷ 336; §. 226 ÷ §. 244.

Zweites Kapitel. Von der Centrifugalkraft. Seite 336 ÷ 351; §. 245 ÷ §. 253.

Drittes Kapitel. Von den Wirkungen der Schwerkraft bei Bewegungen auf vorgeschriebenen Wegen. Seite 351 ÷ 374; §. 254 ÷ §. 269.

Viertes Kapitel. Die Lehre vom Stoße. Seite 375 ÷ 414; §. 270 ÷ §. 294.

Digitized by Google

Fünfter Abschnitt.
Statik flüssiger Körper.

Erstes Kapitel. Vom Gleichgewichte und Drucke des Wassers in Gefäßen. Seite 415 ÷ 436; §. 295 ÷ §. 306.

Zweites Kapitel. Vom Gleichgewichte des Wassers mit anderen Körpern. Seite 437 ÷ 452; §. 307 ÷ §. 316.

Drittes Kapitel. Von den Molecularwirkungen des Wassers. Seite 453 ÷ 465; §. 317 ÷ §. 325.

Viertes Kapitel. Vom Gleichgewichte und Drucke der Luft. Seite 466 ÷ 478; §. 326 ÷ §. 334.

Sechster Abschnitt.
Dynamik flüssiger Körper.

Erstes Kapitel. Die allgemeinen Lehren über den Ausfluß des Wassers aus Gefäßen. Seite 479 ÷ 494; §. 335 ÷ §. 343.

Zweites Kapitel. Von der Contraction der Wasserstrahlen beim Ausflusse des Wassers durch Mündungen in der dünnen Wand. Seite 495 ÷ 518; §. 344 ÷ § 356.

Drittes Kapitel. Von dem Ausflusse des Wassers durch Röhren. Seite 518 ÷ 543; §. 357 ÷ §. 371.

Viertes Kapitel. Von den Hindernissen des Wassers beim Durchgange durch Verengungen. Seite 443 ÷ 563; §. 372 ÷ §. 380.

Fünftes Kapitel. Von dem Ausflusse des Wassers unter veränderlichem Drucke. Seite 563 ÷ 580; §. 381 ÷ §. 390.

Sechstes Kapitel. Von dem Ausflusse der Luft aus Gefäßen und Röhren. Seite 581 ÷ 591; §. 391 ÷ §. 396.

Siebentes Kapitel. Von der Bewegung des Wassers in Kanälen und Flüssen. Seite 592 ÷ 609; §. 397 ÷ §. 407.

Achtes Kapitel. Hydrometrie oder Lehre vom Wassermessen. Seite 609 ÷ 627; §. 408 ÷ §. 419.

Neuntes Kapitel. Vom Stoße und Widerstande der Flüssigkeiten. Seite 628 ÷ 650; §. 420 ÷ §. 433.

Anhang.
Theorie der Schwingungen.

Schwingungstheorie. Seite 651 ÷ 654; §. 1 ÷ §. 2.

Schwingungen gespannter Stäbe. Seite 654 ÷ 658; §. 3 ÷ §. 5.

Torsionspendel und Dichtigkeit der Erde. Seite 658 ÷ 660; §. 6 ÷ §. 7.

Magnetismus und Schwingungen der Magnetnadel. Seite 660 ÷ 668; §. 8 ÷ §. 13.

Längenschwingungen. Seite 668 ÷ 677; §. 14 ÷ §. 18.

Querschwingungen. Seite 677 ÷ 683; §. 19 ÷ §. 21.

Schwingungshindernisse. Seite 683 ÷ 685; §. 22.

Schwingungen und Wellen des Wassers. Seite 685 ÷ 696; §. 23 ÷ §. 27.

Digitized by Google

Hülfslehren aus der Analysis.

Art. 1. Die Abhängigkeit einer Größe y von einer anderen Größe x wird durch eine mathematische Formel, z. B. $y = 3x^2$, oder $y = ax^m$ u. s. w. angegeben. Man schreibt allgemein $y = f(x)$ oder $z = \varphi(y)$ u. s. w., und nennt y eine Funktion von x, so wie z eine Funktion von y. Die Zeichen f, φ u. s. w. deuten nur allgemein an, daß y von x, oder z von y abhänge; sie lassen die Abhängigkeit dieser Größen von einander ganz unbestimmt, schreiben also die algebraische Operation, durch welche y aus x, oder z aus y hervorgeht, nicht vor.

Eine Funktion $y = f(x)$ ist eine unbestimmte Gleichung; es giebt unendlich viele Werthe von x und y, welche derselben entsprechen, giebt man jedoch die eine (x), so ist die andere (y) durch die Funktion bestimmt, und verändert man die eine, so erleidet die andere ebenfalls eine Veränderung. Man nennt deshalb die unbestimmten Größen x und y Variable oder veränderliche Größen, dagegen die gegebenen oder als gegeben anzusehenden Größen, die also die Operation vorschreiben, durch welche y aus x hervorgeht, Constanten oder beständige Größen. Von den veränderlichen Größen heißt diejenige, welche willkürlich anzunehmen ist, die Urvariable, und dagegen diejenige, welche als Funktion der letzteren durch eine bestimmte Operation aus dieser bestimmt wird, die Abhängigvariable. In $y = ax^m$ sind a und m die Constanten und es ist x die Ur-, dagegen y die Abhängigvariable.

Die Abhängigkeit einer Größe z von zwei anderen x und y wird durch das Zeichen $z = f(x, y)$ ausgedrückt. Es ist in diesem Falle z Funktion von x und y zugleich, und man hat es daher hier mit zwei Urvariablen zu thun.

Art. 2. Jede durch eine Funktion oder Formel $y = f(x)$ ausgedrückte Abhängigkeit einer Größe y von einer anderen Größe x läßt sich durch

eine ebene Curve oder krumme Linie APQ, Fig. 1. und Fig. 2., darstellen; den verschiedenen Werthen der Urvariablen x entsprechen die Abscissen AM, AN u. s. w., und den verschiedenen Werthen der Abhängigvariablen

Fig. 1.

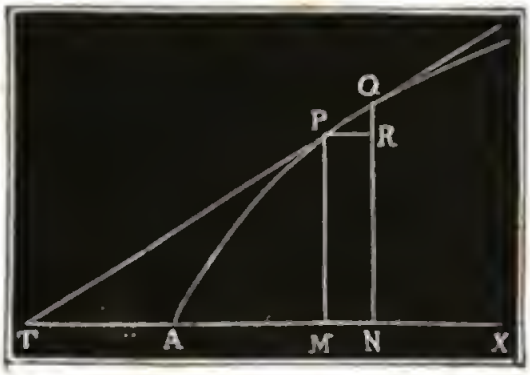
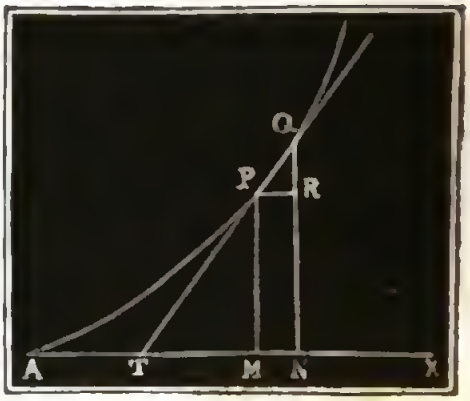
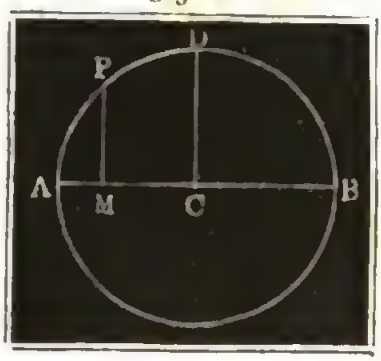


Fig. 2.



y die Ordinaten MP, NQ u. s. w. der Curve. Die Coordinaten (Abscissen und Ordinaten) der Curve stellen also die beiden Variablen der Funktion vor. Die graphische oder bildliche Darstellung einer Funktion oder die Zurückführung derselben auf eine Curve, vereinigt mehrere Vortheile in sich. Sie liefert uns erstens einen Ueberblick von dem Zusammenhange zwischen zwei veränderlichen Größen, sie ersetzt uns zweitens die Stelle einer Tabelle, oder eines Inbegriffes von je zwei zusammengehörigen Werthen einer Funktion, sie verschafft uns drittens die Kenntniß von den mannichfaltigsten Eigenschaften und Beziehungen der Funktionen. Der mit dem Halbmesser $CA = CB = r$ beschriebene Kreis ADB, Fig. 3.,

Fig. 3

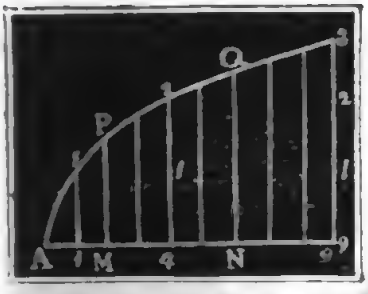


welcher der Funktion $y = \sqrt{2rx - x^2}$ entspricht, gewährt uns z. B. nicht allein eine Uebersicht über die verschiedenen Werthe, welche diese Funktion annehmen kann, sondern macht uns auch mit anderen Eigenthümlichkeiten dieser Funktion bekannt, da die Eigenschaften des Kreises auch ihre Bedeutung in der Funktion haben, wie wir besonders im Folgenden sehen werden.

Art. 3. Die Naturgesetze lassen sich in der Regel durch Funktionen zwischen zwei oder mehreren Größen ausdrücken und sind deshalb auch meist einer graphischen Darstellung fähig. Beim freien Fallen der Körper im luftleeren Raume hat man z. B. für die Fallgeschwindigkeit y, welche der Fallhöhe x entspricht, $y = \sqrt{2gx}$; diese Formel stimmt aber auch mit der Gleichung $y = \sqrt{px}$ der Parabel überein, wenn man den Parameter (p) der letzteren gleichsetzt der doppelten Beschleunigung ($2g$) der

Schwere, daher läßt sich auch das Fallgesetz durch eine Parabel APQ, Fig. 4., mit dem Parameter $p = 2g$ graphisch darstellen. Die Abscissen AM, AN . . dieser Curve sind natürlich die Fallräume, und die entsprechenden Ordinaten MP, NQ . . die zugehörigen Geschwindigkeiten.

Fig. 4.



Ist a ein gewisses Luftvolumen unter der Pressung von 1 Atmosphäre, so hat man dem Mariotte'schen Gesetze zu Folge das Volumen derselben Luftmenge unter der Pressung von x Atmosphären: $y = \frac{a}{x}$.

Für $x = 1$ ist $y = a$, für $x = 2$, $y = \frac{a}{2}$, für $x = 4$, $y = \frac{a}{4}$,

» $x = 10$ » $y = \frac{a}{10}$, » $x = 100$, $y = \frac{a}{100}$, » $x = \infty$, $y = 0$;

man sieht also, daß das Volumen immer kleiner und kleiner wird, je größer die Spannung ist, und daß, wenn das Mariotte'sche Gesetz bei allen Spannungen richtig bliebe, einer unendlich großen Spannung x ein unendlich kleines Volumen y entspräche.

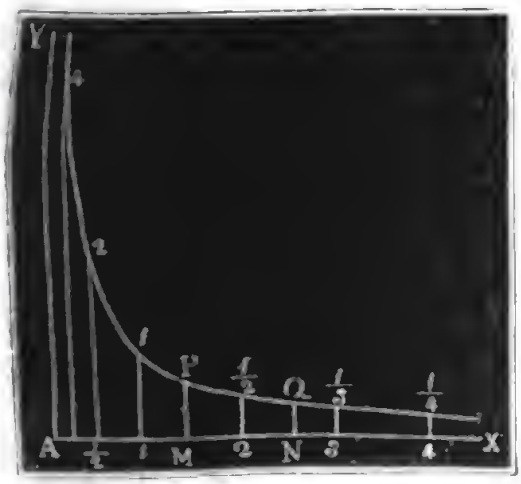
Ferner $x = \frac{1}{2}$ giebt $y = 2a$, $x = \frac{1}{4}$, giebt $y = 4a$,

$x = \frac{1}{10}$ » $y = 10a$, $x = 0$, » $y = \infty a$,

je kleiner hiernach die Spannung wird, je größer fällt auch das Volumen aus, und wenn die Spannung unendlich klein ist, so stellt sich das Volumen unendlich groß heraus.

Die Curve, welche diesem Gesetze entspricht, ist in Fig. 5. abgebildet; AM, AN . . sind die Spannungen oder Abscissen, MP, NQ . . die entsprechenden Volumen oder Ordinaten. Man sieht, diese Curve nähert sich allmälig den Axen AX und AY der Coordinaten, ohne sie je zu erreichen.

Fig. 5.



Die Abhängigkeit der Expansivkraft y des gesättigten Wasserdampfes von der Temperatur x läßt sich wenigstens innerhalb gewisser Grenzen durch die Formel

$$y = \left(\frac{a+x}{b}\right)^m \text{Atmosphären}$$

ausdrücken, und es ist erfahrungsmäßig, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen, $a = 75$, $b = 175$ und

$m = 6$. Wenn wir hiernach $y = \left(\frac{75+x}{175}\right)^6$ ſetzen, und eine unbeſchränkte Richtigkeit dieſer Formel annehmen, ſo erhalten wir:

für $x = 100^0$, $y = \left(\frac{175}{175}\right)^6 =$ 1 Atmoſphäre,

» $x = 50^0$, $y = \left(\frac{125}{175}\right)^6 = 0{,}133$ »

» $x = 0^0$, $y = \left(\frac{75}{175}\right)^6 = 0{,}006$ »

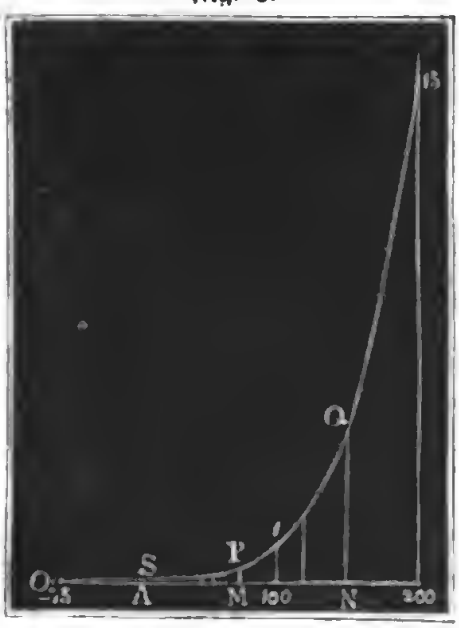
» $x = -75^0$, $y = \left(\frac{0}{175}\right)^6 = 0{,}000$ »

ferner für $x = 120^0$, $y = \left(\frac{195}{175}\right)^6 = 1{,}914$ »

» $x = 150^0$, $y = \left(\frac{225}{175}\right)^6 = 4{,}517$ »

» $x = 200^0$, $y = \left(\frac{275}{175}\right)^6 = 15{,}058$ »

Fig. 6.



Die entſprechende Curve führt PQ, Figur 6., vor Augen; man ſieht dieſelbe geht in einem Abſtande $AO = -75$ vom Anfangspunkte A der Coordinaten durch die Abſciſſenaxe, und in einem Abſtande $AS = 0{,}006$ von eben dieſem Punkte durch die Ordinatenaxen; ferner einer Abſciſſe $AM < 100$ entſpricht eine Ordinate MP unter 1 und einer Abſciſſe $AN > 100$ gehört die Ordinate $NQ > 1$ zu; auch iſt wahrzunehmen, daß nicht nur y mit x in's Unendliche wächſt, ſondern auch, daß die Curve immer ſteiler und ſteiler anſteigt, je größer x wird.

Art. 4. Wenn man die Urvariable einer Funktion oder Abſciſſe $AM = x$, Fig. 7. und 8. auf folg. S., der entſprechenden Curve um eine unendlich kleine, künftig durch dx zu bezeichnende Größe MN wachſen läßt, ſo geht die entſprechende Abhängigvariable oder Ordinate $MP = y$ in $NQ = y_1$ über, und wird um den durch dy zu bezeichnenden unendlich kleinen Werth $RQ = NQ - MP$ größer. Beide Wachsthümer dx und dy von x und y nennt man Differenziale oder Elemente der Veränderlichen oder Coordinaten x und y, und es iſt nun unſere Haupt-

aufgabe, **für die am häufigſten vorkommenden Funktionen die Differenziale, oder vielmehr die Verhältniſſe zwiſchen den zuſammengehörigen Elementen**

Fig. 7.

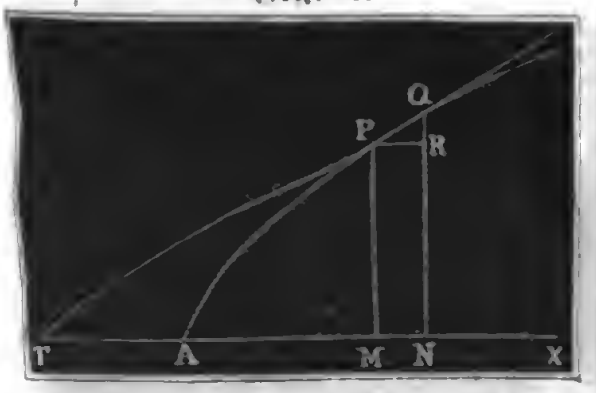
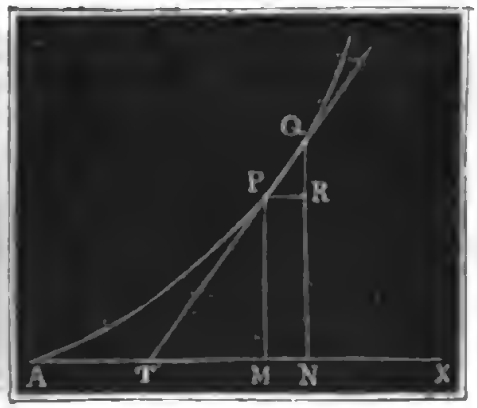


Fig. 8.



ihrer Variablen x und y zu finden. Setzt man in der Funktion $y = f(x)$, wo x die Abſciſſe AM und y die Ordinate MP vorſtellt,

ſtatt x, $x + dx = AM + MN = AN$, ſo erhält man

ſtatt y, $y + dy = MP + RQ = NQ$, alſo

$$y + dy = f(x + dx),$$

und zieht man hiervon den erſten Werth von y ab, ſo bleibt das Element oder Differenzial der Variablen y, d. i. $dy = df(x) = f(x+dx) - f(x)$ übrig.

Dies iſt die allgemeinſte Regel zur Beſtimmung des Differenziales einer Funktion, aus welcher ſich durch Anwendung auf verſchiedene Funktionen wieder andere mehr oder weniger allgemeine Regeln ableiten laſſen.

Iſt z. B. $y = x^2$, ſo hat man

$$dy = (x + dx)^2 - x^2, \text{ oder, da}$$

$(x + dx)^2 = x^2 + 2xdx + dx^2$ zu ſetzen iſt,

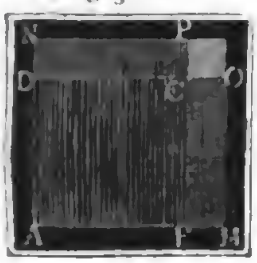
$$dy = 2xdx + dx^2 = (2x + dx)\,dx;$$

und einfacher, da dx als unendlich kleine Größe gegen $2x$ verſchwindet, oder $2x$ durch Hinzutritt von dx nicht angebbar verändert wird und deshalb unbeachtet gelaſſen werden kann,

$$dy = d(x^2) = 2xdx.$$

Es entſpricht $y = x^2$ dem Inhalte eines Quadrates $ABCD$, Fig. 9., deſſen Seite $AB = AD = x$ iſt, und es läßt ſich auch aus der Figur entnehmen, daß durch Zunahme der Seite um $BM = DN = dx$, das Quadrat um zwei Rechtecke BO und $DP = 2xdx$ und um ein Quadrat $OP = (dx)^2$ wächſt, daß alſo bei einem unendlich kleinen Wachsthum dx von x, das Quadrat $y = x^2$ um das Element $2xdx$ zunimmt.

Fig. 9.



Art. 5. Die gerade Linie PQ, Fig. 10. und 11., welche durch zwei unendlich nahe liegende Punkte P und Q einer Curve geht, heißt Tangente

Fig. 10.

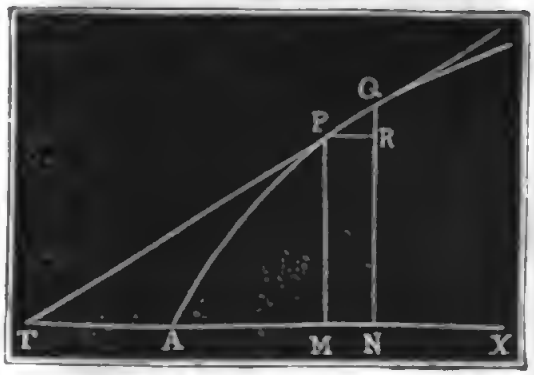
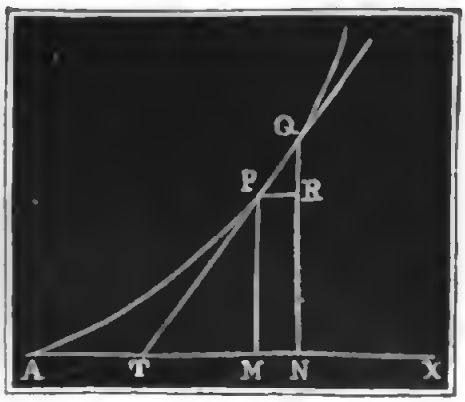


Fig. 11.



oder Berührungslinie dieſer Curve und giebt die Richtung derſelben zwiſchen dieſen Punkten an. Man giebt die Richtung der Tangente durch den Winkel $PTM = \alpha$ an, unter welchem die Abſciſſenaxe AX von dieſer Linie geſchnitten wird. Bei einer concaven Curve wie APQ, Fig. 10., liegt die Tangente außerhalb der Curve und Abſciſſenaxe, bei einer convexen Curve APQ, Fig. 11., hingegen befindet ſie ſich zwiſchen der Curve und Abſciſſenaxe.

In dem unendlich kleinen rechtwinkeligen Dreiecke PQR, Fig. 10. und 11., mit den Katheten $PR = dx$ und $RQ = dy$ iſt der Winkel QPR gleich dem Tangentenwinkel $PTM = \alpha$, und da

$$tang.\ QPR = \frac{QR}{PR} \text{ iſt,}$$

ſo hat man auch

$$tang.\ \alpha = \frac{dy}{dx},$$

es giebt alſo das Verhältniß oder der Quotient der beiden Elemente dy und dx die trigonometriſche Tangente des Tangentenwinkels an.

Z. B. für die Parabel, deren Gleichung $y^2 = px$ iſt, hat man, wenn man $y^2 = px = z$ ſetzt, $dz = (y+dy)^2 - y^2 = y^2 + 2ydy + dy^2 - y^2 = 2ydy + dy^2$, oder da dy^2 gegen $2ydy$ oder, was auf eins herauskommt, dy gegen $2y$ verſchwindet,

$$dz = 2ydy, \text{ und ebenſo}$$
$$dz = p(x+dx) - px = pdx.$$

Es iſt hiernach $2ydy = pdx$, und daher für den Tangentenwinkel der Parabel:

$$tang\ \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y} = \frac{y^2}{2xy} = \frac{y}{2x}.$$

In der Regel nennt man das beſtimmte Stück PT der Berührungslinie zwiſchen dem Berührungspunkte P und dem Durchſchnittspunkte T mit der Abſciſſenaxe, Tangente, und die Projection TM deſſelben in der Abſciſſenaxe, Subtangente, und hat daher

$$\begin{aligned} subtang.\ TM &= PM\ cotang.\ PTM \\ &= y\ cotang.\ \alpha = y\,\frac{dx}{dy}, \end{aligned}$$

z. B. bei der Parabel $subtang. = y\,.\,\frac{2x}{y} = 2x$. Es iſt alſo hier die Subtangente der doppelten Abſciſſe gleich, und hiernach die Lage der Tangente für jeden Punkt P der Parabel leicht anzugeben.

Art. 6. Für eine Funktion $y = a + m f(x)$ hat man

$$\begin{aligned} dy &= [a + m f(x+dx)] - [a + m f(x)] \\ &= a - a + m f(x+dx) - m f(x) \\ &= m\,[f(x+dx) - f(x)]; \end{aligned}$$

d. i. 1. $d\,[a + m f(x)] = m\,df(x)$,

z. B. $d(5+3x^2) = 3[(x+dx)^2 - x^2] = 3\,.\,2x\,dx = 6x\,dx$.

Es iſt ebenſo $d(4 - \frac{1}{2}x^3) = -\frac{1}{2}d(x^3) = -\frac{1}{2}[(x+dx)^3 - x^3]$
$= -\frac{1}{2}(x^3 + 3x^2dx + 3x\,dx^2 + dx^3 - x^3) = -\frac{1}{2}.3x^2dx = -\frac{3}{2}x^2dx$.

Wir können hiernach folgende wichtige Regel aufſtellen: Die conſtanten Glieder $(a, 5)$ einer Funktion verſchwinden beim Differenziiren, und die conſtanten Faktoren $(m, 3)$ bleiben hierbei unverändert.

Die Richtigkeit dieſer Regel läßt ſich auch graphiſch darthun. Für die Curve APQ, Fig. 12., deren Coordinaten ein Mal $AM = x$ und $MP = y = f(x)$, und ein anderes Mal $A_1M_1 = x$ und $M_1P = a + y = a + f(x)$ ſind, iſt $PR = dx$ und $RQ = dy = df(x)$ und auch $= d(a+y) = d[a+f(x)]$; und für die Curven AP_1Q_1 und APQ, Fig. 13., deren zuſammengehörige Ordinaten MP_1 und MP, ſo wie

Fig. 12.

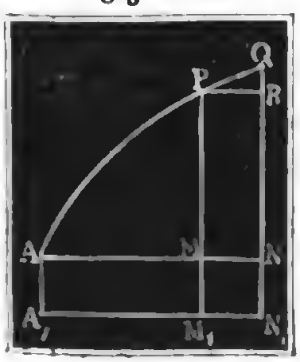
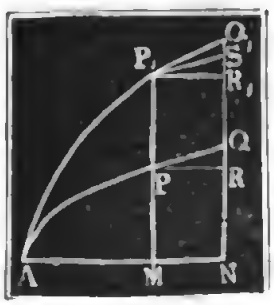


Fig. 13.



NQ_1 und NQ ein gewiſſes Verhältniß zu einander haben, iſt auch das Verhältniß zwiſchen den Differenzialien $Q_1R_1 = NQ_1 - MP_1$ und

$QR = NQ - MP$ beſtändig daſſelbe, iſt alſo $MP_1 = m\,MP = mf(x)$, ſo hat man auch $R_1Q_1 = mRQ$, d. i. $d[mf(x)] = m\,df(x)$.

Iſt $y = f(x) + \varphi(x)$, ſo hat man

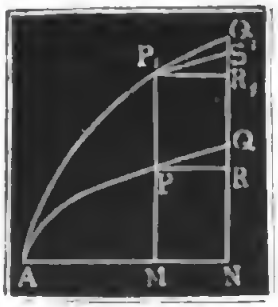
$$dy = f(x+dx) + \varphi(x+dx) - f(x) - \varphi(x)$$
$$= f(x+dx) - f(x) + \varphi(x+dx) - \varphi(x).$$

d. i. II. $d[f(x) + \varphi(x)] = df(x) + d\varphi(x)$.

Es iſt alſo das Differenzial von der Summe aus mehreren Funktionen gleich der Summe von den Differenzialien der einzelnen Funktionen.

Z. B. $d(2x + 3x^2 - {}^1/_2x^3) = 2\,dx + 6\,x\,dx - {}^3/_2x^2\,dx$
$= (2 + 6x - {}^3/_2x^2)\,dx.$

Fig. 14.

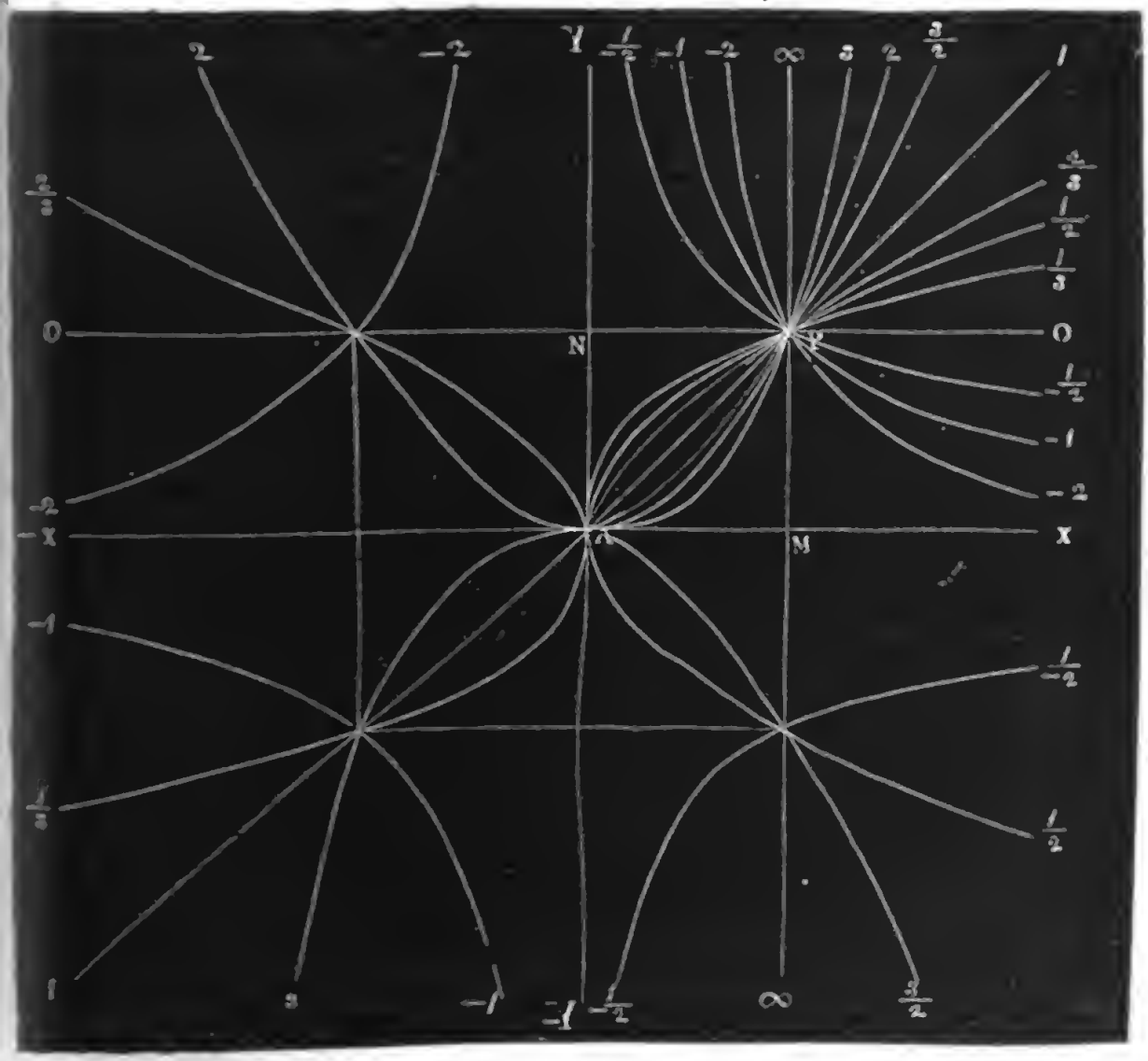


Die Richtigkeit dieſer Regel iſt auch aus der Betrachtung einer Curve APQ, Fig. 14., abzuleiten. Iſt $MP = f(x)$ und $P_1P = \varphi(x)$, ſo hat man $MP_1 = y = f(x) + \varphi(x)$, und $dy = R_1Q_1 = R_1S + SQ_1 = RQ + SQ_1 = df(x) + d\varphi(x)$, da P_1S parallel zu PQ gelegt werden und deshalb $R_1S = RQ$ und $QS = PP_1$ geſetzt werden kann.

Art. 7. Die Funktion $y = x^n$ iſt die wichtigſte der ganzen Analyſis, weil man faſt bei allen Unterſuchungen auf dieſelbe ſtößt. Wenn man dem Exponenten n alle möglichen Werthe, poſitive und negative, ganze und gebrochene u. ſ. w. beilegt, ſo liefert ſie auch die verſchiedenartigſten Curven, wie durch Fig. 15. a. f. S. veranſchaulicht wird. Es iſt hier A der Null- oder Anfangspunkt der Coordinaten, $X\overline{X}$ die Abſciſſen- und $Y\overline{Y}$ die Ordinaten-Axe. Setzt man in $y = x^n$, $x = 1$, ſo erhält man auch $y = 1$, macht man daher die Coordinaten AM und $MP = 1$, oder conſtruirt man aus $AM = AN = 1$ ein Quadrat, ſo erhält man in dem Eck P deſſelben den Punkt, durch welchen die Curve ſtets gehen muß, welches auch der Exponent n ſein möge. Nimmt man $n = 1$, ſetzt man alſo $y = x$, ſo bekommt man die von beiden Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ gleichviel abweichende Gerade $(1\,A\,1)$; nimmt man $n > 1$, ſo erhält man convexe Curven, ſetzt man dagegen $n < 1$, ſo ergeben ſich concave Curven; jene laufen anfangs unter und von P aus über der geraden Linie $(1\,A\,1)$ hin, bei dieſen iſt das Umgekehrte der Fall. Für $n = 0$ iſt $y = x^0 = 1$, und für $n = \infty$ iſt $y = x^\infty = x^{1/0}$, alſo umgekehrt $x = y^0 = 1$; der erſten dieſer beiden Gleichungen entſpricht die Gerade $(0\,P\,0)$ und der zweiten die Gerade $(\infty\,P\,\infty)$. Man ſieht, die Curven, welche poſitiven Werthen von n entſprechen, ziehen ſich anfangs unter, und von P aus über der Geraden $(0\,P\,0)$ hin, die Curven, welche aus negativen Werthen

von n reſultiren, laufen hingegen erſt über, und jenſeits P unter $(0\,P\,0)$ hin. Für jene Curven iſt für $x = 0$ auch $y = 0$ und für $x = \infty$

Fig. 15.



auch $y = \infty$, für dieſe hingegen für $x = 0$, $y = \infty$ und für $x = \infty$ $y = 0$. Während ſich jene immer mehr und mehr von den Coordinatenaxen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ entfernen, je weiter man ſie verfolgt, nähern ſich dieſe einerſeits immer mehr und mehr der Axe $X\overline{X}$ und andererſeits der Axe $Y\overline{Y}$, ohne ſie jedoch wirklich zu erreichen.

Die Funktionen $y = x^{1/2}$, $x^{2/2}$, $x^{-1/2}$ u. ſ. w., d. i.

$$y = \sqrt{x},\ \sqrt{x^3} = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ u. ſ. w}$$

geben für jedes x einen poſitiven und einen gleich großen negativen, für

ein negatives x aber einen imaginären Werth; deshalb finden ſich auch die entſprechenden Curven nur im erſten und zweiten der von den Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ begrenzten Quadranten. Die Funktionen

$$y = x^{-1},\ x^{1/3},\ x^{5/3} \text{ u. ſ. w., d. i.}$$
$$y = \frac{1}{x},\ \sqrt[3]{x},\ \sqrt[3]{x^5} \text{ u. ſ. w.}$$

geben für jedes negative x auch ein negatives y, weshalb die entſprechenden Curven außer dem erſten Quadranten XAY noch den dritten $\overline{X}A\overline{Y}$ einnehmen. Die Funktionen

$$y = x^2,\ x^{-2},\ x^{2/3} \text{ u. ſ. w., d. i.}$$
$$y = x^2,\ \frac{1}{x^2},\ \sqrt[3]{x^2} \text{ u. ſ. w.}$$

erhalten ſelbſt bei negativem x poſitive y, und deshalb bleiben die zugehörigen Curven ſtets über der Abſciſſenaxe $X\overline{X}$ oder im erſten und vierten Quadranten.

Art. 8. Wenn wir in der Funktion $y = x^n$, x um dx wachſen laſſen, ſo erhalten wir den Werth $y_1 = (x + dx)^n$, und daher das Differenzial oder Element $dy = y_1 - y = (x + dx)^n - x^n$.

Der binomiſchen Reihe

$$(a+x)^n = a^n + n a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} x^3 + \ldots$$

zufolge iſt aber

$$(x + dx)^n = x^n + n x^{n-1} dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx^2 + \ldots$$

daher erhalten wir denn

$$dy = d(x^n) = n x^{n-1} dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx^2 + \ldots$$
$$= \left(n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx + \ldots\right) dx;$$

oder da $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx + \ldots$ wegen der unendlichen Kleinheit von dx gegen $n x^{n-1}$ verſchwindet, $d(x^n) = n x^{n-1} dx$.

Z. B. $d(x^5) = 5 x^4 dx$, $d(\sqrt{x^3}) = d(x^{3/2}) = \frac{3}{2} x^{1/2} dx$,

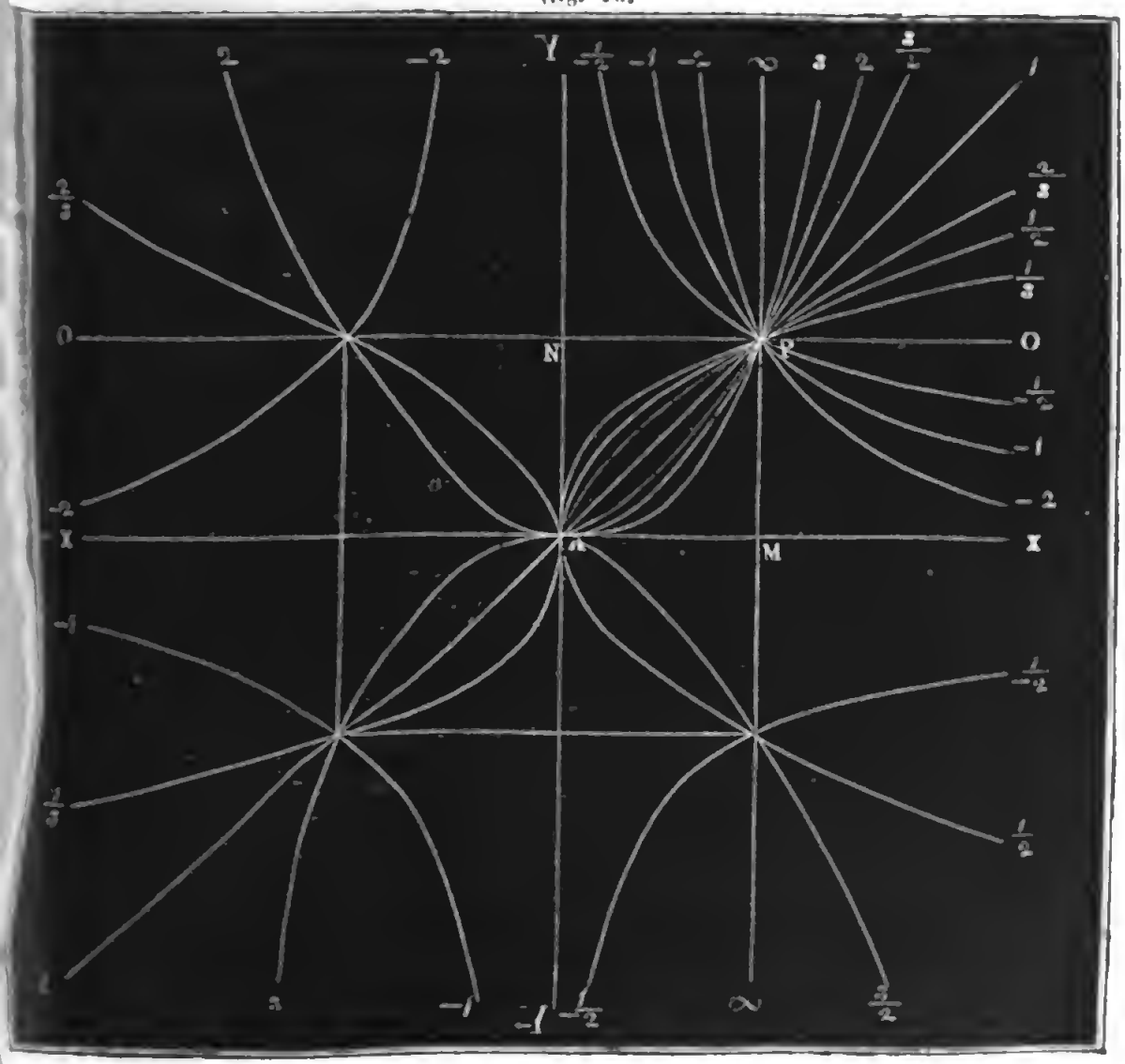
$d\left(\frac{4}{x^2}\right) = 4 d(x^{-2}) = -8 x^{-3} dx$; ferner

$$d\sqrt{2rx-x^2} = d\sqrt{u} = d(u^{1/2}) = 1/2\,u^{-1/2}du = 1/2\,\frac{d(2rx-x^2)}{u^{1/2}}$$

$$= 1/2\cdot\frac{2r\,dx-2x\,dx}{\sqrt{u}} = \frac{(r-x)\,dx}{\sqrt{2rx-x^2}}.$$

Aus der wichtigen Formel $d(x^n) = n\,x^{n-1}\,dx$ folgt nun auch die Formel für den Tangentenwinkel der entſprechenden und in Fig. 16. abgebildeten Curven; es iſt nämlich $tang.\,\alpha = \frac{dy}{dx} = n\,x^{n-1}$.

Fig. 16.



Hiernach hat man z. B. für die ſogenannte Neil'ſche Parabel, deren Gleichung $y = \sqrt[2]{\frac{x^3}{a}}$ iſt,

$$tang.\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{d(x^{3/2})}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot 3/2\,x^{1/2} = 3/2\,\sqrt{\frac{x}{a}}.$$

Art. 9. Wenn man in dem Elementenverhältniß $\frac{dy}{dx}$ oder in der Formel für die Tangente des Tangentenwinkels für x nach und nach verſchiedene Werthe ſetzt, ſo erhält man durch dieſelbe die verſchiedenen Lagen der Berührungslinie. Nimmt man $x = 0$, ſo erhält man die Tangente des Tangentenwinkels im Anfangspunkt, nimmt man $x = \infty$, ſo erhält man dieſelbe für einen unendlich entfernten Punkt der Curve. Am wichtigſten ſind die Punkte, wo die Tangente einer Curve mit der einen oder der anderen Coordinatenaxe parallel läuft, weil hier in der Regel die eine oder die andere der Coordinaten x und y ihren größten oder kleinſten Werth hat, oder, wie man ſagt, ein Maximum oder Minimum iſt. Für den Parallelismus mit der Abſciſſenaxe hat man $\alpha = 0$, alſo auch $tang.\alpha = 0$, und für den mit der Ordinatenaxe $\alpha = 90^0$, alſo $tang\ \alpha = \infty$; und hiernach folgt die Regel: man findet diejenigen Werthe der Abſciſſe oder Urvariablen x, welchen die Maximal- oder Minimalwerthe der Ordinate oder Abhängigvariablen y entſprechen, wenn man das Differenzialverhältniß $\frac{dy}{dx} = 0$, oder $= \infty$ ſetzt, und die erhaltenen Gleichungen in Hinſicht auf x auflöſt.

Z. B. für die Gleichung $y = 6x - {}^9/_2 x^2 + x^3$, welcher der Curve $APQR$ in Fig. 17. entſpricht, iſt

$$\frac{dy}{dx} = 6 - 9x + 3x^2 = 3(2 - 3x + x^2) = 3(1-x)(2-x),$$

und es folgt durch Nullſetzen von $\frac{dy}{dx}$, $1 - x = 0$ und $2 - x = 0$,

Fig. 17.

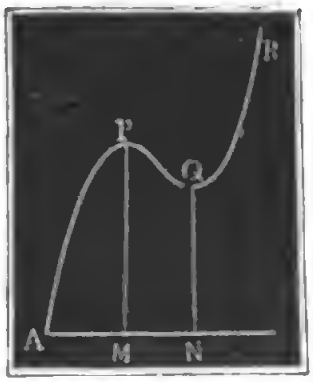
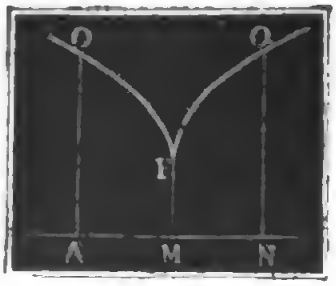


Fig. 18.



d. i. $x = 1$ und $x = 2$. Dieſe Werthe in die Formel

$$y = 6x - {}^9/_2 x^2 + x^3$$

geſetzt, ergiebt ſich der Maximalwerth von y: $MP = 6 - {}^9/_2 + 1 = {}^5/_2$ und der Minimalwerth $NQ = 12 - 18 + 8 = 2$.

Ferner für die Curve OPQ, Fig. 18., deren Gleichung $y = a + (x-b)^{{}^2/_3}$

iſt, hat man $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(x-b)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-b}}$, und um nun den Minimalwerth MP von y zu finden, ſetzt man $\frac{dy}{dx} = \infty$, d. i. $\frac{2}{3\sqrt[3]{x-b}} = \infty$, $3\sqrt[3]{x-b} = 0$, d i $x = b$. Der entſprechende Minimalwerth iſt $y = a$; nimmt man dagegen $x = 0$, ſo erhält man $y = a + \sqrt[3]{b^2}$, und nimmt man $x = 2b$, ſo ſtellt ſich ebenfalls $y = a + \sqrt[3]{b^2}$, alſo in beiden Fällen ein größerer Werth von y heraus.

Art. 10. Sowie bei einer vom Anfangspunkte A aus aufſteigenden Curve y mit x wächſt, und deshalb dy poſitiv iſt, bei einer niederſteigenden hingegen y abnimmt, wenn x größer wird, und deshalb dy negativ ausfällt, und endlich an der Stelle, wo die Curve mit der Coordinatenaxe AX parallel läuft, dy Null iſt, ebenſo ſind die gleichen Abſciſſen-Elementen $dx = MN = NO = PS = QT \ldots$ entſprechenden Ordinaten-Elemente $SQ = PS\, tang.QPS$, d. i. $dy = dx\,.\,tang.\alpha_1$,

$TR = QT\, tang.RQT$, d. i. $dy = dx\,.\,tang.\alpha_2$ u. ſ. w. und alſo auch die Tangentenwinkel α_1, α_2 u. ſ. w. bei einer converen Curve APR, Fig. 19. im Wachſen und bei einer concaven Curve APR, Fig. 20.,

Fig. 19.

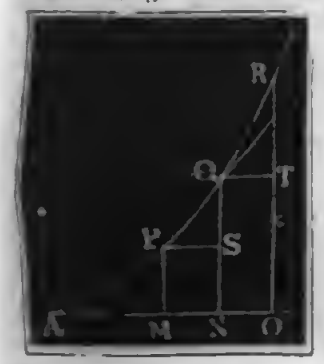


Fig. 20.

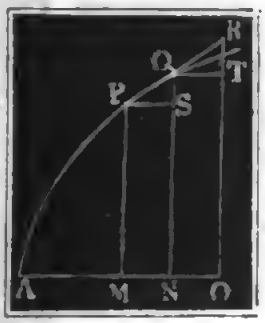
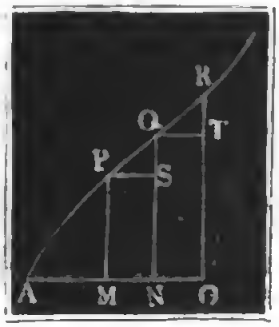


Fig. 21.



im Abnehmen begriffen, es iſt folglich im erſten Falle

$$d(tang\ \alpha) = d\left(\frac{dy}{dx}\right) \text{ poſitiv,}$$

und im zweiten $d\ (tang.\alpha) = d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ negativ, und man hat endlich auch für den Wendepunkt Q, Fig. 21., d. i. für die Stelle Q der Curve, wo Convexität in Concavität übergeht, oder das Umgekehrte ſtattfindet, auch $QS = RT$, und daher

$$(tang.\alpha) = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \text{Null.}$$

Digitized by Google

Es gilt alſo die Regel: iſt das Differenzial der Tangente des Tangentenwinkels poſitiv, ſo beſitzt die Curve Convexität, iſt es negativ, ſo hat dieſelbe Concavität, und iſt es Null, ſo hat man es mit einem Wendepunkte der Curve zu thun.

Auch iſt hiernach leicht Folgendes zu ermeſſen. Die Stelle, wo die Curve parallel mit der Abſciſſenaxe läuft, für welche alſo $tang.\,\alpha = 0$ iſt, entſpricht einem Minimo, Maximo oder Wendepunkte der Curve, wenn dieſe convex, concav oder keines von beiden, wenn alſo

$d\,(tang.\,\alpha)$ poſitiv, oder negativ oder Null iſt.

Dagegen die Stelle, wo eine Curve mit der Ordinatenaxe parallel läuft, alſo $tang.\,\alpha = \infty$ iſt, entſpricht einem Minimo, Maximo oder Wendepunkte der Curve, wenn dieſelbe concav, convex oder theils concav, theils convex, wenn alſo $d\,(tang.\,\alpha)$ vor und nach dieſer Stelle negativ,

» » » » » poſitiv, oder

vor dieſer Stelle ein anderes Zeichen hat als nach derſelben.

Ein Curvenſtück mit Wendepunkt Q der erſten Art führt Figur 22., und ein ſolches mit einem Wendepunkt der zweiten Art Figur 23. vor Augen. Man ſieht, die entſprechende Ordinate NQ iſt weder ein Maximum noch ein Minimum, denn es ſind in keinem Falle die benachbarten Ordinaten MP und OR beide größer oder kleiner als NQ.

Fig. 22

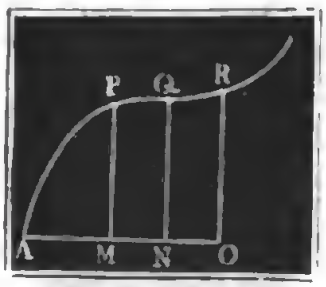


Fig. 23.

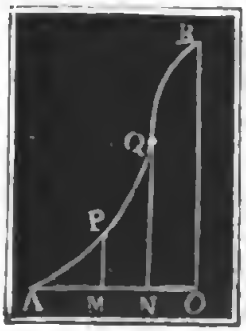
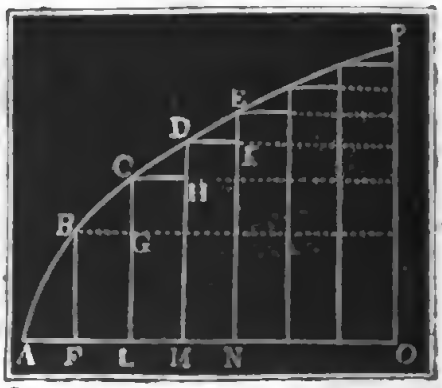


Fig. 24.



Art. 11. Die der Abſciſſe $AO = x$, Fig. 24., entſprechende Ordinate $OP = y$ läßt ſich aus unendlich vielen ungleichen Elementen $dy = FB$, GC, HD, KE . . . zuſammenſetzen, die lauter gleichen Elementen $dx = AF = FL = LM = MN$ . . . entſprechen. Wäre daher $dy = \varphi(x) \,.\, dx$ gegeben, ſo würde man y durch Summation aller derjenigen Werthe von dy finden, die ſich herausſtellen wenn man in $\varphi(x) \,.\, dx$ ſtatt x nach und nach dx, $2\,dx$, $3\,dx$, $4\,dx$.. bis $n\,dx = x$ einſetzt. Dieſe Summation deutet man durch das ſogenannte Integralzeichen $\int$ an, welches man vor den allgemeinen Ausdruck für die zu ſummirenden Elemente ſetzt, ſchreibt alſo ſtatt

$$y = [\varphi(dx) + \varphi(2dx) + \varphi(3dx) + \ldots + \varphi(x)]\,dx,$$
$$y = \int \varphi(x)\,dx.$$

Auch nennt man in dieſem Falle y das Integral von $\varphi(x)\,dx$, ſo wie $\varphi(x)\,dx$ das Differenzial von y.

Zuweilen kann man das Integral $\int \varphi(x)\,dx$ durch wirkliches Summiren der Reihe $\varphi(dx)$, $\varphi(2dx)$, $\varphi(3dx)$ u. ſ. w beſtimmen, viel einfacher iſt es jedoch bei Ausmittelung eines Integrals eine der im Folgenden entwickelten Regeln der ſogenannten Intregralrechnung in Anwendung zu bringen.

Für das Differenzial $dy = mx\,dx$ hat man z. B. das Integral

$$y = \int mx\,dx = m\,dx\,(dx + 2dx + 3dx + \ldots + x)$$
$$= \left(1 + 2 + 3 + \ldots + \frac{x}{dx}\right) m\,dx^2,$$

oder, da $1, 2, 3 \ldots \frac{x}{dx}$ eine gewöhnliche arithmetiſche Progreſſion bildet (ſ. Ingenieur S. 141.), deren erſtes Glied $= 1$, letztes Glied $= \frac{x}{dx}$ und Anzahl der Glieder ebenfalls $= \frac{x}{dx}$ iſt,

$$\int mx\,dx = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{dx}\right)\frac{x}{dx}\,m\,dx^2,$$

und einfacher, da 1 gegen die unendlich große Zahl $\frac{x}{dx}$ verſchwindet,

$$\int mx\,dx = \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{dx}\right)^2 . m\,dx^2 = \tfrac{1}{2}mx^2.$$

Art. 12. Aus der Formel $d[a + mf(x)] = m\,df(x)$ folgt durch Umkehrung $\int m\,df(x) = a + mf(x) = a + m\int df(x)$,

oder $df(x) = \varphi(x) . dx$ geſetzt,

$$1.\quad \int m\varphi(x)\,dx = a + m\int \varphi(x)\,dx,$$

und hieraus folgt, daß der conſtante Faktor m beim Integriren ſowie beim Differenziiren unverändert bleibt, und daß durch bloßes Integriren ein etwa vorhandenes conſtantes Glied a nicht beſtimmt werden kann; daß alſo das Integriren allein ein noch unbeſtimmtes Integral liefert. Um das conſtante Glied zu finden, müſſen zwei zuſammengehörige Werthe von x und $y = \int \varphi(x)\,dx$ bekannt ſein. Iſt für $x = c$, $y = k$, und hat man $y = \int \varphi(x)\,dx = a + f(x)$ gefunden, ſo muß auch $k = a + f(c)$ ſein, und es giebt daher die Subtraction $y - k = f(x) - f(c)$, alſo in dieſem Falle

$$y = \int \varphi(x)\,dx = k + f(x) - f(c);$$

und man hat hiernach die Conſtante $a = k - f(c)$.

Wenn man z. B. weiß, daß das unbeſtimmte Integral

$$y = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} \text{ für } x = 1,\ y = 3 \text{ giebt,}$$

ſo hat man die nöthige Conſtante $a = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, und daher das Integral

$$y = \int x\,dx = a + \frac{x^2}{2} = \frac{5 + x^2}{2}.$$

Selbſt die Conſtantenbeſtimmung läßt das Integral noch unbeſtimmt, weil noch für x als Urvariable jeder beliebige Werth angenommen werden kann; will man aber einen ganz beſtimmten Werth k_1 des Integrales haben, der einem beſtimmten Werth c_1 von x entſpricht, ſo muß man noch dieſen in das gefundene Integral ein-, alſo $k_1 = k + f(c_1) - f(c)$ ſetzen.

So giebt z. B. $y = \int x\,dx = \frac{5+x^2}{2}$, für $x = 5$, $y = 15$.

Meiſt iſt derjenige Werth von x bekannt, bei welchem $y = 0$ iſt; in dieſem Falle hat man alſo $k = 0$, und es führt daher das unbeſtimmte Integral $\int \varphi(x)\,dx = f(x)$ auf das beſtimmte $k_1 = f(c_1) - f(c)$, das alſo gefunden wird, wenn man in den Ausdruck $f(x)$ für das unbeſtimmte Integral die beiden gegebenen Grenzwerthe c_1 und c von x einſetzt, und die erhaltenen Werthe von einander ſubtrahirt. Um dies anzudeuten, ſchreibt man ſtatt $\int \varphi(x)\,dx$, $\int_c^{c_1} \varphi(x)\,dx$, wenn alſo z. B. $\int \varphi(x)\,dx = \frac{x^2}{2}$ iſt, $\int_c^{c_1} \varphi(x)\,dx = \frac{c_1^2 - c^2}{2}$.

Die Umkehrung der Differenzialformel $d[f(x)+\varphi(x)] = df(x) + d\varphi(x)$ giebt die Integralformel $\int [df(x) + d\varphi(x)] = f(x) + \varphi(x)$, oder wenn man $df(x) = \psi(x)\,dx$ und $d\varphi(x) = \chi(x)\,dx$ ſetzt,

II. $\int [\psi(x)\,dx + \chi(x)\,dx] = \int \psi(x)\,dx + \int \chi(x)\,dx.$

Es iſt alſo hiernach das Integral von einer Summe mehrerer Differenzialien gleich der Summe von den Integralen der einzelnen Differenzialien.

Z. B. $\int (3 + 5x)\,dx = \int 3\,dx + \int 5x\,dx = 3x + \frac{5}{2}x^2$.

Art. 13. Die wichtigſte Differenzialformel des Artikels 8,

$$d(x^n) = n x^{n-1}\,dx,$$

führt durch Umkehrung ebenfalls auf die wichtigſte Integralformel. Es iſt hier $\int n x^{n-1}\,dx = x^n$, oder $n \int x^{n-1}\,dx = x^n$, oder $\int x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n}$, ſetzt man alſo $n - 1 = m$, und hiernach

$n = m + 1$, ſo erhält man folgendes wichtige Integral:

$$\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

das allein in der Anwendung mindeſtens eben ſo oft vorkommt, als alle übrigen zuſammen.

Dieſe Form des Integrales weiſt auch darauf hin, daß dieſes dem in Art. 7. abgehandelten und in Fig. 15. abgebildeten Curvenſyſteme entſpreche.

Hiernach iſt z. B. $\int 5x^3 dx = 5 \int x^3 dx = {}^5/_4 x^4$; ferner

$$\int \sqrt[3]{x^4} \, dx = \int x^{4/3} dx = {}^3/_7 x^{7/3} = {}^3/_7 \sqrt[3]{x^7};$$

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = {}^1/_2 \int x^{-1/2} dx = {}^1/_2 \frac{x^{1/2}}{1/2} = \sqrt{x};$$

$$\int (4 - 6x^2 + 5x^4) \, dx = \int 4 dx - \int 6x^2 dx + \int 5x^4 dx$$
$$= 4\int dx - 6\int x^2 dx + 5\int x^4 dx = 4x - 2x^3 + x^5;$$ ferner,

wenn man $3x - 2 = u$, alſo $3dx = du$, oder $dx = \frac{du}{3}$ einſetzt,

$$\int \sqrt{3x-2} \, dx, = \int u^{1/2} \frac{du}{3} = {}^1/_3 \frac{u^{3/2}}{3/2} = {}^2/_9 \sqrt{u^3}$$
$$= {}^2/_9 \sqrt{(3x-2)^3};$$

endlich, wenn $2x^2 - 1 = u$, alſo $4xdx = du$, d. i. $xdx = \frac{du}{4}$ geſetzt wird:

$$\int \frac{5x\,dx}{\sqrt[3]{2x^2-1}} = \int \frac{5\,du}{4\sqrt[3]{u}} = {}^5/_4 \int u^{-1/3} du = {}^5/_4 \frac{u^{2/3}}{2/3} = {}^{15}/_8 \sqrt[3]{u^2}$$
$$= {}^{15}/_8 \sqrt[3]{(2x^2-1)^2}.$$

Durch Hinzufügung der Grenzwerthe laſſen ſich dieſe unbeſtimmten Integrale ſogleich in beſtimmte verwandeln, z. B.

$$\int_1^2 5x^3 dx = {}^5/_4 (2^4 - 1^4) = {}^5/_4 . (16-1) = 18{}^3/_4.$$

$$\int_4^9 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 1,$$

$$\int_1^6 \sqrt{3x-2} \, . \, dx = {}^2/_9 (\sqrt{16^3} - \sqrt{1^3}) = {}^2/_9 (64 - 1) = 14.$$

Wäre z. B. $\int (4 - 6x^2 + 5x^4) dx = 7$ für $x = 0$, ſo hätte man allgemein: $\int (4 - 6x^2 + 5x^4) dx = 7 + 4x - 2x^3 + x^5$.

Art. 14. Die binomiſche Reihe:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^3 + \ldots,$$

giebt, wenn man n unendlich groß ſetzt, ſo daß 1, 2, 3 u. ſ. w. gegen n verſchwindet,

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n^2}{1.2}x^2 + \frac{n^3}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

Setzt man ferner $x = dx$, und ſtatt $n = \frac{x}{dx}$, ſo erhält man

$$(1+dx)^{\frac{x}{dx}} = 1 + \frac{x}{dx}\,.\,dx + \frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{dx}\right)^2 dx^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{dx}\right)^3 dx^3 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

nehmen wir endlich $x = 1$, ſo erhalten wir

$$(1+dx)^{\frac{1}{dx}} = 1 + 1 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + \ldots = 2{,}71828\ldots,$$

eine Zahl, welche ſtets durch den Buchſtaben e bezeichnet und die Baſis des natürlichen oder hyperboliſchen Potenzen- oder Logarithmen-Syſtemes genannt wird.

Da $(1+dx)^{\frac{x}{dx}} = \left[(1+dx)^{\frac{1}{dx}}\right]^x = e^x$, ſo hat man hiernach für die ſogenannte Exponentialfunktion e^x die Reihe:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \ldots$$

Setzt man $a = e^{1/m}$, ſo iſt $1/m = Log.\,nat.\,a$, d. i. der natürliche oder hyperboliſche Logarithme von a, und daher

$$a^x = (e^{1/m})^x = e^{\frac{x}{m}} = 1 + \frac{1}{1}\left(\frac{x}{m}\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{m}\right)^3 + \ldots$$

Setzt man $y = a^x = e^{\frac{x}{m}}$, ſo hat man umgekehrt

$$x = Log._a\, y \text{ und } \frac{x}{m} = Log.\,nat.\,y, \text{ daher}$$

$$Log._a\, y = m\ Log.\,nat.\,y, \text{ ſo wie umgekehrt}$$

$$Log\ nat.\,y \text{ oder } Log._e\, y = \frac{1}{m}\ Log._a\, y.$$

Die Zahl m heißt der Modul des der Grundzahl a entſprechenden Logarithmenſyſtemes. Es läßt ſich alſo mit Hülfe deſſelben der natürliche Logarithme in jeden künſtlichen, und umgekehrt ein ſolcher in den natürlichen verwandeln. Für das Briggiſche Logarithmenſyſtem iſt die Baſis

$a = 10$, daher $1/m = Log.\ nat.\ 10 = 2{,}30258\ldots$, und umgekehrt der Modul $m = \frac{1}{Log.\ nat.\ 10} = 0{,}43429\ldots$

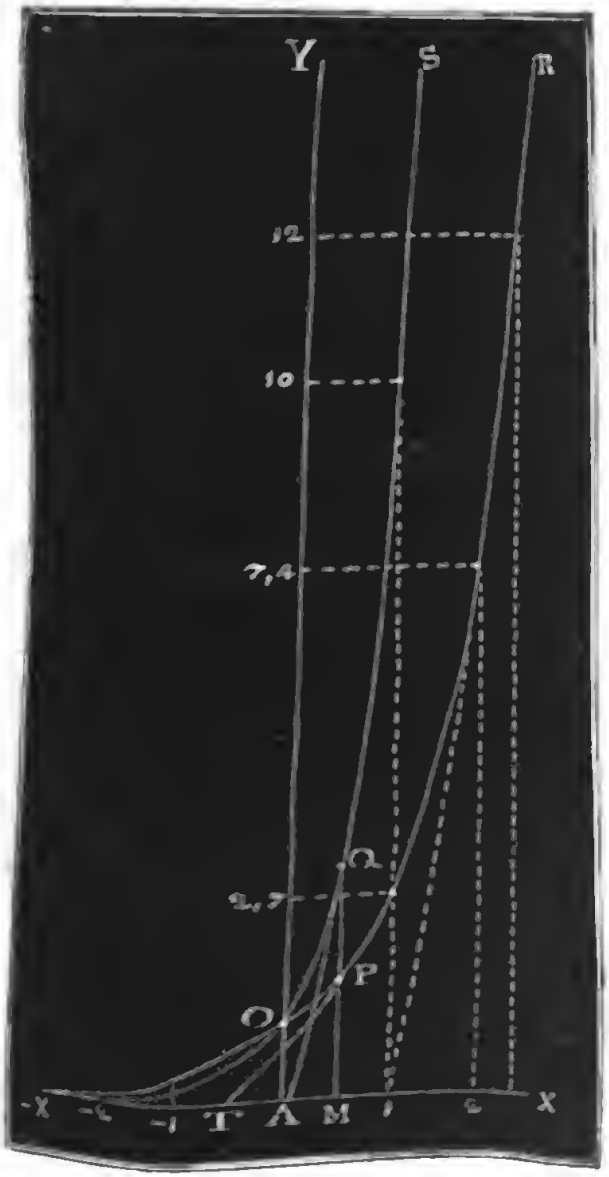
Es iſt alſo $Log.\ y = 0{,}43429\ Log.\ nat.\ y$, und

$Log.\ nat.\ y = 2{,}30258\ Log.\ y$.

(Vergleiche Ingenieur, Seite 136 u. ſ. w.)

Art. 15. Der Lauf der Curven, welche den Exponentialfunktionen $y = e^x$ oder $y = 10^x$ entſprechen, wird durch Fig. 25. veranſchaulicht.

Fig. 25



Für $x = 0$ iſt in beiden Fällen $y = e^0 = a^0 = 1$, deshalb gehen denn auch beide Curven PR und QS durch denſelben Punkt (O) in der Ordinatenaxe. Für $x = 1$, giebt $y = e^x = 2{,}718\ldots$, und $y = 10^x = 10$, für $x = 2$, giebt

$y = e^x = 2{,}718^2 = 7{,}389$

und $y = 10^x = 10^2 = 100$ u. ſ. w.; es ſteigen alſo auf der poſitiven Seite der Abſciſſenaxe beide Curven, zumal aber die letztere, ſehr ſtark an; dagegen iſt für $x = -1$:

$e^x = e^{-1} = \frac{1}{2{,}718\ldots} = 0{,}368$ und

$10^x = 10^{-1} = 0{,}1$;

ferner für $x = -2$,

$e^x = e^{-2} = \frac{1}{2{,}718^2} = 0{,}135$

und $10^x = 10^{-2} = 0{,}01$;

endlich für $x = -\infty$, geben beide Gleichungen

$e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{a^{\infty}} = 0.$

Es nähern ſich alſo beide Curven auf der negativen Seite der Abſciſ-

ſenaxe dieſer Axe immer mehr und mehr, und zwar die letztere mehr als die erſtere; jedoch findet ein wirkliches Zuſammentreffen mit dieſer Axe nie Statt.

Da aus $y = e^x$, $x = Log.\ nat.\ y$ und ebenſo

aus $y = a^x$, $x = Log._a\ y$ folgt,

ſo geben dieſe Curven auch eine Scala der natürlichen und Briggiſchen Logarithmen ab; es ſind nämlich die Abſciſſen die Logarithmen der Ordinaten; es iſt z. B. $AM = Log.\ nat.\ MP = Log.\ MQ$ u. ſ. w.

Art. 16. Das Differenzial der Exponentialfunktion $y = a^x$ ergiebt ſich durch Anwendung der allgemeinſten Regel des Differenziirens:

$$dy = a^{x+dx} - a^x = a^x \cdot a^{dx} - a^x = a^x\ (a^{dx} - 1);$$

da aber die Exponentialreihe

$$a^x = 1 + \frac{x}{m} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \ldots,$$

$$a^{dx} = 1 + \frac{dx}{m} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dx}{m}\right)^2 + \ldots$$

giebt, und der letzte Werth $a^{dx} = 1 + \frac{dx}{m}$ geſetzt werden kann, ſo erhält man hiernach $dy = a^x\left(1 + \frac{dx}{m} - 1\right)$, d. i.

I. $d\,(a^x) = \frac{a^x\,dx}{m} = Ln.a.a^x\,dx$, und $a = e$, ſo wie $m = 1$ geſetzt.

I *). $d\ (e^x) = e^x\,dx$.

Der Tangentenwinkel α der Exponentialcurve iſt folglich beſtimmt durch die einfache Formel:

$$tang.\ \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{a^x\,dx}{m\,dx} = \frac{a^x}{m} = \frac{y}{m} = y \cdot Log.\ nat.\ a.$$

Bei der Curve QS, Fig. 25., iſt folglich die $Subtang. = y\ cotg.\ \alpha = m$, alſo conſtant, und bei der Curve PR iſt ſie ſtets $= 1$.

Durch Umkehrung giebt die erſte der beiden Differenzialformeln:

$$dx = m \cdot \frac{d\,(a^x)}{a^x}, \text{ oder ſtatt } x,\ y \text{ geſetzt,}$$

$$dy = m\,\frac{d\,(a^y)}{a^y};$$

nun iſt aber für $x = a^y$, $y = Log._a\ x$, daher hat man:

II. $d\,(Log._a\,x) = m\,\frac{dx}{x} = \frac{dx}{x\;Log.nat.\,a}$, ſo wie

II*). $d\,(Log.nat\;x) = \frac{dx}{x}$.

Mittels dieſer vier Regeln ſind nun leicht folgende Beiſpiele durchzurechnen.

$d\,(e^{3x+1}) = e^{3x+1}\,.\,d\,(3x+1) = 3e^{3x+1}\,dx.$

$d\,(Log.nat.\,\sqrt[2]{x}) = \frac{d\sqrt[2]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{d\,(x^{1/2})}{x^{1/2}} = 1/2\;\frac{x^{-1/2}dx}{x^{1/2}} = \frac{dx}{2x}$,

oder auch $= d(1/2\,Log.nat.x) = 1/2\,d\,(Log.nat.x) = 1/2\,.\,\frac{dx}{x}$.

$$d\;Log\;nat.\left(\frac{2+x}{x^2}\right) = d\;[Log.\;(2+x) - Log.\;x^2]$$
$$= d\;Log.\;(2+x) - d\;Log.\;(x^2)$$
$$= \frac{dx}{2+x} - 2\,\frac{dx}{x} = -\,\frac{(4+x)\,dx}{x\,(2+x)}.$$

Art. 17. Wenn man die Differenzialformeln des vorigen Artikels umkehrt, ſo ſtößt man, wie folgt, auf andere wichtige Integralformeln.

Aus $d\,(a^x) = \frac{a^x\,dx}{m}$, folgt $\int\frac{a^x\,dx}{m} = a^x$, d. i.

I. $\int a^x\,dx = ma^x = a^x : Log.\;nat.\;a$, und daher

I*). $\int e^x\,dx = e^x$.

Ferner aus $d\,(Log_a\,x) = \frac{m\,dx}{x}$, folgt $\int\frac{m\,dx}{x} = Log._a\,x$, d. i.

II. $\int\frac{dx}{x} = \frac{1}{m}\;Log._a\,x = Log.\;nat.\;x$, und daſſelbe giebt auch die Formel $d\,(Log.\;nat.\;x) = \frac{dx}{x}$.

Hiernach laſſen ſich leicht folgende Beiſpiele berechnen.

$\int e^{5x-1}dx = 1/5\int e^{5x-1}\,d\,(5x-1) = 1/5\;e^{5x-1}$.

$\int\frac{3\,dx}{7x+2} = 3/7\int\frac{d\,(7x+2)}{7x+2} = 3/7\;Log.\;nat.\;(7x+2)$

$$\int\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)dx = \int\left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)dx$$
$$= \int x\,dx + \int dx + 2\int\frac{d\,(x-1)}{x-1} = \frac{x^2}{2} + x + 2\,Log.\;nat.\,(x-1).$$

Digitized by Google

Die erſte Integralformel $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ läßt das letzte Integral unbeſtimmt, denn $m = -1$ geſetzt, folgt

$$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1} dx = \frac{x^0}{0} + \text{eine Conſtante} = \infty + \text{Conſtante};$$

ſetzen wir aber $x = 1 + u$, alſo $dx = du$, ſo erhalten wir

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{1+u} = (1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \ldots)\, du, \text{ und daher}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{1+u} &= \int (1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \ldots)\, du \\ &= \int du - \int u\, du + \int u^2 du - \int u^3 du + \ldots \\ &= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots;\end{aligned}$$

es läßt ſich alſo auch $Log.nat.(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots$, oder

$$\text{III.}\quad Log.nat.x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots$$

ſetzen.

Mit Hülfe dieſer Reihe laſſen ſich die Logarithmen ſolcher Zahlen berechnen, welche wenig von 1 abweichen, hat man aber von größeren Zahlen die Logarithmen zu finden, ſo ſchlage man folgenden Weg ein.

Nimmt man u negativ, ſo giebt die vorletzte Reihe:

$$Log.\,nat.(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} - \ldots;$$

und es folgt nun durch die Subtraction beider Reihen:

$$Log.nat.(1+u) - Log.nat.(1-u) = 2\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \ldots\right), \text{ d. i.}$$

$$Log.\,nat.\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \ldots\right), \text{ oder}$$

$$\frac{1+u}{1-u} = x, \text{ alſo } u = \frac{x-1}{x+1} \text{ geſetzt,}$$

$$\text{IV.}\quad Log.nat.x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\right].$$

Dieſe Reihe iſt auch zur Beſtimmung der Logarithmen von ſolchen Zahlen zu gebrauchen, welche bedeutend von 1 abweichen, da $\frac{x-1}{x+1}$ ſtets unter 1 iſt.

Es iſt auch $Log.(x+y) - Log.x = Log.\left(\frac{x+y}{x}\right) = Log.\left(1+\frac{y}{x}\right)$

$$= \frac{y}{x} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 - \text{ɔc.}$$

$$= 2\left[\frac{y}{2x+y} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^5 + \ldots\right]$$

und daher

V. $$Log.(x+y) = Log.x + 2\left[\frac{y}{2x+y} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + \ldots\right].$$

Dieſe Formel iſt anzuwenden, um aus einem Logarithmen einen nächſt größeren zu berechnen.

Z. B. $Log.nat.2 = 2\left[\frac{2-1}{2+1} + \tfrac{1}{3}\cdot\left(\frac{2-1}{2+1}\right)^3 + \ldots\right]$

$$= 2\,(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{243} + \ldots)$$

$$= 2\left\{\begin{matrix}0{,}33333\\0{,}01234\\0{,}00082\\0{,}00007\end{matrix}\right\} = 2\,.\,0{,}34656 = 0{,}69312,$$

genauer $= 0{,}69314718.$

$Log\ nat.8 = Log.nat.2^3 = 3\,Log.nat.2$ iſt hiernach $= 2{,}0794415,$

und endlich nach der letzten Formel

$$Log.nat.10 = Log.nat.(8+2)$$

$$= Log.\ nat.8 + 2\left[\frac{2}{16+2} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{2}{16+2}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$= 2{,}0794415 + 0{,}2231436 = 2{,}302585.$$

(Vergl. Artikel 14.).

Art. 18 Von praktiſcher Wichtigkeit ſind endlich noch die trigonometriſchen und Kreisfunktionen, weshalb wir deren Differenziale und Integrale ebenfalls noch kennen lernen müſſen.

Die Funktion $y = sin.\,x$ giebt für $x = 0,\ y = 0;$

für $x = \frac{\pi}{4} = \frac{3{,}141}{4} = 0{,}785\ldots\ y = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}707,$

für $x = \frac{\pi}{2},\ y = 1,$ für $x = \pi,\ y = 0;$

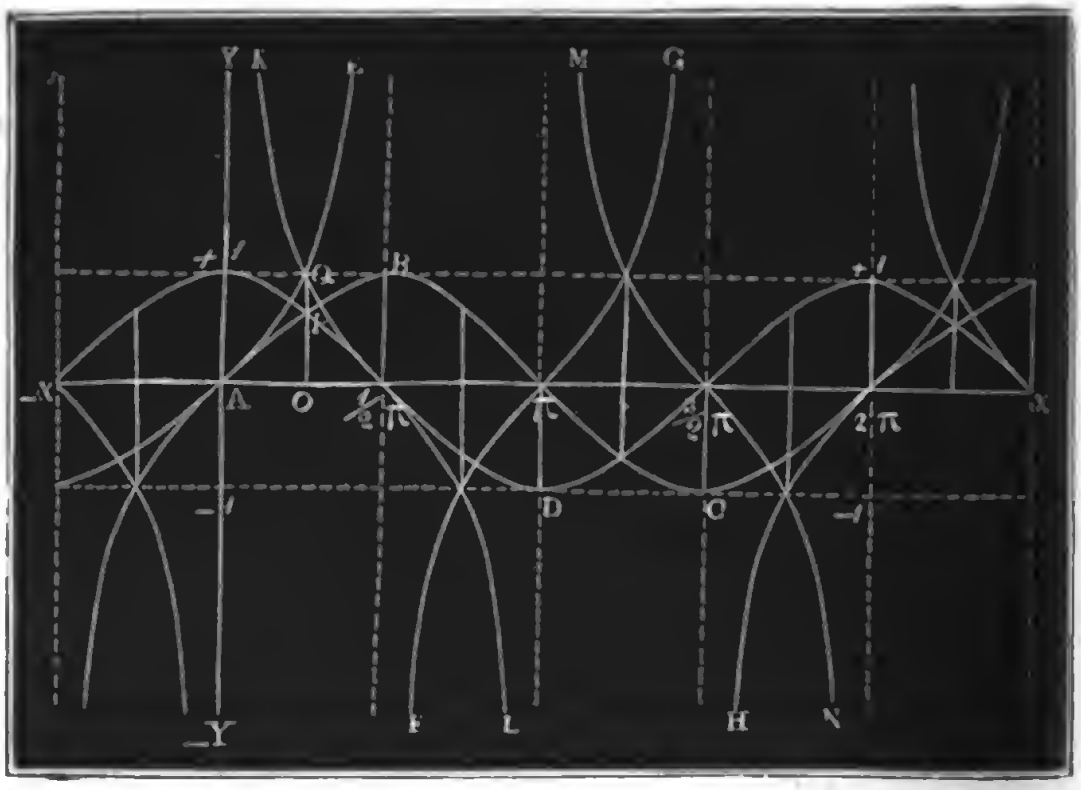
für $x = \tfrac{3}{2}\pi,\ y = -1,$ für $x = 2\pi,\ y = 0$ u. ſ. w..

trägt man daher x als Abſciſſen AO und y als die entſprechenden Ordinaten OP auf, ſo erhält man die ſchlangenförmige Curve ($APBC\ 2\pi$),

Digitized by Google

Fig. 26., welche ſich nach beiden Seiten von A ins Unendliche fortſetzen läßt. Die Funktion $y = cos.x$ giebt für $x = 0$, $y = 1$, für $x = \frac{\pi}{4}$,

Fig. 26.



$y = \sqrt{1/2}$, für $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, für $x = \pi$, $y = -1$, für $x = 3/2\,\pi$, $y = 0$, für $x = 2\pi$, $y = 1$ u. ſ. w.; ihr entſpricht daher genau dieſelbe Schlangenlinie $\left(+\ 1\ P\frac{\pi}{2}\ D\ \frac{3\pi}{2} + 1\right)$ wie der Sinusfunktion, nur iſt dieſelbe auf den Abſciſſenaxen um $1/2\,\pi = 1{,}570\ldots$ weiter vor oder hinter der Sinuscurve.

Ganz anders ſind aber die Curven geſtaltet, welche den Funktionen $y = lang.x$ und $y = cotang.x$ entſprechen. Setzt man in $y = lang.x$, $x = 0$, $1/4\,\pi$, $1/2\,\pi$, ſo erhält man $y = 0, 1, \infty$, und daher eine Curve (AQE), welche ſich einer durch den Theilpunkt $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ der Abſciſſenaxe AX gehenden Parallele zur Ordinatenaxe AY immer mehr und mehr nähert, ohne ſie je zu erreichen. Nimmt man ferner $x = \frac{\pi}{2}$, π, $3/2\,\pi$, ſo erhält man $y = -\infty, 0, +\infty$, und daher eine Curve $(F\pi G)$, die ſich den Parallelen durch $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und $(3/2\,\pi)$ bis ins Unendliche nähert, oder wie man ſagt, dieſe Parallelen zu Aſymptoten hat.

Bei ferneren Annahmen für x wiederholen sich dieselben Werthe von y, und deshalb wird also auch der Funktion $y = tang.\, x$ durch lauter Curven wie $(F \pi G)$, welche um π in der Richtung der Abscissenaxe von einander abstehen, entsprochen.

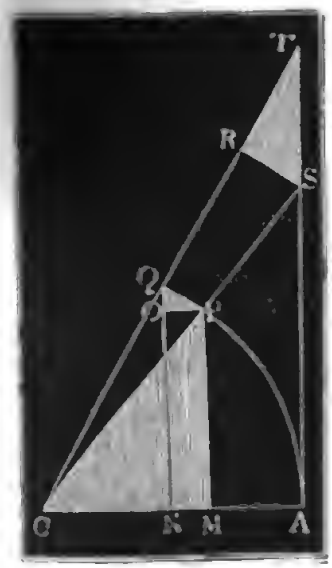
Die Funktion

$y = cotang.\, x$, giebt für $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$; $y = \infty, 1, 0, -\infty$,

daher entspricht derselben eine Curve $(K Q \frac{\pi}{2} L)$, welche von der Tangentencurve nur der Lage nach verschieden ist; auch ist leicht einzusehen, daß noch unendlich viele Curvenzweige, wie z. B. $(M \frac{3\pi}{2} N)$ u. s. w. dieser Funktion angehören.

Art. 49. Die Differenziale der trigonometrischen Linien oder Funktionen ergeben sich durch Betrachtung der Figur 27., in welcher

Fig. 27.



$CA = CP = CQ = 1$, Bog. $AP = x$, $PQ = dx$,

ferner

$PM = sin.\, x$ $CM = cos.\, x$, $AS = tang.\, x$,

endlich

$OQ = NQ - MP = sin.\,(x + dx) - sin.\, x$
$= d\, sin.\, x$,

$OP = -(CN - CM) = -cos.\,(x + dx) - cos.\, x$
$= -\, d\, cos.\, x$, und

$ST = AT - AS = tang.\,(x + dx) - tang.\, x$
$= d\, tang.\, x$ ist.

Da das Bogenelement PQ rechtwinkelig auf dem Halbmesser CP steht, und der Winkel PCA zwischen zwei Linien CP und CA dem Winkel PQO zwischen ihren Perpendikeln PQ und OQ gleich ist, so sind die Dreiecke CPM und QPO einander ähnlich, und es ist:

$$\frac{OQ}{PQ} = \frac{CM}{CP}, \quad \text{d. i.} \quad \frac{d\, sin.\, x}{dx} = \frac{cos.\, x}{1}, \quad \text{daher}$$

I. $d\, sin.\, x = cos.\, x \,.\, dx$; ebenso auch

$$\frac{OP}{PQ} = \frac{PM}{CP}, \quad \text{d. i.} \quad \frac{-\, d\, cos.\, x}{dx} = \frac{sin.\, x}{1}, \quad \text{d. i.}$$

II. $d\,(cos.\, x) = -\, sin.\, x\, dx$.

Man ersieht hieraus, daß kleine Fehler im Bogen oder Winkel auf den Sinus um so mehr Einfluß haben, je größer $cos.\, x$, je kleiner also der Bogen oder Winkel ist, daß dagegen dieselben den Cosinus um so mehr

verändern, je größer $sin.\,x$ ist, je mehr also der Bogen sich $\frac{\pi}{2}$ nähert, und daß endlich das Differenzial des Cosinus das entgegengesetzte Zeichen von dem des Bogens hat, also, wie bekannt, eine Zunahme von x eine Abnahme von $cos.\,x$ liefert, und umgekehrt eine Abnahme von x ein Wachsen von $cos.\,x$ giebt.

Legt man SR rechtwinkelig auf CT, so erhält man ein Dreieck SRT, welches wegen der Gleichheit der Winkel RTS und CQN oder CPM dem Dreiecke CPM ähnlich ist, und weshalb man hat:

$$\frac{ST}{SR} = \frac{CR}{CM}, \quad \text{d. i.} \quad \frac{d\,tang.\,x}{SR} = \frac{1}{cos.\,x}.$$

Nun ist aber auch $\frac{SR}{CS} = \frac{PQ}{CP}$, d. i. $SR = \frac{CS \,.\, dx}{1}$ und

$$CS = secans.\,x = \frac{1}{cos.\,x}, \quad \text{daher} \quad SR = \frac{dx}{cos.\,x} \text{ und}$$

$$\text{III.} \quad d\,(tang.\,x) = \frac{dx}{(cos.\,x)^2}.$$

Führt man statt x, $\frac{\pi}{2} - x$, also statt dx, $d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -dx$ ein, so erhält man

$$d\ tang.\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{dx}{\left[cos.\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]^2}, \quad \text{d. i.}$$

$$\text{IV.} \quad d\,(colg.\,x) = -\frac{dx}{(sin.\,x)^2}.$$

Durch Umkehrung geben diese Formeln für das Differenzial des Bogens:

$$dx = \frac{d\,sin\,x}{cos.\,x} = -\frac{d\,cos.\,x}{sin.\,x} = (cos.\,x)^2\ d\ tang.\,x$$
$$= -(sin.\,x)^2\ d\ cotang.\,x,$$

oder

$$dx = \frac{d\ sin.\,x}{\sqrt{1-(sin.\,x)^2}} = -\frac{d\ cos.\,x}{\sqrt{1-(cos.\,x)^2}} = \frac{d\ tang.\,x}{1+(tang.\,x)^2}$$
$$= -\frac{d\ cotang.\,x}{1+(cotang.\,x)^2}.$$

Bezeichnet man nun $sin.\,x$ durch y, und x durch $arc.\,(sin. = y)$, so erhält man:

$$\text{V.} \quad d\ arc.\,(sin. = y) = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}, \text{ und auf gleiche Weise findet man}$$

$$\text{VI.} \quad d\ arc.\,(cos. = y) = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}, \text{ endlich}$$

VII. $d\ arc.\ (tang. = y) = \frac{dy}{1+y^2}$, ſo wie

VIII. $d\ arc.\ (cotang. = y) = -\frac{dy}{1+y^2}$.

Art. 20. Die letzten Differenzialformeln geben durch Umkehrung folgende Integralformeln

I. $\int cos.x\,dx = sin.x$,

II. $\int sin.x\,dx = -cos.x$,

III. $\int \frac{dx}{cos.x^2} = tang.x$,

IV. $\int \frac{dx}{sin.x^2} = -cotg.x$,

ferner:

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc.\ (sin. = x) = -arc.\ (cos. = x)$,

VI. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arc.\ (tang. = x) = -arc.\ (cotang. = x)$,

und hierzu laſſen ſich leicht noch folgende finden.

Es iſt $d\,(Log.nat.sin.x) = \frac{d\,sin.x}{sin.x} = \frac{cos.x\,.\,dx}{sin.x} = cotg.x\,.\,dx$,

folglich

VII. $\int cotg.x\,dx = Log.nat.sin.x$, ebenſo

VIII. $\int tang.x\,dx = -Log.nat.cos.x$;

ferner $d\,(Log\ nat.tang.x) = \frac{d\,tang.x}{tang.x} = \frac{dx}{cos.x^2\,tang.x}$

$= \frac{dx}{sin.x\ cos.x} = \frac{d\,(2x)}{sin.\,2x}$,

IX. daher $d\,(Log.nat\ tg.\frac{1}{2}x) = \frac{dx}{sin.x}$, und

X. $\int \frac{dx}{sin.x} = Log.\ nat.\ tang.\frac{x}{2}$, ebenſo

XI. $\int \frac{dx}{cos.x} = Log.\ nat.\ tang.\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

$= Log.\ nat.\ cotg.\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

Ferner $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x} = \frac{a(1-x)+b(1+x)}{(1+x)(1-x)}$, geſetzt, folgt $1 = a(1-x)+b(1+x)$. Nimmt man $1+x=0$, alſo $x=-1$, ſo erhält man hiernach $1 = a(1+1)$, daher $a = \frac{1}{2}$, und nimmt man

$1-x=0$, alſo $x=1$, ſo ergiebt ſich $1=2b$, daher $b=\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{1-x^2}=\frac{\frac{1}{2}}{1+x}+\frac{\frac{1}{2}}{1-x}$, endlich aber

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x}$$
$$=\frac{1}{2}\,Log.nat.\,(1+x)-\frac{1}{2}\,Log.nat.\,(1-x),$$

d. i.

XII. $\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\,Log.\,nat.\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, und ebenſo

XIII. $\int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\,Log.\,nat.\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

Endlich iſt

XIV. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=Log.nat.\,(x+\sqrt{1+x^2})$ ſo wie

XV. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=Log.nat.\,(x+\sqrt{x^2-1})$.

Art. 21. Um $arc.\,(tang.=x)=\int\frac{dx}{1+x^2}$ zu finden, darf man nur $\frac{1}{1+x^2}$ durch Diviſion in eine Reihe verwandeln und dann Glied für Glied integriren. Man erhält ſo

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots,\text{ und}$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\int dx-\int x^2\,dx^0+\int x^4dx-\int x^6dx+\ldots,\text{ d. i.}$$

I. $arc.\,(tang.=x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}-\ldots$, z. B.

$\frac{\pi}{4}=arc.\,(tang=1)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$, alſo den Halbkreis $\pi=4\,(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots)$, oder

$\frac{\pi}{6}=arc.\,(tang.=\sqrt{\frac{1}{3}})=\sqrt{\frac{1}{3}}(1-\frac{1}{3}.\frac{1}{3}+\frac{1}{5}.\frac{1}{3^2}-\frac{1}{7}.\frac{1}{3^3}+..)$,

folglich $\pi=6\sqrt{\frac{1}{3}}\,(1-\frac{1}{9}+\frac{1}{45}-\frac{1}{189}+\ldots)=3{,}1415926\ldots$

Auf gleiche Weiſe erhält man aus

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\ldots$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int dx+\frac{1}{2}\int x^2dx+\frac{3}{8}\int x^4dx+\frac{5}{16}\int x^6dx+..,\text{ d. i.}$$

II. $arc.\,(sin.=x)=x+\frac{1x^3}{2.3}+\frac{1.3x^5}{2.4.5}+\frac{1\;3.5x^7}{2.4.6.7}+\ldots$,

z. B. $\frac{\pi}{6} = arc.(sin. = 1/2) = 1/2(1 + 1/24 + 3/640 + 5/7168 + \ldots)$, alſo

$$\pi = 3 \left\{ \begin{matrix} 1{,}04167 \\ 0{,}00468 \\ 0{,}00070 \end{matrix} \right\} = 3{,}141 \ldots$$

Ferner iſt, wenn man

$sin.x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots$ ſetzt,

$$\frac{d(sin.x)}{dx} = cos.x = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + \ldots$$

$$\frac{d(cos.x)}{dx} = -sin.x = 2A_2 + 2.3A_3 x + 3.4A_4 x^2 + \ldots$$

$$-\frac{d(sin.x)}{dx} = -cos.x = 2.3.A_3 + 2.3.4.A_4 x + \ldots$$

$$-\frac{d(cos.x)}{dx} = sin.x = 2.3.4.A_4 + \ldots$$

Nun iſt aber für $x = 0$, $sin.x = 0$, und $cos.x = 1$, daher folgt aus der erſten Reihe $A_0 = 0$, aus der zweiten $A_1 = cos.0 = 1$, aus der dritten $A_2 = 0$, aus der vierten $A_3 = -\frac{1}{2.3}$, aus der fünften $A_4 = 0$ u. ſ. w. und wenn man dieſe Werthe in die fingirte Reihe einſetzt, die Sinusreihe:

III. $$sin.x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{ꝛc.}$$

Auf gleiche Weiſe ergiebt ſich

IV. $$cos.x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ꝛc.,}$$ ferner

V. $$tang.x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3.5} + \frac{17x^7}{3.5.7.3} + \ldots$$ und

VI. $$cotang.x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3.5.3} - \frac{2x^5}{3.5.7.9} - \text{ꝛc.}$$

(Vergl. Ingenieur, Seite 225.)

Art. 22. Iſt $y = f(x)\varphi(x)$, d. i. ein Produkt von zwei Funktionen der Urvariablen x, ſo hat man für das Differenzial

$$dy = f(x + dx)\varphi(x + dx) - f(x)\varphi(x), \text{ oder}$$

$f(x + dx) = f(x) + df(x)$ und $\varphi(x + dx) = \varphi(x) + d\varphi(x)$ ſubſtituirt,

$dy = [f(x) + df(x)][\varphi(x) + d\varphi(x)] - f(x)\varphi(x)$, alſo, wenn man die Multiplication ausführt, und $f(x)\varphi(x)$ gegen $f(x)\varphi(x)$ hebt, $dy = \varphi(x).df(x) + f(x).d\varphi(x) + df(x).d\varphi(x)$, und endlich,

wenn man $df(x) . d\varphi(x)$ als ein Produkt zweier Elemente oder unendlich kleiner Größen aufſallen läßt,

I. $d[f(x)\varphi(x)] = \varphi(x)\,df(x) + f(x)\,d\varphi(x)$.

Z. B. $d(x^2 \,Log.nat.\,x) = Log\ nat.\ x\,.\,d(x^2) + x^2\,d\,Log.nat.\,x$

$= Log.nat.x\,.\,2x\,dx + x^2\,.\,\frac{dx}{x} = (2\,Log\ nat.x + 1)\,x\,dx.$

Ferner

$d[(3x-1)\sqrt{x^2+1}] = \sqrt{x^2+1}\,.\,d(3x-1) + (3x-1)\,d[(x^2+1)^{1/2}]$

$= \sqrt{x^2+1}\ .\ 3\,dx + (3x-1)\ .\ \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2-x+1}{\sqrt{x^2+1}}.2\,dx.$

Umgekehrt giebt dieſe Formel

$d\varphi(x) = \frac{d[f(x)\varphi(x)] - \varphi(x)\,df(x}{f(x)}$, oder $f(x)\varphi(x) = \psi(x)$

und folglich $\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{f\,x)}$ geſetzt,

$$d\varphi(x) = \frac{d\psi(x) - \frac{\psi(x)}{f(x)}\,.\,df(x)}{f(x)}, \text{ d. i.}$$

II. $d\left(\frac{\psi(x)}{f(x)}\right) = \frac{f(x)\,d\psi(x) - \psi(x)\,df(x)}{[f(x)]^2}$.

Z. B. $d\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right) = \frac{(x+2)\,d(x^2-1) - (x^2-1)\,d(x+2)}{(x+2)^2}$

$= \frac{(x+2)\,2x\,dx - (x^2-1)\,dx}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}\,dx.$

Durch Umkehrung der vorletzten Differenzialformel erhält man endlich noch folgende unter dem Namen der Reductionsformel bekannte Integralregel: $f(x)\varphi(x) = \int\varphi(x)\,df(x) + \int f(x)\,d\varphi(x)$, oder

III. $\int\varphi(x)\,df(x) = f(x)\varphi(x) - \int f(x)\,d\varphi(x)$.

Z. B. $\int Log.nat.x\,.\,dx = Log.nat.x\,.\,x - \int x\,.\,d\,Log.nat.x$

$= x\,Log.nat.x - \int\frac{x\,dx}{x} = x\,(Log.nat.x - 1).$

$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \int e^x\,.\,2x\,dx = x^2 e^x - 2\int x\,.\,e^x\,dx$

$= x^2 e^x - 2\,(x\,e^x - \int e^x\,dx) = x^2 e^x - 2\,(x\,e^x - e^x)$

$= (x^2 - 2x + 2)\,e^x.$

Art. 23. Eine Fläche ABC, Fig. 28, welche von einer Curve AB und ihren Coordinaten AC und BC begrenzt wird, läßt ſich durch unendlich viele Ordinaten wie MP, NQ u. ſ. w. in lauter ſtreifenförmige Elemente

von der conſtanten Breite $MN = dx$ und der veränderlichen Länge $MP = y$ zerlegen; ſetzen wir daher dieſen Flächenraum $ABC = F$, ſo haben wir für ſein Element $MNQP$: $dF = y\,dx$,
und daher für ihn ſelbſt: $F = \int y\,dx$.

Z. B. für eine Parabel mit dem Parameter p iſt $y^2 = px$, und daher für die Fläche derſelben

$$F = \int \sqrt{p}x\,dx = \sqrt{p}\int x^{1/2}dx = \frac{\sqrt{p}x^{3/2}}{3/2} = \tfrac{2}{3}x\sqrt{p}x = \tfrac{2}{3}xy.$$

Die Parabelfläche ABC iſt alſo zwei Drittel von dem ſie umſchließenden Rechtecke $ACBD$.

Fig. 28.

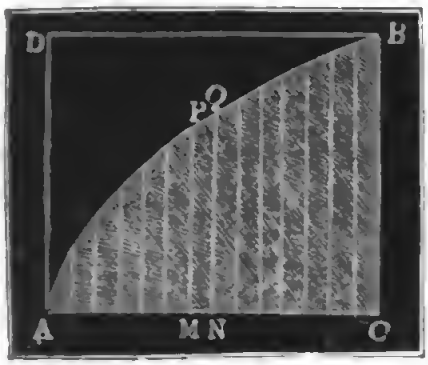
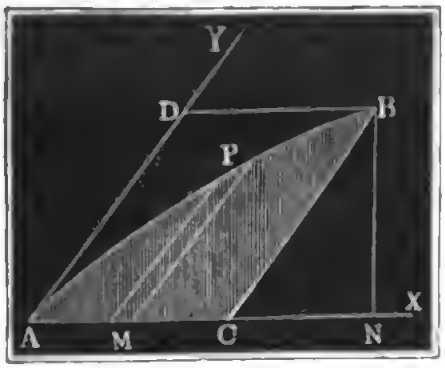
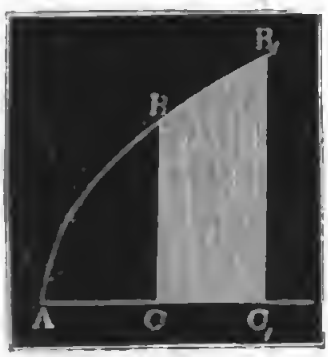


Fig. 29.



Dieſe Formel gilt auch für ſchiefwinkelige, unter einem Winkel α zuſammenſtoßende Coordinaten, z. B. für die Fläche ABC, Fig. 29., wenn nur ſtatt $BC = y$ der Normalabſtand $BN = y\sin.\alpha$ eingeſetzt wird; man hat alſo hier $F = \sin.\alpha\int y\,dx$, z. B. bei der Parabelfläche, wenn die Abſciſſenaxe AX einen Durchmeſſer und die Ordinatenaxe AY eine Tangente der Parabel bildet, alſo $y^2 = p_1x = \frac{px}{\sin.\alpha^2}$ iſt (ſ. Ingenieur Seite 243.), $F = \frac{2}{3}xy\sin.\alpha$, d. i. Fläche $ABC = \frac{2}{3}$ Parallelogramm $ABCD$.

Fig. 30.



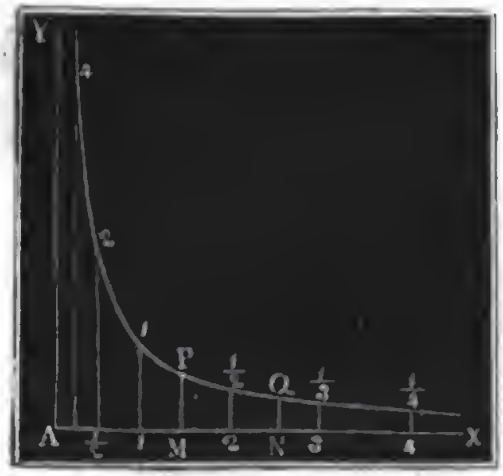
Für eine Fläche $BCC_1B_1 = F$ zwiſchen den Abſciſſen $AC_1 = c_1$ und $AC = c$, Fig. 30., iſt nach Artikel 12, $F = \int_c^{c_1} y\,dx$.

Z. B. für $y = \frac{a^2}{x}$ iſt $F = \int_c^{c_1} \frac{a^2\,dx}{x}$ $= a^2\,(Log.\,nat.\,c_1 - Log.\,nat.\,c)$, d. i. $F = a^2\,Log.\,nat.\left(\frac{c_1}{c}\right)$.

Der Gleichung $\frac{a^2}{x}$ entſpricht die oben in Artikel 3 kennen gelernte Curve PQ, Fig. 31. (ſ. folgd. Seite), und wenn

daher $AN = c_1$ und $AM = c$ iſt, ſo giebt $F = a^2\ Log\ nat.\left(\frac{c_1}{c}\right)$ den Flächenraum von $MNQP$ an. Nimmt man noch der Einfachheit wegen, $a = c = 1$, ſo hat man $F = Log.\ nat.\ x$; es ſind hiernach die Flächenräume $(1\,MP\,1)$, $(1\,NQ\,1)$ u. ſ. w. die natürlichen Logarithmen der Abſciſſen AM, AN u. ſ. w. Die Curve ſelbſt iſt eine ſogenannte gleichſeitige Hyperbel, und die Geraden AX und AY, welchen ſich die Curve immer mehr und mehr nähert, ohne ſie zu erreichen, ſind die Aſymptoten derſelben. Wegen dieſes Zuſammenhanges zwiſchen den Abſciſſen und den Flächenräumen, werden die natürlichen Logarithmen ſehr oft hyperboliſche Logarithmen genannt.

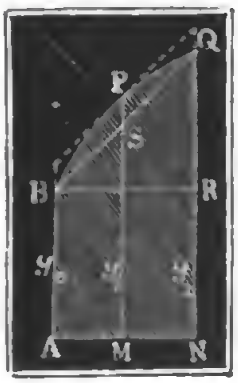
Fig. 31.



Art. 24. Man kann auch jedes Integral $\int y\,dx = \int \varphi(x)\,dx$ gleich dem Inhalte einer Fläche F ſetzen, und wenn ſich nun die Integration durch eine der bekannten Regeln nicht vollziehen läßt, ſo kann man es wenigſtens annähernd finden, wenn man durch Anwendung der bekannten geometriſchen Hülfsmittel den Inhalt des entſprechenden Flächenraumes ausmittelt.

Für eine Fläche $ABQN$, Fig. 32., die durch die Grundlinie $AN = x$ und durch die drei gleich weit von einander abſtehenden Ordinaten $AB = y_0$, $MP = y_1$ und $NQ = y_2$ beſtimmt iſt, hat man den trapezoidalen Theil $ABQN = F_1 = (y_0 + y_2)\,\frac{x}{2}$ und den ſegmentförmigen Theil $BPQS$, wenn man BPQ als Parabel anſieht,

Fig. 32.



$$F_2 = \tfrac{2}{3}PS \,.\, BR = \tfrac{2}{3}(MP - MS) \,.\, AN$$
$$= \tfrac{2}{3}\left(y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}\right)x,$$

daher die ganze Fläche

$$F = F_1 + F_1 = \left[\tfrac{1}{2}(y_0 + y_2) + \tfrac{2}{3}\left(y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}\right)\right] x$$
$$= \left[\tfrac{1}{6}(y_0 + y_2) + \tfrac{2}{3}y_1\right] x = (y_0 + 4y_1 + y_2) \cdot \frac{x}{6}.$$

Führt man eine mittlere Ordinate y ein, und ſetzt $F = xy$, ſo erhält man hiernach für dieſelbe:

$$y = \frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{6}.$$

Um nun hiernach den Inhalt einer Fläche $MABN$, Fig. 33., zu finden, welche über einer gegebenen Grundlinie $MN = x$ ſteht, und durch eine ungerade Anzahl von Ordinaten y_0, y_1, y_2, y_3 . . . y_n beſtimmt iſt, durch dieſe alſo in eine gerade Anzahl von gleich breiten Streifen zerlegt wird, bedarf es nur einer wiederholten Anwendung der letzten Regel. Es iſt die Breite eines Streifens $= \frac{x}{n}$ und hiernach die Fläche

Fig. 33.

des erſten Streifenpaares $= \frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{6} \cdot \frac{2x}{n}$,

» zweiten » $= \frac{y_2 + 4y_3 + y_4}{6} \cdot \frac{2x}{n}$,

» dritten » $= \frac{y_4 + 4y_5 + y_6}{6} \cdot \frac{2x}{n}$ u. ſ. w.;

alſo der Inhalt der erſten ſechs Streifen oder erſten drei Streifenpaare, da hier $n = 6$ iſt:

$$F = (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6) \frac{x}{3.6}$$

$$= [y_0 + y_6 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)] \frac{x}{18};$$

und nun leicht zu ermeſſen, daß der Inhalt einer in vier Streifenpaare zerlegten Fläche

$$F = [y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)] \frac{x}{3.8},$$

und daß allgemein für eine Fläche aus n Streifen

$$F = [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + .. + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + .. + y_{n-2})] \frac{x}{3n} \text{ iſt.}$$

Auch iſt die mittlere Höhe einer ſolchen Fläche

$$y = \frac{y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + .. + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + .. + y_{n-2})}{3n},$$

wobei n ſtets eine gerade Zahl ſein muß.

Dieſe unter dem Namen der Simpſon'ſchen Regel bekannte Formel (ſ. Ingenieur S. 254.) findet ihre Anwendung bei der Beſtimmung eines

Integrales $\int_c^{c_1} y\,dx = \int_c^{c_1} \varphi(x)\,dx$, wenn man $x = c_1 - c$ in eine gerade Anzahl n gleicher Theile theilt, die Ordinaten

$$y_0 = \varphi(c_0),\ y_1 = \varphi\left(c_0 + \frac{x}{n}\right),\ y_2 = \varphi\left(c_0 + \frac{2x}{n}\right),$$

$$y_3 = \varphi\left(c_0 + \frac{3x}{n}\right) \ldots \text{bis } y_n = \varphi(x)$$

berechnet, und dieſe Werthe in die Formel

$$\int_c^{c_1} y\,dx = \int_c^{c_1} \varphi(x)\,dx$$

$$= [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})]\,\frac{c_1 - c}{3n}$$

einſetzt.

Z. B. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ giebt, da hier $c_1 - c = 2 - 1 = 1$ und $y = \varphi(x) = \frac{1}{x}$ iſt, wenn man $n = 6$, alſo $\frac{x}{n} = \frac{c_1 - c}{6} = 1/6$ nimmt,

$y_0 = \frac{1}{1} = 1{,}0000$, $y_1 = \frac{1}{7/6} = 6/7 = 0{,}8571$, $y_2 = \frac{1}{8/6} = 3/4 = 0{,}7500$,

$y_3 = \frac{1}{9/6} = 6/9 = 0{,}6666$, $y_4 = \frac{1}{10/6} = 0{,}6000$, $y_5 = \frac{6}{11} = 0{,}5454$

und $y_6 = 0{,}5000$, daher

$y_0 + y_6 = 1{,}5000$, $y_1 + y_3 + y_5 = 2{,}0692$ und $y_2 + y_4 = 1{,}3500$,

und das geſuchte Integral

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = (1{,}5000 + 4.2{,}0692 + 2.1{,}3500).1/18 = \frac{12{,}4768}{18} = 0{,}69315.$$

Nach Artikel 17. iſt aber $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \textit{Log. nat.}\ 2 - \textit{Log. nat.}\ 1$

$= 0{,}693147$,

alſo die Uebereinſtimmung die erwünſchte.

§. 25. Im Folgenden ſoll noch eine andere Regel mitgetheilt werden, welche auch bei einer ungeraden Anzahl n von Streifen angewendet werden kann. Behandelt man ein ſehr gedrücktes Segment AMB, Fig. 34., als ein Parabelſegment, ſo hat man nach Art. 23. für den Inhalt deſſelben $F = 2/3\,AB.MD$, oder, wenn AT und BT Tangenten an den Enden A und B ſind, und deshalb $CT = 2\,CM$ iſt,

$F = 2/3 \cdot \frac{AB \,.\, TE}{2} = 2/3$ des

Fig. 34.

Dreieckes $ATB = \frac{2}{3}$ des gleichhohen gleichſchenkligen Dreieckes ASB, und alſo auch $= \frac{2}{3} AC \,.\, CS = \frac{2}{3} \overline{AC}^2 \,.\, tang.\, SAC$. Der Winkel $SAC = SBC$ iſt $= TAC + TAS = TBC - TBS$; ſetzt man daher die kleinen Winkel TAS und TBS einander gleich, ſo erhält man für dieſelben

$$TAS = TBS = \frac{TBC - TAC}{2} \text{ und}$$

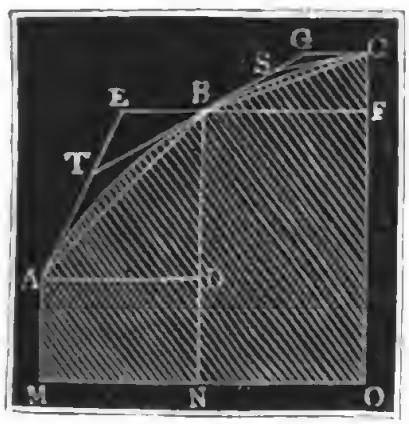
$$SAC = TAC + \frac{TBC - TAC}{2} = \frac{TAC + TBC}{2} = \frac{\delta + \varepsilon}{2},$$

wenn man die Tangentenwinkel TAC und TBC durch δ und ε bezeichnet. Da nun noch $AC = BC = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}$ Sehne s iſt, ſo hat man

$$F = \frac{1}{6} s^2 \, tang. \left(\frac{\delta + \varepsilon}{2}\right).$$

Dieſe Formel läßt ſich nun auch auf das Flächenſtück $MABN$, Fig. 35., anwenden, deſſen Tangentenwinkel $TAD = \alpha$ und $TBE = \beta$ gegeben ſind; ſetzt man nämlich noch den Sehnenwinkel $BAD = ABE = \sigma$, ſo hat man

Fig. 35.



$$TAB = \delta = TAD - BAD = \alpha - \sigma$$

und

$$TBE = \varepsilon = ABE - TBE = \sigma - \beta,$$

daher

$$\delta + \varepsilon = \alpha - \beta$$

und das Segment über AB:

$$F = \frac{1}{6} s^2 \, tang. \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right),$$

oder, wegen der Kleinheit von $\alpha - \beta$,

$$F = \frac{s^2}{12} tang.(\alpha - \beta) = \frac{s^2}{12} \left(\frac{tang.\alpha - tang.\beta}{1 + tang.\alpha \; tang.\beta}\right),$$ oder, wenn α und β nicht bedeutend von einander abweichen und deshalb in $tang.\alpha \; tang.\beta$ ſtatt α und β der Mittelwerth σ eingeſetzt wird,

$$F = \frac{1}{12} s^2 \,.\, \frac{tang.\alpha - tang.\beta}{1 + tang.\sigma^2} = \frac{1}{12} s^2 \, cos.\sigma^2 \, (tang.\alpha - tang.\beta),$$

und alſo ſtatt $s \, cos.\sigma$ die Grundlinie $MN = x$ ſubſtituirt,

$$F = \frac{x^2}{12} (tang.\alpha - tang.\beta),$$

und daher das ganze Flächenſtück $MABN$, wenn y_0 und y_1 deſſen Ordinaten MA und NB bezeichnen:

$$F_1 = (y_0 + y_1) \frac{x}{2} + (tang.\alpha - tang.\beta) \frac{x^2}{12}.$$

Stößt an das vorige Flächenſtück noch ein anderes $NBCO$ mit einer gleichen Grundlinie $NO = x$, den Ordinaten BN und $CO = y_1$ und y_2 und den Tangentenwinkeln $SBF = \beta$ und $SCG = \gamma$, ſo hat man für daſſelbe den Inhalt

$$F_2 = (y_1 + y_2)\,\frac{x}{2} + (tang.\beta - tang.\gamma)\,\frac{x^2}{12},$$

und daher für das Ganze, da ſich $- tang.\beta$ gegen $+ tang.\beta$ hebt,

$$F = F_1 + F_2 = (\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + \tfrac{1}{2}y_2)\,x + (tang.\alpha - tang.\gamma)\,\frac{x^2}{12}.$$

Für eine Fläche aus drei gleichbreiten Streifen iſt ebenſo, wenn α den Tangentenwinkel des Anfangs- und δ den des Endpunktes bezeichnet,

$$F = (\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \tfrac{1}{2}y_3)\,x + (tang.\alpha - tang.\delta)\,\frac{x^2}{12},$$

und allgemein für eine durch die Abſciſſen $\frac{x}{n}$, $\frac{2x}{n}$, $\frac{3x}{n}$ $\ldots$ x, die Ordinaten $y_0, y_1, y_2 \ldots y_n$ und die Tangentenwinkel $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ beſtimmtes Flächenſtück

$$F = (\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n)\frac{x}{n} + \tfrac{1}{12}(tg.\alpha - tg.\alpha_n)\left(\frac{x}{n}\right)^2.$$

Ein Integral

$$\int_c^{c_1} y\,dx = \int_c^{c_1} \varphi(x)\,dx$$

$$= (\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n)\,\frac{x}{n} + \tfrac{1}{12}(tg.\alpha - tg.\alpha_n)\left(\frac{x}{n}\right)^2$$

wird hiernach gefunden, wenn man $x = c_1 - c$ ſetzt,

$$y_0 = \varphi(c),\quad y_1 = \varphi\left(c + \frac{x}{n}\right),\quad y_2 = \varphi\left(c + \frac{2x}{n}\right),$$

$$y_3 = \varphi\left(c + \frac{3x}{n}\right) \ldots y_n = \varphi(c_1),$$

ſo wie $tang.\alpha = \frac{dy}{dx} = \psi(x)$, $= \psi(c)$ und $tang.\alpha_n = \psi(c_1)$ berechnet, und dieſe Werthe in dieſe Gleichung einſetzt.

Z. B. für $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ hat man, wenn $n = 6$ angenommen wird, da hier $x = c_1 - c = 2 - 1 = 1$ und $y = \varphi(x) = \frac{1}{x}$ iſt,

$y_0 = \frac{1}{c} = 1$, $y_1 = \frac{1}{1 + 1/6} = 6/7$, $y_2 = 6/8$, $y_3 = 6/9$, $y_4 = 6/10$, $y_5 = 6/11$ und $y_6 = 6/12$, ferner da ſich $\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^{-1})}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ herausſtellt, $tang.\alpha = -1/1 = -1$ und $tang.\beta = -1/2^2 = -1/4$, und daher iſt

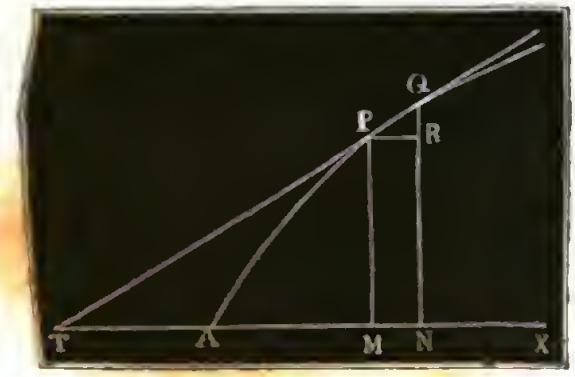
$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = (1/2 + 6/7 + 6/8 + 6/9 + 6/10 + 6/11 + 1/4) \cdot 1/6 + (-1 + 1/4) \cdot 1/12 \cdot 1/36$$

$$= \frac{4{,}1692}{6} - 3/4 \cdot 1/12 \cdot 1/36 = 0{,}69487 - 0{,}00173 = 0{,}69314.$$

(Vergleiche das Beiſpiel des vorigen Artikels.)

§. 26. Aus der Gleichung $y = f(x)$ zwiſchen den Coordinaten $AM = x$ und $MP = y$ (Fig. 36.) einer Curve muß ſich auch eine Gleichung zwiſchen dem Bogen $AP = s$ und der einen oder der anderen der beiden Coordinaten ableiten laſſen. Läßt man x um $MN = PR = dx$ wachſen, ſo nimmt y um $RQ = dy$ und s um das Element $PQ = ds$ zu, und es iſt dem Pythagoräiſchen Lehrſatze zu Folge

Fig. 36.



$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{QR}^2$, d. i. $ds^2 = dx^2 + dy^2$, alſo

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, und hiernach der Curvenbogen ſelbſt

$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Z. B. für die Neil'ſche Parabel (ſ. Fig. 15.), deren Gleichung $ay^2 = x^3$ iſt, hat man $2ay\,dy = 3x^2\,dx$, daher

$$dy = \frac{3x^2\,dx}{2ay} \text{ und } dy^2 = \frac{9x^4\,dx^2}{4a^2y^2} = \frac{9x\,dx^2}{4a},$$

hiernach $ds^2 = \left(1 + \frac{9x}{4a}\right) dx^2$ und

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{9x}{4a}}\,dx = \frac{4a}{9} \int \left(1 + \frac{9x}{4a}\right)^{1/2} d\left(\frac{9x}{4a}\right)$$

$$= \frac{4a}{9} \int u^{1/2}\,du = \frac{4a}{9}\, 2/3\, u^{3/2} = 8/27\, a \sqrt{\left(1 + \frac{9x}{4a}\right)^3}.$$

Um die hierzu nöthige Conſtante zu finden, wollen wir s mit x und y zugleich anfangen laſſen. Wir erhalten dann

$0 = 8/27\, a \sqrt{1^3} + Con.$, alſo $Con. = -8/27\, a$ und

$$s = 8/27\, a \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9x}{4a}\right)^3} - 1\right],$$

z. B. für das Stück AP, deſſen Abſciſſe $x = a$ iſt,

$$s = 8/27\, a \left[\sqrt{(13/4)^3} - 1\right] = 1{,}736\, a.$$

Führt man noch den Tangentenwinkel $QPR = PTM = \alpha$ (Fig. 36.) ein, ſo hat man auch

Digitized by Google

$QR = PQ.sin.QPR$ und $PR = PQ\,cos.QPR$, d. i.

$dy = ds\,sin.\alpha$ und $dx = ds\,cos.\alpha$,

und also außer $tang.\alpha = \frac{dy}{dx}$ (s. Art. 5.) auch

$$sin.\alpha = \frac{dy}{ds} \text{ und } cos.\alpha = \frac{dx}{ds};$$ so wie noch

$$s = \int \sqrt{1 + tang.\alpha^2}\,.\,dx = \int \frac{dy}{sin.\alpha} = \int \frac{dx}{cos.\alpha}.$$

Ist nun die Gleichung zwischen zwei der Größen x, y, s und α gegeben, so kann man hiernach auch Gleichungen zwischen je zwei anderen dieser Größen finden. Ist z. B. $cos.\alpha = \frac{s}{\sqrt{c^2+s^2}}$, so hat man

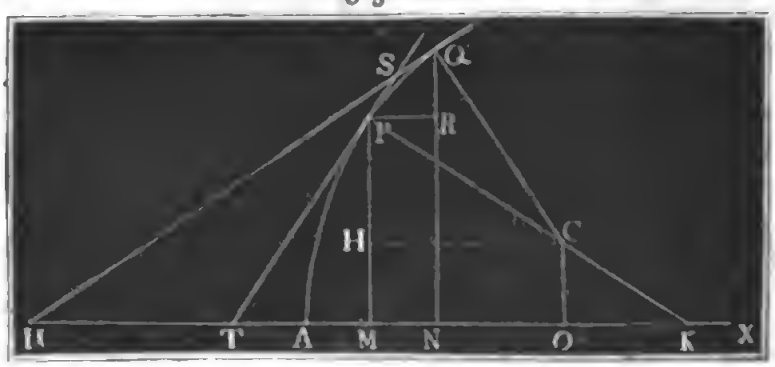
$$dx = ds\,cos.\alpha = \frac{s\,ds}{\sqrt{c^2+s^2}} \text{ und}$$

$$x = \int \frac{s\,ds}{\sqrt{c^2+s^2}} = \tfrac{1}{2}\int \frac{2s\,ds}{\sqrt{c^2+s^2}} = \tfrac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \tfrac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du = u^{\frac{1}{2}}du$$

$= \sqrt{c^2+s^2} + Con.$, und wenn nun x und s zugleich Null sind, $x = \sqrt{c^2+s^2} - c$.

§. 27. Eine Gerade winkelrecht zur Tangente PT, Fig. 37., ist auch normal zur Berührungsstelle P der Curve, weil die Tangente die Richtung

Fig. 37.



dieser Stelle angiebt. Das Stück PK dieser Linie vom Berührungspunkte P bis Abscissenaxe, heißt Normale schlechtweg, und die Projection MK desselben in der Abscissenaxe Subnormale. Für die letztere hat man, da der Winkel MPK dem Tangentenwinkel $PTM = \alpha$ gleich ist, $MK = MP\,.\,tang.\alpha$, d. i.

$$Subnormale = y\,tang.\alpha = y\,\frac{dy}{dx}.$$

z. B. für die Parabel, wo $y^2 = px$, also $dy = \frac{p\,dx}{2y}$ ist,

$$Subnormale = y\,\frac{p}{2y} = \frac{p}{2};$$ also constant.

Errichtet man ferner in einem zweiten, dem P unendlich nahen Punkte Q eine andere Normallinie QC, ſo erhält man in dem Durchſchnittspunkte C zwiſchen beiden ein Centrum für einen durch beide Berührungspunkte P und Q zu beſchreibenden Kreis, den ſogenannten Krümmungskreis, und es ſind die Stücke CP und CQ der Normallinien die Halbmeſſer dieſes Kreiſes oder die ſogenannten Krümmungshalbmeſſer. Jedenfalls iſt dieſer Kreis derjenige unter allen durch P und Q zu legenden Kreiſen, welcher ſich am meiſten an das Curvenelement PQ anſchmiegt, und deshalb anzunehmen, daß ſein Bogen PQ mit dem Curvenelemente PQ zuſammenfalle.

Bezeichnen wir den Krümmungshalbmeſſer $CP = CQ$ durch r, den Curvenbogen AP durch s, alſo ſein Element PQ durch ds, und den Tangentenwinkel oder Bogen von PTM durch α, alſo ſein Element $SUM - STM$, d. i. $- UST = - PCQ$, durch $d\alpha$, ſo haben wir einfach, da $PQ = CP$. Bog. des Winkels PCQ iſt, $ds = - r\,d\alpha$, und folglich den Krümmungshalbmeſſer $r = - \frac{ds}{d\alpha}$.

Gewöhnlich läßt ſich α nur mittels der Coordinatengleichung beſtimmen, indem man ſetzt $tang\ \alpha = \frac{dy}{dx}$. Nun iſt aber noch $d\,tang.\alpha = \frac{d\alpha}{cos.\alpha^2}$ und $cos.\ \alpha = \frac{dx}{ds}$, daher hat man

$$d\alpha = cos.\alpha^2 \,.\, d\ tang.\ \alpha = \frac{dx^2}{ds^2} \,.\, d\ tang.\ \alpha, \text{ und}$$

$$r = - \frac{ds^3}{dx^2\, d\ tang.\ \alpha}.$$

Durch Umkehrung dieſer Formeln kann man auch wohl die Curve ſelbſt rectificiren, alſo s ſelbſt finden.

Für die Coordinaten $AO = u$ und $OC = v$ des Krümmungsmittelpunktes C hat man

$u = AM + HC = x + CP\,sin\ CPH$, d. i.

$u = x + r\ sin.\ \alpha$, ſo wie

$v = OC = MP - HP = y - CP\ cos.\ CPH$, d. i.

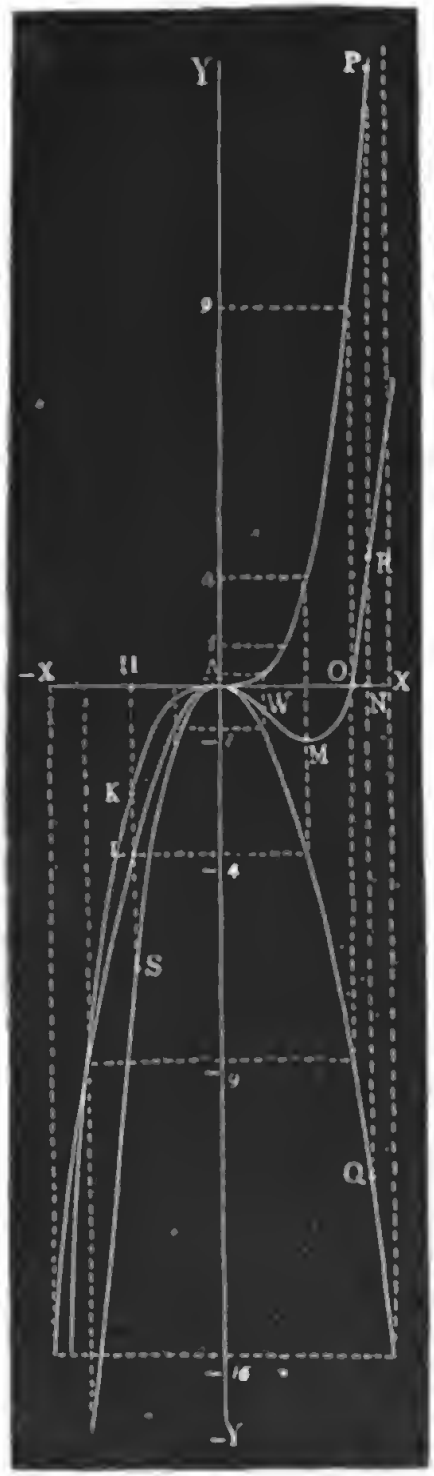
$v = y - r\ cos.\ \alpha$.

Die ſtetige Folge der Krümmungsmittelpunkte giebt eine Curve, welche die Evolute von AP genannt wird, und deren Lauf durch die Coordinaten u und v beſtimmt wird.

§. 28. Viele Funktionen, welche in der Anwendung auf die Praxis vorkommen, laſſen ſich aus den oben kennen gelernten Hauptfunktionen $y = x^m$, $y = e^x$ und $y = sin.\ x$, $y = cos.\ x$ u. ſ. w. zuſammenſetzen, und ſind daher auch die Eigenſchaften, entſprechend der Tangenten-

lage, Quadratur, Krümmungshalbmeſſer u. ſ. w. leicht mit Hülfe der vorſtehenden Lehren aufzuſuchen, ſo wie auch die entſprechenden Curven zu conſtruiren, wie folgendes Beiſpiel zeigen wird.

Fig. 38.



Die Gleichung ſei

$$y = x^2\left(\frac{x}{3} - 1\right) = \frac{x^3}{3} - x^2.$$

Für ſie iſt $dy = (x^2 - 2x)\,dx$, folglich $tang.\alpha = \frac{dy}{dx} = x^2 - 2x$, daher die Tangente der Abſciſſenaxe parallel, für $x^2 = 2x$, d. i. $x = 0$ und $x = 2$, ferner iſt $d\,tang.\alpha = 2(x-1)\,dx$, und daher für $x = 1$ und $y = 1/3 - 1 = -2/3$ ein Wendepunkt. Ferner iſt noch

$$ds^2 = dx^2 + (x^2 - 2x)^2\,dx^2$$
$$= [1 + (x^2 - 2x)^2]\,dx^2,$$

und daher der Krümmungshalbmeſſer der Curve: $r = -\frac{[1+(x^2-2x)^2]^{3/2}}{2(x-1)}$, z. B. für $x = 0$, $r = \frac{-1}{-2} = 1/2$, für $x = 1$, $r = \infty$, für $x = 2$, $r = -1/2$, $x = 3$, $r = -7{,}905$ u. ſ. w.

Die entſprechende Curve führt Fig. 38. vor Augen. Es iſt $X\overline{X}$ die Abſciſſen- und $Y\overline{Y}$ die Ordinatenaxe, A aber der Anfangs- oder Nullpunkt. Durch dieſen geht nicht nur die Curve KAP, welche der Gleichung $y_1 = \frac{x^3}{3}$ entſpricht, ſondern auch die Curve LAQ, welche der Gleichung $y_2 = -x^2$ angehört. Da $y = \frac{x^3}{3} - x^2$, ſo findet man einen Punkt R der Curve, welcher dieſer Gleichung entſpricht, wenn man $y_2 = NQ$ von $y_1 = NP$ abzieht, alſo $NR = NP - NQ$ macht. Dies an vielen Stellen ausgeführt, erhält man die geſuchte Curve $SAWMOR$, welche bei W einen Wendungspunkt hat, bei A und O die Abſciſſenaxe trifft, und bei A und M parallel mit dieſer Axe läuft.

Art. 29. Wenn für eine Funktion $y = \alpha u + \beta v$ eine Reihe von zuſammengehörigen Werthen der Variablen u, v und y durch Beobachtung oder Meſſung gefunden worden ſind, ſo kann man nach denjenigen Werthen der Conſtanten α und β fragen, welche von den kleinen zufälligen und unregelmäßigen Beobachtungs- oder Meſſungsfehlern möglichſt befreit ſind und daher auch den Zuſammenhang zwiſchen den Größen u, v und y, wovon u und v auch bekannte Funktionen einer und derſelben Variablen x bedeuten können, möglichſt genau ausdrücken. Unter allen Regeln, welche man zur Beantwortung dieſer Frage, d. i. zur Ausmittelung der möglich oder wahrſcheinlich richtigſten Werthe der Conſtanten anwendet, iſt die ſogenannte Methode der kleinſten Quadrate die allgemeinſte und wiſſenſchaftlich begründetſte.

Sind $\left\{\begin{array}{lll} u_1, & v_1, & y_1 \\ u_2, & v_2, & y_2 \\ u_3, & v_3, & y_3 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ u_n, & v_n, & y_n \end{array}\right\}$ die der Funktion $y = \alpha u + \beta v$ entſprechenden Reſultate der Beobachtung, ſo hat man für die Beobachtungsfehler und deren Quadrate folgende Werthe:

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = y_1 - (\alpha u_1 + \beta v_1) \\ z_2 = y_2 - (\alpha u_2 + \beta v_2) \\ z_3 = y_3 - (\alpha u_3 + \beta v_3) \\ . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \\ z_n = y_n - (\alpha u_n + \beta v_n) \end{array}\right\} \text{ und}$$

$$\left\{\begin{array}{l} z_1^2 = y_1^2 - 2\alpha u_1 y_1 - 2\beta v_1 y_1 + \alpha^2 u_1^2 + 2\alpha\beta u_1 v_1 + \beta^2 v_1^2 \\ z_2^2 = y_2^2 - 2\alpha u_2 y_2 - 2\beta v_2 y_2 + \alpha^2 u_2^2 + 2\alpha\beta u_2 v_2 + \beta^2 v_2^2 \\ z_3^2 = y_3^2 - 2\alpha u_3 y_3 - 2\beta v_3 y_3 + \alpha^2 u_3^2 + 2\alpha\beta u_3 v_3 + \beta^2 v_3^2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ z_n^2 = y_n^2 - 2\alpha u_n y_n - 2\beta v_n y_n + \alpha^2 u_n^2 + 2\alpha\beta u_n v_n + \beta^2 v_n^2 \end{array}\right\},$$

und erhält nun für die Summe der Fehlerquadrate, wenn man ſich der Abkürzung wegen des Summationszeichens Σ bedient, um eine Summation

gleichartiger Größen anzuzeigen, alſo $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2 = \Sigma(y^2)$, $v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + \ldots + v_n y_n = \Sigma(vy)$ ſetzt, u. ſ. w.

$$\Sigma(z^2) = \Sigma(y^2) - 2\alpha\Sigma(uy) - 2\beta\Sigma(vy) + \alpha^2\Sigma(u^2) + 2\alpha\beta\Sigma(uv) + \beta^2\Sigma(v^2).$$

In dieſer Gleichung ſind natürlich außer der als Abhängigvariablen zu behandelnden Fehlerquadratſumme $\Sigma(z^2)$ nur die hier als Urvariabele anzuſehenden Conſtanten α und β der Funktion $y = \alpha u + \beta v$ unbekannt. Die Methode der kleinſten Quadrate fordert nun, ſowohl α als auch β ſo zu wählen, daß die Quadratſumme $\Sigma(z^2)$ zum Minimum werde; und deshalb müſſen wir die gewonnene Funktion für $\Sigma(z^2)$ ein Mal in Beziehung auf α und ein Mal in Beziehung auf β differenziiren, und jeden der ſich herausſtellenden Differenzialquotienten von $\Sigma(z^2)$ gleich Null ſetzen. Dadurch ſtößt man auf folgende zwei Beſtimmungsgleichungen für α und β

$$-\Sigma(uy) + \alpha\Sigma(u^2) + \beta\Sigma(uv) = 0,$$
$$-\Sigma(vy) + \beta\Sigma(v^2) + \alpha\Sigma(uv) = 0;$$

deren Auflöſung auf folgende Ausdrücke führt:

$$\alpha = \frac{\Sigma(v^2)\Sigma(uy) - \Sigma(uv)\Sigma(vy)}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - \Sigma(uv)\Sigma(uv)} \text{ und}$$

$$\beta = \frac{\Sigma(u^2)\Sigma(vy) - \Sigma(uv)\Sigma(uy)}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - \Sigma(uv)\Sigma(uv)}.$$ (Vgl. Ingenieur, S. 131.)

Dieſe Formeln gehen für eine Funktion $y = \alpha + \beta v$, da hier $u = 1$, alſo $\Sigma(uv) = \Sigma(v)$, $\Sigma(uy) = \Sigma(y)$ und $\Sigma(u^2) = 1+1+1+\ldots = n$, d. i. die Anzahl der Gleichungen oder Beobachtungen iſt, in folgende über:

$$\alpha = \frac{\Sigma(v^2)\,\Sigma(y) - \Sigma(v)\,\Sigma(vy)}{n\Sigma(v^2) - \Sigma(v)\Sigma(v)},$$

$$\beta = \frac{n\Sigma(vy) - \Sigma(v)\Sigma(y)}{n\Sigma(v^2) - \Sigma(v)\Sigma(v)}.$$

Für die noch einfachere Funktion $y = \beta v$, wo $\alpha =$ Null iſt erhält man

$$\beta = \frac{\Sigma(vy)}{\Sigma(v^2)},$$

und endlich für den einfachſten Fall $y = \alpha$, wo es ſich alſo um die Ausmittelung des wahrſcheinlichſten Werthes einer einzigen Größe handelt, iſt

$$\alpha = \frac{\Sigma(y)}{n},$$

alſo dieſer Werth das arithmetiſche Mittel aus allen durch Meſſung oder Beobachtung gefundenen Werthen.

Beiſpiel. Um das Geſetz einer gleichförmig beſchleunigten Bewegung, d. i. deren Anfangsgeſchwindigkeit c und Beſchleunigungsmaaß p kennen zu lernen, hat man die verſchiedenen Zeiten t_1, t_2, t_3 u. ſ. w. entſprechenden Räume s_1, s_2, s_3 u. ſ. w. gemeſſen, und dabei Folgendes gefunden:

Zeiten:	0	1	3	5	7	10 Sec.
Räume:	0	5	20	38	58½	101 Fuß.

Iſt nun $s = ct + \frac{pt^2}{2}$ das dieſer Bewegung zu Grunde liegende Bewegungsgeſetz, ſo handelt es ſich um die Ermittelung der Conſtanten c und p. Setzt man in die obigen Formeln $u = t$ und $v = t^2$, ſowie $\alpha = c$, $\beta = \frac{p}{2}$ und $y = s$, ſo erhält man zur Berechnung von c und p folgende Formeln:

$$c = \frac{\Sigma(t^4)\Sigma(st) - \Sigma(t^3)\Sigma(st^2)}{\Sigma(t^2)\Sigma(t^4) - \Sigma(t^3)\Sigma(t^3)} \text{ und}$$

$$\frac{p}{2} = \frac{\Sigma(t^2)\Sigma(st^2) - \Sigma(t^3)\Sigma(st)}{\Sigma(t^2)\Sigma(t^4) - \Sigma(t^3)\Sigma(t^3)},$$

wonach ſich folgende Rechnung führen läßt.

t	t^2	t^3	t^4	s	st	st^2
1	1	1	1	5	5	5
3	9	27	81	20	60	180
5	25	125	625	38	190	950
7	49	343	2401	58,5	409,5	2866,5
10	100	1000	10000	101	1010	10100
Summen	184 $= \Sigma(t^2)$	1496 $= \Sigma(t^3)$	13108 $= \Sigma(t^4)$	222,5 $= \Sigma(s)$	1674,5 $= \Sigma(st)$	14101,5 $= \Sigma(st^2)$.

Hieraus beſtimmt ſich

$$c = \frac{13108 \cdot 1674{,}5 - 1496 \cdot 14101{,}5}{184 \cdot 13108 - 1496 \cdot 1496} = \frac{85340}{17386} = 4{,}908 \text{ Fuß und}$$

$$\tfrac{1}{2}p = \frac{184 \cdot 14101{,}5 - 1496 \cdot 1674{,}5}{184 \cdot 13108 - 1496 \cdot 1496} = \frac{89624}{173860} = 0{,}5155 \text{ Fuß},$$

und daher folgende Formel für die beobachtete Bewegung

$$s = 4{,}908t + 0{,}5155 \cdot t^2.$$

Nach dieſer Formel hat man

für die Zeiten:	0	1	3	5	7	10 Sec.
die Räume:	0	5,43	19,36	37,43	59,62	100,63 Fuß.

Die allgemeinen Lehren der Mechanik.

Erſter Abſchnitt.

Phoronomie oder rein mathematiſche Bewegungslehre.

Erſtes Kapitel.

Die einfache Bewegung.

§. 1. Jeder Körper nimmt im Raume einen gewiſſen Ort ein, und ein Körper iſt in Ruhe (franz. repos, engl. rest), wenn er ſeinen Ort nicht ändert; er iſt hingegen in Bewegung (fr. mouvement, engl. motion), wenn er aus einem Orte nach und nach in andere übergeht. Ruhe und Bewegung eines Körpers ſind entweder abſolut oder relativ, je nachdem man den Ort deſſelben auf einen Raum bezieht, der ſelbſt in Ruhe oder in Bewegung iſt, oder darin gedacht wird. Ruhe und Bewegung.

Auf der Erde giebt es keine Ruhe, denn alle Körper auf der Erde nehmen an ihrer Bewegung um die Sonne und um ihre eigene Axe Antheil; denken wir uns aber die Erde in Ruhe, ſo ſind für uns auch alle diejenigen Erdkörper in Ruhe, welche ihren Ort in Beziehung auf die Erde nicht ändern.

§. 2. Die ſtetige Folge von Oertern, welche ein Körper in ſeiner Bewegung nach und nach einnimmt, bildet einen Raum, den man den Weg (franz. chemin, trajectoire, engl. way, trajectory) des bewegten Körpers nennt. Der Weg eines bewegten Punktes iſt eine Linie. Der Weg eines geometriſchen Körpers iſt zwar wieder ein Körper, man verſteht aber unter demſelben gewöhnlich diejenige Linie, welche ein gewiſſer Punkt, z. B. der Mittelpunkt des Körpers, bei der Bewegung beſchreibt. Bewegungsarten.

Eine Bewegung iſt geradlinig (franz. rectiligne, engl. rectilinear), wenn ihr Weg in einer geraden Linie beſteht; ſie iſt aber krummlinig (franz. curviligne, engl. curvilinear), wenn der Weg des bewegten Körpers eine krumme Linie iſt.

In Beziehung auf Zeit (franz. temps, engl. time) iſt die Bewegung entweder gleichförmig oder ungleichförmig.

§. 3. Eine Bewegung iſt gleichförmig (fr. uniforme, engl. uniform), wenn durch dieſelbe in gleichen und beliebig kleinen Zeittheilchen gleiche

Bewegungsarten

Wege zurückgelegt werden; ſie iſt ungleichförmig (franz. varié, engl. variable), wenn dieſe Gleichheit nicht ſtatt hat. Werden mit dem Ablaufen der Zeit die in gleichen Zeittheilchen durchlaufenen Räume immer größer und größer, ſo heißt die ungleichförmige Bewegung beſchleunigt (franz. accéléré, engl. increasing), nehmen dieſe aber immer mehr und mehr ab, ſo heißt ſie verzögert (franz. retardé, engl. decreasing).

Von der gleichförmigen Bewegung iſt die periodiſche Bewegung (franz. périodique, engl. periodic) dadurch unterſchieden, daß bei dieſer nur innerhalb gewiſſer gleicher Zeiträume, die man Perioden nennt, gleiche Räume durchlaufen werden.

Das beſte Beiſpiel der gleichförmigen Bewegung giebt die ſcheinbare tägliche Umdrehung des Fixſternhimmels; nächſtdem das Fortrücken der Zeiger einer Uhr. Beiſpiele der ungleichförmigen Bewegung geben fallende und in die Höhe geworfene Körper, der ſinkende Waſſerſpiegel beim Ausfluß des Waſſers aus Gefäßen u. ſ. w. Für die periodiſche Bewegung findet man Beiſpiele an den Pendelſchwingungen, an den Kolbenſpielen einer Dampfmaſchine u. ſ. w.

Gleichförmige Bewegung.

§. 4. Geſchwindigkeit (franz. vitesse, engl. velocity) iſt die Stärke oder Größe einer Bewegung. Je größer der Raum iſt, welchen ein Körper innerhalb einer gewiſſen Zeit durchläuft, deſto ſtärker iſt auch ſeine Bewegung, oder deſto größer iſt auch ſeine Geſchwindigkeit. Bei einer gleichförmigen Bewegung iſt die Geſchwindigkeit unveränderlich, bei einer ungleichförmigen Bewegung hingegen ändert ſie ſich in jedem Augenblicke. Das Maaß der Geſchwindigkeit in einem gewiſſen Zeitpunkte iſt der Weg, den der Körper von dieſem an innerhalb der Zeiteinheit oder Secunde entweder wirklich zurücklegt oder zurücklegen würde, wenn von dieſem Augenblicke oder Zeitpunkte an die Bewegung in eine gleichförmige überginge, alſo die Geſchwindigkeit unveränderlich bliebe. Gewöhnlich nennt man dieſes Maaß ſchlechtweg Geſchwindigkeit.

§. 5. Wenn ein Körper in jedem Zeittheilchen den Weg σ durchläuft, und die Zeitſecunde aus n (ſehr vielen) ſolchen Zeittheilchen beſteht, ſo iſt der Weg innerhalb einer Secunde die Geſchwindigkeit oder vielmehr das Geſchwindigkeitsmaaß:

$$c = n . \sigma.$$

Im Laufe einer Zeit t (Secunden) verfließen $n.t$ Zeittheilchen, in jedem wird aber der Raum σ zurückgelegt, es iſt daher der ganze Weg (franz. l'espace, engl. the space), welcher der Zeit t entſpricht:

$$s = n.t.\ \sigma = n.\sigma.t, \text{ d. i.}$$

$$1.\ s = ct.$$

Bei der gleichförmigen Bewegung iſt alſo der Raum (s) ein Product aus Geſchwindigkeit (c) und Zeit (t).

Umgekehrt ist: Gleichförmige Bewegung.

$$\text{II. } c = \frac{s}{t} \text{ und III. } t = \frac{s}{c}.$$

Beispiele: 1) Ein Dampfwagen, welcher mit einer Geschwindigkeit von 30 Fuß fortrollt, legt in 2 Stunden = 120 Minuten = 7200 Secunden den Weg (s) von $30 . 7200 = 216000$ Fuß zurück. 2) Wenn zum Herausziehen einer Tonne aus einem 1200 Fuß tiefen Schachte eine Zeit von $4\frac{1}{2}$ Minuten = 270 Secunden nöthig ist, so hat man die mittlere Geschwindigkeit dieses Fördergefäßes (v) $= \frac{1200}{270} = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9} = 4{,}444\ldots$ Fuß anzunehmen. 3) Ein Pferd, welches sich mit 6 Fuß Geschwindigkeit fortbewegt, braucht zum Zurücklegen eines Weges von einer Meile oder 24000 Fuß eine Zeit von $\frac{24000}{6} = 4000$ Secunden oder 1 Stunde 6 Minuten und 40 Secunden.

§. 6. Vergleicht man zwei verschiedene gleichförmige Bewegungen mit einander, so stößt man auf Folgendes:

Die Räume sind $s = ct$ und $s_1 = c_1 t_1$, es ist daher ihr Verhältniß $\frac{s}{s_1} = \frac{ct}{c_1 t_1}$. Setzt man nun $t_1 = t$, so hat man $\frac{s}{s_1} = \frac{c}{c_1}$; nimmt man $c_1 = c$, so erhält man $\frac{s}{s_1} = \frac{t}{t_1}$; ist endlich $s_1 = s$, so folgt $\frac{c}{c_1} = \frac{t_1}{t}$.

Die in gleichen Zeiten durchlaufenen Räume verhalten sich also bei verschiedenen gleichförmigen Bewegungen wie die Geschwindigkeiten; die mit gleichen Geschwindigkeiten zurückgelegten Wege dagegen wie die Zeiten; die gleichen Räumen entsprechenden Geschwindigkeiten sind endlich den Zeiten umgekehrt proportional.

§. 7. Eine Bewegung ist gleichförmig verändert (franz. uniformément varié, engl. uniformly variable), wenn ihre Geschwindigkeit innerhalb gleicher, beliebig kleiner Zeittheilchen um gleichviel zu- oder abnimmt. Sie ist entweder gleichförmig beschleunigt (franz. uniformément accéléré, engl. uniformly accelerated), oder gleichförmig verzögert (franz. uniformément retardé, engl. uniformly retarded); im ersten Falle findet ein allmäliges Wachsthum, im zweiten ein Abnehmen an Geschwindigkeit Statt. Gleichförmig veränderte Bewegung.

Gleichförmig beschleunigt fällt ein Körper im luftleeren Raume, gleichförmig verzögert würde das Steigen senkrecht in die Höhe geworfener Körper erfolgen, wenn die Luft keinen Einfluß auf den Körper ausübte.

§. 8. Die Stärke oder Größe der Veränderung in der Geschwindigkeit eines Körpers heißt Acceleration oder Beschleunigung (franz. accélération, engl. acceleration); sie ist entweder positiv (Beschleunigung) oder negativ (Verzögerung), je nachdem eine Zu- oder Abnahme der Geschwindigkeit statthat. Je größer die Zu- oder Abnahme der Geschwindigkeit innerhalb einer gewissen Zeit ist, desto größer ist auch die Acceleration.

Gleichförmig veränderte Bewegung

Bei der gleichförmig veränderten Bewegung iſt die Acceleration unveränderlich; es läßt ſich daher auch dieſelbe durch diejenige Zu- oder Abnahme an Geſchwindigkeit meſſen, welche im Laufe einer Zeitſecunde ſtattfindet. Bei jeder andern Bewegung hingegen iſt das Maaß der Acceleration diejenige Zu- oder Abnahme an Geſchwindigkeit, welche ein Körper erhalten würde, wenn von dem Augenblicke an, für welchen man Acceleration angeben will, dieſelbe ihre Veränderlichkeit verlöre, die Bewegung alſo in eine gleichförmig veränderte überginge.

Sehr gewöhnlich nennt man dieſes Maaß ſelbſt die Acceleration oder Beſchleunigung.

§. 9. Wenn die Geſchwindigkeit einer gleichförmig beſchleunigten Bewegung in einem ſehr kleinen (unendlich kleinen) Zeittheilchen um x zunimmt, und die Zeitſecunde aus n (unendlich vielen) ſolchen Zeittheilchen beſteht, ſo iſt die Zunahme an Geſchwindigkeit in einer Secunde, oder die ſogenannte Acceleration

$$p = n\,x,$$

und die Zunahme nach t Secunden $= n\,t\,.\,x = n\,x\,.\,t = p\,t$.

Iſt die Anfangsgeſchwindigkeit (im Augenblicke, wenn man die Zeit t zu zählen anfängt) $= c$, ſo hat man hiernach die Endgeſchwindigkeit, d. i. die am Ende der Zeit t erlangte:

$$v = c + p\,t.$$

Für die ohne Geſchwindigkeit anfangende Bewegung iſt $c = o$, daher $v = p\,t$, und für die gleichförmig verzögerte, negative Acceleration $(-p)$ beſitzende Bewegung iſt $v = c - p\,t$.

Beiſpiele. 1) Die Acceleration eines im luftleeren Raume frei fallenden Körpers iſt $= 31\frac{1}{4} = 31{,}25$ Fuß; es erlangt daher ein ſolcher nach 3 Secunden die Geſchwindigkeit $v = p\,t = 31{,}25 \times 3 = 93{,}75$ Fuß. 2) Eine von einer ſchiefen Ebene herabrollende Kugel hat im Anfang ſchon die Geſchwindigkeit $c = 25$ Fuß, und erlangt beim Herabrollen in jeder Secunde noch 5 Fuß Zuſatz an Geſchwindigkeit; es iſt daher ihre Geſchwindigkeit nach $2\frac{1}{2}$ Secunde: $v = 25 + 5 \times 2{,}5 = 25 + 12{,}5 = 37{,}5$ Fuß, d. h., ſie wird, von dem letzten Zeitpunkte an gleichförmig fortgehend, in jeder Secunde 37,5 Fuß Weg zurücklegen. 3) Ein mit 30 Fuß Geſchwindigkeit fortgehender Dampfwagen wird ſo gebremſ't, daß er in jeder Secunde 3,5 Fuß an Geſchwindigkeit verliert, ſeine Acceleration alſo $-3{,}5$ Fuß beträgt; es iſt deshalb ſeine Geſchwindigkeit nach 6 Secunden: $v = 30 - 3{,}5 \times 6 = 30 - 21 = 9$ Fuß

§. 10. Innerhalb eines unendlich kleinen Zeittheilchens τ läßt ſich die Geſchwindigkeit einer jeden Bewegung als unveränderlich anſehen; man kann daher den in dieſem Zeittheilchen durchlaufenen Raum $\sigma = v\,.\,\tau$ ſetzen, und erhält ſo den in einer endlichen Zeit t durchlaufenen Raum, wenn man die Summe dieſer kleinen Räume ermittelt. Nun iſt aber für alle dieſe Räumchen die Zeit τ eine und dieſelbe, es läßt ſich daher auch ihre Summe gleichſetzen dem Producte aus eben dieſen Zeittheilchen und

aus der Summe der, gleichen Intervallen entsprechenden Geschwindigkeiten.

Gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist aber die Summe $(o + v)$ der Geschwindigkeiten im ersten und letzten Augenblicke so groß als die Summe $p\tau + (v - p\tau)$ der Geschwindigkeiten im zweiten und vorletzten Augenblicke, auch gleich der Summe $2p\tau + (v - 2p\tau)$ der Geschwindigkeiten im dritten und vorvorletzten Augenblicke u. s. w., und diese Summe überhaupt gleich der Endgeschwindigkeit v; es ist daher hier die Summe aller Geschwindigkeiten gleich dem Produkte $\left(v \cdot \frac{n}{2}\right)$ aus der Endgeschwindigkeit v und aus der halben Anzahl aller Zeittheilchen, der durchlaufene Raum aber das Produkt $\left(v \cdot \frac{n}{2} : \tau\right)$ aus der Endgeschwindigkeit v, der halben Anzahl der Zeittheile und der Größe eines solchen. Nun giebt endlich die Größe (τ) eines Zeittheilchens, mit der Anzahl derselben multiplicirt, die ganze Zeit t, deshalb ist denn der innerhalb der Zeit t gleichförmig beschleunigt zurückgelegte Raum $s = \frac{vt}{2}$.

Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung fällt hiernach der Raum ebenso groß aus, wie bei der gleichförmigen Bewegung, wenn deren Geschwindigkeit halb so groß ist, als die Endgeschwindigkeit der erstern Bewegung.

Beispiele: 1) Wenn ein Körper innerhalb 10 Sekunden durch gleichförmig beschleunigte Bewegung eine Geschwindigkeit v von 26 Fuß erlangt hat, so ist der zu gleicher Zeit zurückgelegte Weg $s = \frac{26 \cdot 10}{2} = 130$ Fuß. 2) Ein Wagen, welcher bei seiner gleichförmig beschleunigten Bewegung im Laufe von $2\frac{1}{4}$ Sekunde 25 Fuß zurückgelegt hat, geht am Ende mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{2 \cdot 25}{2{,}25} = \frac{50 \cdot 4}{9} = 22{,}22 \ldots \text{ Fuß}$$

fort.

§. 11. Die beiden Grundformeln der gleichförmig beschleunigten Bewegung:

$$\text{I.} \quad v = pt \quad \text{und} \quad \text{II.} \quad s = \frac{vt}{2},$$

welche ausdrücken, daß hier die Geschwindigkeit ein Product aus Acceleration und Zeit, und der Raum ein solches aus der halben Geschwindigkeit und Zeit ist, schließen noch zwei andere Hauptformeln in sich, die man erhält, wenn man aus beiden Gleichungen ein Mal v und ein zweites Mal t eliminirt. Es folgt nämlich:

$$\text{III.} \quad s = \frac{pt^2}{2} \quad \text{und} \quad \text{IV.} \quad s = \frac{v^2}{2p}.$$

Hiernach ist also der gleichförmig beschleunigt zurückgelegte Weg ein Product aus der halben Acceleration und dem Quadrate der Zeit, und auch der Quotient aus dem Quadrate der Endgeschwindigkeit und der doppelten Beschleunigung.

Gleichförmig beſchleunigte Bewegung.

Dieſe vier Hauptformeln geben durch Umkehrung, je nachdem man die eine oder die andere der in ihnen enthaltenen Größen abſondert, noch acht andere Formeln, und man findet dieſelben im »Ingenieur Seite 372 und 373« in einer Tabelle zuſammengeſtellt.

Beiſpiele: 1) Ein mit der Acceleration 15,625 Fuß bewegter Körper legt in 1,5 Sekunde den Weg $\frac{15{,}625 \times (1{,}5)^2}{2} = 15{,}625 \times \frac{9}{16} = 17{,}578$ Fuß zurück.

2) Ein durch die Acceleration $p = 4{,}5$ Fuß in die Geſchwindigkeit $v = 16{,}5$ Fuß verſetzter Körper hat den Raum $s = \frac{(16{,}5)^2}{2 \cdot 4{,}5} = 30{,}25$ Fuß zurückgelegt.

§. 12. Bei der Vergleichung von zwei verſchiedenen gleichförmig beſchleunigten Bewegungen mit einander ſtößt man auf Folgendes:

Die Geſchwindigkeiten ſind $v = pt$ und $v_1 = p_1 t_1$, die Räume hingegen $s = \frac{pt^2}{2}$ und $s_1 = \frac{p_1 t_1^2}{2}$, es folgt hieraus:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{pt}{p_1 t_1} \text{ und } \frac{s}{s_1} = \frac{pt^2}{p_1 t_1^2} = \frac{vt}{v_1 t_1} = \frac{v^2 p_1}{v_1^2 p}.$$

Setzt man nun $t_1 = t$, ſo erhält man $\frac{s}{s_1} = \frac{v}{v_1} = \frac{p}{p_1}$; es verhalten ſich alſo bei gleichen Zeiten die durchlaufenen Wege wie die Endgeſchwindigkeiten, oder auch wie die Beſchleunigungen.

Nimmt man ferner $p_1 = p$, ſo ergiebt ſich

$$\frac{v}{v_1} = \frac{t}{t_1} \text{ und } \frac{s}{s_1} = \frac{t^2}{t_1^2} = \frac{v^2}{v_1^2};$$

bei gleichen Beſchleunigungen und alſo auch bei einer und derſelben gleichförmig beſchleunigten Bewegung ſind alſo die Endgeſchwindigkeiten den Zeiten und die durchlaufenen Räume den Quadraten der Zeiten, oder auch den Quadraten der Endgeſchwindigkeiten proportional.

Ferner $v_1 = v$ angenommen, giebt $\frac{p}{p_1} = \frac{t_1}{t}$ und $\frac{s}{s_1} = \frac{t}{t_1}$; bei gleichen Endgeſchwindigkeiten ſind die Accelerationen den Zeiten umgekehrt, die Räume aber den Zeiten direct proportional.

Endlich $s_1 = s$ geſetzt, giebt $\frac{p}{p_1} = \frac{t_1^2}{t^2} = \frac{v^2}{v_1^2}$; es verhalten ſich alſo bei gleichen Räumen die Accelerationen umgekehrt wie die Quadrate der Zeiten und direct wie die Quadrate der Endgeſchwindigkeiten.

§. 13. Für die mit der Geſchwindigkeit c anfangende gleichförmig beſchleunigte Bewegung hat man nach §. 9:

Gleichförmig beschleunigte Bewegung.

$$\text{I.}\quad v = c + pt$$

und da der unveränderlichen Geschwindigkeit c der Raum ct, der Acceleration p aber der Weg $\frac{pt^2}{2}$ zukommt,

$$\text{II.}\quad s = ct + \frac{pt^2}{2}.$$

Entfernt man p aus beiden Gleichungen, so erhält man:

$$\text{III.}\quad s = \frac{c+v}{2}\,t,$$

und beseitigt man t, so stellt sich

$$\text{IV.}\quad s = \frac{v^2 - c^2}{2p} \text{ heraus.}$$

Beispiele: 1) Ein mit der Anfangsgeschwindigkeit $c = 3$ Fuß und mit der Acceleration $p = 5$ Fuß bewegter Körper legt in 7 Secunden den Weg $s = 3 \,.\, 7 + 5 \,.\, \frac{7^2}{2} = 21 + 122{,}5 = 143{,}5$ Fuß zurück.

2) Ein anderer Körper, welcher innerhalb 3 Minuten, = 180 Secunden, seine Geschwindigkeit $2\frac{1}{2}$ Fuß in die von $7\frac{1}{2}$ Fuß umändert, macht in dieser Zeit den Weg von $\frac{2{,}5+7{,}5}{2} \,.\, 180 = 900$ Fuß.

§. 14. Für die mit der Geschwindigkeit c anfangende gleichförmig verzögerte Bewegung gelten die Formeln:

$$\text{I.}\quad v = c - pt,$$

$$\text{II.}\quad s = ct - \frac{pt^2}{2},$$

$$\text{III.}\quad s = \frac{c+v}{2} \,.\, t,$$

$$\text{IV.}\quad s = \frac{c^2 - v^2}{2p},$$

welche aus den Gleichungen des vorigen §. sogleich hervorgehen, wenn man darin p negativ setzt. Während bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung die Geschwindigkeit ohne Ende wächst, nimmt bei der gleichförmig verzögerten Bewegung die Geschwindigkeit bis zu einem gewissen Zeitpunkte ab, wird in demselben = Null, und fällt später negativ aus, d. h. es geht später die Bewegung in umgekehrter Richtung vor sich.

Setzen wir in der ersten Formel $v = o$, so erhalten wir $pt = c$, also die Zeit, zu welcher die Geschwindigkeit Null geworden ist, $t = \frac{c}{p}$; setzen wir endlich diesen Werth von t in die zweite Gleichung, so erhalten wir den Raum, welchen der Körper zu diesem Zeitpunkte zurückgelegt hat:

$$s = \frac{c^2}{2p}.$$

Digitized by Google

Gleichförmig beſchleunigte Bewegung.

Iſt die Zeit größer als $\frac{c}{p}$, ſo fällt der Raum kleiner als $\frac{c^2}{2p}$ aus; iſt die Zeit $= \frac{2c}{p}$, ſo iſt der Raum Null, es iſt alſo der Körper nach ſeinem Ausgangspunkt zurückgekehrt; iſt endlich die Zeit noch größer als $\frac{2c}{p}$, ſo iſt s negativ, d. h. es befindet ſich der Körper vom Anfangspunkte aus auf der entgegengeſetzten Seite.

Beiſpiel. Ein Körper, welcher mit 40 Fuß Anfangsgeſchwindigkeit auf einer ſchiefen Ebene hinaufrollt, durch welche er eine Verzögerung von 8 Fuß pro Secunde erleidet, ſteigt nur $\frac{40}{8} = 5$ Sekunden lang und $\frac{40^2}{2.8} = 100$ Fuß hoch, rollt dann zurück, kommt nach 10 Secunden mit 40 Fuß Geſchwindigkeit in den Anfangspunkt zurück und gelangt nach 12 Secunden ſchon um $40 \times 12 - 4 \times 12^2$ oder $-(40 \times 2 + 4 \times 2^2) = 96$ Fuß unter den Anfangspunkt, wenn ſich die Ebene auch abwärts erſtreckt.

Freier Fall der Körper.

§. 15. Der freie oder ſenkrechte Fall der Körper im luftleeren Raume (franz. mouvement vertical des corps pesants, engl. vertical motion of bodies) gibt das wichtigſte Beiſpiel der gleichförmig beſchleunigten Bewegung. Die durch die Schwerkraft (franz. gravité, engl. gravity) erzeugte Acceleration dieſer Bewegung bezeichnet man durch den Buchſtaben g, und hat den mittleren Werth von

9,81 Metern
30,20 pariſer Fuß,
32,20 engliſchen Fuß,
31,03 wiener Fuß,
$31\frac{1}{4} = 31{,}25$ preußiſchen Fuß.

Wenn man einen dieſer Werthe ſtatt g in die gefundenen Formeln

$$v = gt, \quad s = \frac{gt^2}{2} \text{ und } s = \frac{v^2}{2g}, \quad v = \sqrt{2gs}$$

einführt, ſo kann man alle Fragen, welche ſich in Anſehung des freien Falles der Körper vorlegen laſſen, beantworten. Für das preußiſche Maaß läßt ſich gleich ſetzen:

$$v = 31{,}25 \,.\, t = 7{,}906\,\sqrt{s}; \quad s = 15{,}625 \,.\, t^2 = 0{,}016\, v^2$$
$$\text{und } t = 0{,}032\, v = 0{,}253\,\sqrt{s}.$$

Beiſpiele: 1) Ein Körper erlangt beim ungehinderten Fallen in 4 Secunden die Geſchwindigkeit $v = 31{,}25 \times 4 = 125$ Fuß und durchläuft in dieſer Zeit den Weg $s = 15{,}625 \times 4^2 = 250$ Fuß. 2) Ein von der Höhe $s = 9$ Fuß herabgefallener Körper hat die Geſchwindigkeit $v = 7{,}906 \,.\, \sqrt{9} = 23{,}72$ Fuß. 3) Ein mit 10 Fuß Geſchwindigkeit vertikal aufgeworfener Körper ſteigt auf die Höhe $s = 0{,}016 \,.\, 10^2 = 1{,}6$ Fuß und braucht dazu die Zeit $t = 0{,}032 \,.\, 10 = 0{,}32$ oder ungefähr $\frac{1}{3}$ Secunde.

§. 16. Wie sich beim freien Fall der Körper die Bewegungsverhältnisse im Laufe der Zeit gestalten, wird durch folgende Tabelle vor Augen geführt. Freier Fall der Körper.

Zeit in Sekunden.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Geschwindigkeit.	0	$1g$	$2g$	$3g$	$4g$	$5g$	$6g$	$7g$	$8g$	$9g$	$10g$
Weg.	0	$1\frac{g}{2}$	$4\frac{g}{2}$	$9\frac{g}{2}$	$16\frac{g}{2}$	$25\frac{g}{2}$	$36\frac{g}{2}$	$49\frac{g}{2}$	$64\frac{g}{2}$	$81\frac{g}{2}$	$100\frac{g}{2}$
Differenzen.	0	$1\frac{g}{2}$	$3\frac{g}{2}$	$5\frac{g}{2}$	$7\frac{g}{2}$	$9\frac{g}{2}$	$11\frac{g}{2}$	$13\frac{g}{2}$	$15\frac{g}{2}$	$17\frac{g}{2}$	$19\frac{g}{2}$

Die letzte Horizontalcolumne dieser Tafel gibt die Wege an, welche der frei fallende Körper in den einzelnen Secunden durchläuft. Man sieht, daß sich diese Wege wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 u. s. w. zu einander verhalten, während die Zeiten und Geschwindigkeiten wie die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 u. s. w. und die Fallräume wie deren Quadrate 1, 4, 9, 16 u. s. w. wachsen. Hiernach ist z. B. die Geschwindigkeit nach 6 Secunden $6\,g = 187{,}5$ Fuß, d. h. der Körper würde, wenn er von dieser Zeit an gleichförmig fortginge, etwa auf einer ihm keine Hindernisse darbietenden Horizontalebene seine Bewegung fortsetzte, in jeder Secunde den Weg $6\,g = 187{,}5$ Fuß durchlaufen. Diesen Raum durchläuft er im Laufe der folgenden oder siebenten Secunde aber nicht wirklich, sondern derselbe beträgt genau nach der letzten Columne $13.\frac{g}{2} = 13\,.\,15{,}625 = 203{,}125$ Fuß; in der achten Secunde ist er sogar $15.\frac{g}{2} = 15\,.\,15{,}625 = 234{,}375$ Fuß, u. s. w.

Anmerkung: Viele deutsche Schriftsteller bezeichnen den Raum von 15,625 Fuß, welcher vom frei fallenden Körper in der ersten Secunde durchlaufen wird, durch g und nennen ihn wohl auch Beschleunigung der Schwere. Sie haben dann für den freien Fall der Körper die Formeln:

$$v = 2gt = 2\sqrt{gs},$$
$$s = gt^2 = \frac{v^2}{4g},$$
$$t = \frac{v}{2g} = \sqrt{\frac{s}{g}}.$$

Dieser nur in Deutschland vorkommende Gebrauch fängt nun auch an, allmälig

Freier Fall der Körper.

zu verſchwinden, und wegen der oft vorkommenden Mißverſtändniſſe und dadurch herbeigeführten Fehler iſt dies auch ſehr zu wünſchen.

§. 17. Geht der freie Fall der Körper mit einer gewiſſen Anfangsgeſchwindigkeit (franz. vitesse initial, engl. initial-velocity) c vor ſich, ſo nehmen die Formeln folgende Formen an:

$$v = c + gt = c + 31{,}25t, \text{ auch } v = \sqrt{c^2 + 2gs} = \sqrt{c^2 + 62{,}5.s},$$

$$s = ct + g\frac{t^2}{2} = ct + 15{,}625t^2, \text{ auch } s = \frac{v^2 - c^2}{2g} = 0{,}016\,(v^2 - c^2).$$

Wird hingegen der Körper mit der Geſchwindigkeit c ſenkrecht in die Höhe geworfen, ſo hat man:

$$v = c - gt = c - 31{,}25\,t, \text{ auch } v = \sqrt{c^2 - 2gs} = \sqrt{c^2 - 62{,}5\,s},$$

$$s = ct - g\frac{t^2}{2} = ct - 15{,}625t^2, \text{ auch } s = \frac{c^2 - v^2}{2g} = 0{,}016\,(c^2 - v^2).$$

Betrachtet man eine gegebene Geſchwindigkeit c als eine durch den freien Fall erlangte Endgeſchwindigkeit, ſo nennt man den entſprechenden Fallraum $\frac{c^2}{2g} = 0{,}016 \,.\, c^2$ die Geſchwindigkeitshöhe (franz. hauteur de la vitesse, engl. height of velocity). Durch Einführung derſelben laſſen ſich einige der obigen Formeln einfacher ausdrücken. Bezeichnet man die Geſchwindigkeitshöhe $\left(\frac{c^2}{2g}\right)$ von der Anfangsgeſchwindigkeit c durch h und die der Endgeſchwindigkeit, alſo $\frac{v^2}{2g}$ durch h_1, ſo hat man für fallende Körper:

$$h_1 = h + s \text{ und } s = h_1 - h$$

und für ſteigende

$$h_1 = h - s \text{ und } s = h - h_1$$

Es iſt alſo der Fall- oder Steigraum ſtets gleich der Differenz der Geſchwindigkeitshöhen.

Beiſpiel: Sind die Geſchwindigkeiten 5 Fuß und 11 Fuß, alſo die Geſchwindigkeitshöhen $= 0{,}016.5^2 = 0{,}4$ Fuß und $0{,}016.11^2 = 1{,}936$ Fuß, ſo iſt der Raum, welcher während des Ueberganges aus der einen Geſchwindigkeit in die andere zurückgelegt wird: $s = 1{,}936 - 0{,}400 = 1{,}536$ Fuß.

§. 18. Aus der Formel $s = h - h_1$ folgt auch noch, daß der ſenkrecht in die Höhe geworfene Körper an jeder Stelle diejenige Geſchwindigkeit hat, die er, jedoch in umgekehrter Richtung, haben würde, wenn er von der noch übrigen Steighöhe bis zu dieſer Stelle frei herabgefallen wäre, die er alſo auch beim darauf folgenden Niederfallen dort wirklich beſitzt.

Beiſpiel: Ein Körper wird mit 15 Fuß Geſchwindigkeit ſenkrecht emporgeworfen und trifft bei 2 Fuß Steighöhe auf ein elaſtiſches Hinderniß, welches

ihn momentan mit derselben Geschwindigkeit zurückwirft, mit welcher er angetroffen hat. Wie groß ist nun diese Geschwindigkeit und wie groß ist die Zeit zum Steigen und Zurückfallen? Der Geschwindigkeit $c = 15$ Fuß entspricht die Steighöhe $h = 3{,}60$ Fuß, die Geschwindigkeitshöhe für den Augenblick des Anstoßes ist nun $h_1 = 3{,}60 - 2{,}00 = 1{,}60$, und folglich diese Geschwindigkeit selbst $= 7{,}906 \sqrt{1{,}6} = 10$ Fuß. Die Zeit zum Steigen auf die ganze Höhe (3,6 Fuß) wäre: $t = 0{,}032 . v = 0{,}032 . 15 = 0{,}480$ See., die Zeit zum Steigen auf die Höhe 1,6 Fuß aber: $t_1 = 0{,}032 . 10 = 0{,}320$ See., es bleibt diesem nach die Zeit zum Steigen auf die Höhe von 2 Fuß oder die Zeit vom Anfang bis zum Anstoß: $t - t_1 = 0{,}480 - 0{,}320 = 0{,}160$ See., also endlich die ganze Zeit zum Steigen und Fallen $= 2 . 0{,}160 = 0{,}320$ See. Diese ist also nur der $\frac{0{,}320}{0{,}960}$ste $=$ 3te Theil von der Zeit, welche zum Aufsteigen und Zurückfallen nöthig wäre, wenn der Körper unaufgehalten stiege und fiele. Dieser Fall findet beim Schmieden des glühenden Eisens seine Anwendung, weil es hier wegen des allmäligen Abkühlens darauf ankommt, in einer kurzen Zeit so viel Hammerschläge wie möglich erfolgen zu lassen. Wenn der Hammer durch eine elastische Prallvorrichtung zurückgeworfen wird, so kann er unter den im Beispiele zum Grunde liegenden Verhältnissen in derselben Zeit ziemlich dreimal so viel Schläge thun als beim ungehinderten Aufsteigen.

Freier Fall der Körper.

Anmerkung 1. Das Umsetzen der Geschwindigkeit in Geschwindigkeitshöhe, so wie auch das Umsetzen der letzteren in die erstere, ist ein in der praktischen Mechanik und namentlich in der Hydraulik sehr oft vorkommendes Geschäft. Eine Tafel, wodurch dasselbe in ein bloßes Nachschlagen verwandelt wird, leistet deshalb dem Praktiker sehr nützliche Dienste. Eine sich auf das preußische Fußmaaß beziehende Tabelle dieser Art enthält der »Ingenieur, Seite 374 und 375«.

Anmerkung 2. Die im Vorhergehenden entwickelten Formeln sind allerdings nur für den freien Fall im luftleeren Raume streng richtig; sie lassen sich jedoch auch beim freien Fall in der Luft mit einer noch erträglichen Genauigkeit gebrauchen, wenn die fallenden Körper in Beziehung auf ihr Volumen ein großes Gewicht haben, und wenn die Geschwindigkeiten nicht sehr groß ausfallen. Uebrigens werden sie auch noch unter anderen Umständen und Verhältnissen in vielen anderen Fällen gebraucht, wie in der Folge gezeigt werden wird.

§. 19.*) Die Formel $s = ct$ (§. 5.) für die gleichförmige Bewegung gilt auch für jede ungleichförmige Bewegung, wenn man statt t ein Zeitelement oder unendlich kleines Zeittheilchen dt, und statt s das innerhalb dieses Zeittheilchens zurückgelegte Raumelement ds setzt, da anzunehmen ist, daß innerhalb eines Augenblickes die Geschwindigkeit c, welche hier durch v bezeichnet werden soll, sich nicht ändert, also die Bewegung gleichförmig bleibt.

Ungleichförmige Bewegung überhaupt.

Man hat also für jede ungleichförmige Bewegung:

$$1. \quad ds = v dt, \text{ so wie } v = \frac{ds}{dt}.$$

Es ist also die Geschwindigkeit (v) für jeden Augenblick durch den Quotienten aus dem Raum- und aus dem Zeitelemente bestimmt.

Ungleichförmiger Bewegung überhaupt.

Ebenſo iſt die Formel $v = pt$ (§. 11) für die gleichförmig beſchleunigte Bewegung auch für jede ungleichförmige Bewegung überhaupt giltig, wenn man ſtatt t und v das Zeitelement dt und den innerhalb deſſelben erlangten unendlich kleinen Geſchwindigkeitszuwachs dv ſubſtituirt, da ſich die Beſchleunigung p innerhalb eines Augenblickes (dt) nicht angebbar verändert, alſo die Bewegung während deſſelben als gleichförmig beſchleunigt angeſehen werden kann.

Hiernach hat man für alle Bewegungen:

$$\text{II.} \quad dv = pdt, \text{ ſo wie } p = \frac{dv}{dt}.$$

Es iſt alſo die Acceleration (p) für jeden Augenblick der Bewegung gleich dem Quotienten aus dem Geſchwindigkeits- und dem entſprechenden Zeitelemente.

Durch Verbindung der Formeln I. und II. erhält man noch die in der Folge ſehr wichtige Gleichung:

$$\text{III.} \quad vdv = pds, \text{ oder, da } \int vdv = \frac{v^2 - c^2}{2} \text{ iſt, wenn } c \text{ diejenige}$$

Geſchwindigkeit bezeichnet, welche dem Anfangspunkte des Raumes s entſpricht,

$$v^2 - c^2 = 2 \int pds.$$

Es iſt alſo hiernach die Differenz der Geſchwindigkeitsquadrate gleich dem doppelten Integrale von dem Producte aus der Acceleration und dem Elemente ds, oder gleich dem doppelten Producte aus der mittleren Acceleration und dem Raume, welcher während des Ueberganges der Geſchwindigkeit aus c in v zurückgelegt wird.

Der Lehre vom Größten und Kleinſten zu Folge iſt der Raum ein Maximum, hat alſo die Bewegung ihre größte Extenſion erlangt, wenn $\frac{ds}{dt} = v =$ Null iſt, und die Geſchwindigkeit am größten oder kleinſten

$$\text{für } \frac{dv}{dt} = p = \text{Null}.$$

Beiſpiele. Mit Hülfe der vorſtehenden Formeln laſſen ſich die mannigfaltigſten Fragen der Phoronomie beantworten. Hier nur zwei Beiſpiele:

1) Aus der gegebenen Gleichung $s = 2 + 3t + t^2$ für den Raum, folgt durch Differenziiren für die Geſchwindigkeit die Gleichung $v = 3 + 2t$, und für die Acceleration $p = 2$; es iſt alſo die letztere conſtant, und die Bewegung gleichförmig beſchleunigt. Für $t = 0, 1, 2, 3 \ldots$ Secunden, hat man aber

$$v = 3, 5, 7, 9 \ldots \text{ (Fuß), und}$$
$$s = 2, 6, 12, 20 \ldots \text{ (Fuß).}$$

2) Aus der Formel $v = 10 + 3t - t^2$ für die Geſchwindigkeit folgt durch Integriren die Gleichung $s = \int 10\,dt + \int 3t\,dt - \int t^2 dt = 10t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{t^3}{3}$, dagegen durch Differenziiren die Formel $p = 3 - 2t$.

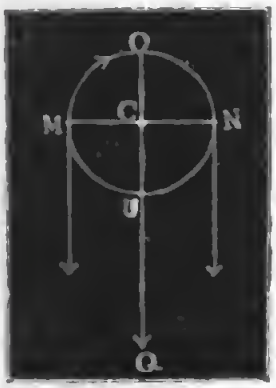
Hiernach ist für $3 - 2t = 0$, d. i. $t = 3/2$ Secunden, die Acceleration Null und die Geschwindigkeit ein Maximum ($v = 12\frac{1}{4}$), und für $10 + 3t - t^2 = 0$, d. i. $t = 3/2 + \sqrt{10 + 9/4} = \frac{3+7}{2} = 5$ Secunden die Geschwindigkeit Null und der Raum ein Maximum. Ungleichförmige Bewegung überhaupt.

Für $t =$ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 Secunden hat man
$p =$ 3, 1, − 1, − 3, − 5, − 7, − 9 Fuß,
$v =$ 10, 12, 12, 10, 6, 0, − 8 Fuß,
$s =$ 0, $11\frac{1}{6}$, $23\frac{1}{3}$, $34\frac{1}{2}$, $42\frac{2}{3}$, $45\frac{5}{6}$, 42 Fuß.

§. 20. Von der Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)$ für einen Augenblick oder während eines Zeitelementes ist $dt\,(\tau)$ diejenige Geschwindigkeit $c = \frac{s}{t}$ verschieden, welche sich ergibt, wenn man den Raum, welcher während einer gewissen Zeit, z. B. während einer Periode einer periodischen Bewegung durchlaufen wird, durch die Zeit selbst dividirt. Man nennt dieselbe die mittlere Geschwindigkeit (franz. vitesse moyenne, engl mean-velocity) und kann sie auch als diejenige Geschwindigkeit ansehen, die ein Körper haben müßte, um in einer gegebenen Zeit (t) einen gewissen Raum (s) gleichförmig zurückzulegen, der in Wirklichkeit in eben dieser Zeit ungleichförmig durchlaufen wird. So ist z. B. bei der gleichförmig veränderten Bewegung die mittlere Geschwindigkeit gleich der halben Summe $\left(\frac{c+v}{2}\right)$ aus der Anfangs- und Endgeschwindigkeit, denn es ist nach §. 13 der Raum gleich dieser Summe $\left(\frac{c+v}{2}\right)$ multiplicirt durch die Zeit (t). Mittlere Geschwindigkeit.

Beispiel. Während eine Kurbel gleichförmig im Kreise $UMON$, Fig. 39, herumgedreht wird, geht die daran hängende Last Q, z. B. der Kolben einer Luft- oder Wasserpumpe u. s. w. ganz ungleichförmig auf und nieder; die Geschwindigkeit dieser ist im tiefsten und höchsten Punkte U und O am kleinsten, nämlich Null, auf der halben Höhe, in M und N, aber am größten, nämlich der Kurbelgeschwindigkeit gleich. Innerhalb einer halben Umdrehung ist die mittlere Geschwindigkeit gleich der ganzen Steighöhe, d. i. dem Durchmesser UO des Kreises, in welchem die Kurbel herumgeht, dividirt durch die Zeit einer halben Umdrehung. Setzen wir den Halbmesser $CU = CO$ des Warzenkreises $= r$, also jenen Durchmesser $= 2r$ und diese Zeit $= t$, so folgt demnach die mittlere Geschwindigkeit der Last $c_1 = \frac{2r}{t}$. Die Kurbel selbst macht in dieser Zeit den Halbkreis πr; es ist daher ihre Geschwindigkeit $c = \frac{\pi r}{t}$, und folglich die mittlere

Fig. 39.



Geſchwindigkeit der Laſt $c_1 = \frac{2}{\pi} = \frac{2}{3{,}141} = 0{,}6366$mal ſo groß als die unveränderliche Geſchwindigkeit c der Kurbel.

Graphiſche Darſtellung

§. 21. Die im Vorigen gefundenen Bewegungsgeſetze laſſen ſich auch in geometriſchen Figuren ausdrücken oder, wie man ſagt, graphiſch darſtellen. Graphiſche Darſtellungen überhaupt erleichtern die Auffaſſung, unterſtützen das Gedächtniß, ſchützen wohl auch gegen Fehler und dienen ſogar zuweilen zur unmittelbaren Ausmittelung der geſuchten Größe; ſie ſind deshalb der Mechanik von großem Nutzen.

Bei der gleichförmigen Bewegung iſt der Raum (s) das Product (ct) aus Geſchwindigkeit und Zeit, und bei einem Rechtecke (Rectangel) der Geometrie iſt der Flächenraum ein Product aus Höhe und Grundlinie; man kann daher auch den gleichförmig durchlaufenen Raum s durch ein Rechteck $ABCD$ Fig. 40 darſtellen, deſſen Grundlinie AB die Zeit (t) und deſſen Höhe $AD = BC$ die Geſchwindigkeit (c) iſt, vorausgeſetzt, daß die Zeit mit der Geſchwindigkeit in einerlei Längeneinheiten ausgedrückt, daß alſo durch eine und dieſelbe Linie die Zeitſecunde und der Fuß zugleich repräſentirt werden.

Fig. 40.

§. 22. Während bei der gleichförmigen Bewegung die Geſchwindigkeit (MN) zu jeder andern Zeit (AM) der Bewegung eine und dieſelbe iſt, fällt dieſelbe bei der ungleichförmigen Bewegung in jedem Augenblicke anders aus; es läßt ſich deshalb dieſe Bewegung nur durch ein Viereck $ABCD$ Fig. 41 darſtellen, welches zur Grundlinie AB die Zeit (t) und zur übrigen Begrenzung drei andere Linien AD, BC und CD hat, von denen die erſten beiden der Anfangs- und Endgeſchwindigkeit gleich ſind, die letzte aber durch die Endpunkte (N) der verſchiedenen Geſchwindigkeiten in den Zwiſchenpunkten (M) beſtimmt wird. Nach den verſchiedenen Arten von ungleichförmigen Bewegungen iſt die vierte Linie CD entweder gerade oder krumm; ferner von Anfang aus aufſteigend oder niederſteigend, endlich entweder gegen die Grundlinie concav (hohl) oder conver (erhaben.) In jedem Falle aber iſt der Flächeninhalt dieſer Figur dem ungleichförmig durchlaufenen Raume (s) gleichzuſetzen, denn jener Flächenraum $ABCD$ Fig. 42 läßt ſich durch Höhenlinien in lauter ſchmale, als

Fig 41.

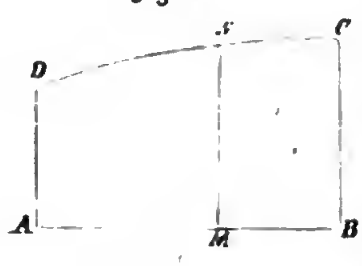
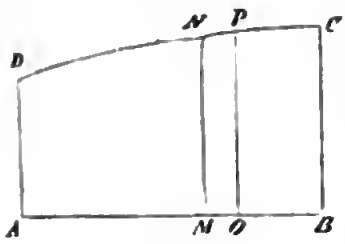


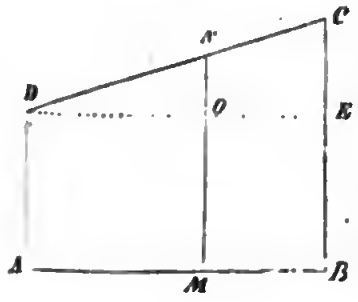
Fig. 42.



Rechtecke anzusehende Streifen wie $MOPN$ zerlegen, wovon jeder ein Product aus einem Theile (MO) der Grundlinie und der dieſem entſprechenden Höhe (MN oder OP) iſt, und ebenſo läßt ſich der in einer gewiſſen Zeit durchlaufene Raum aus Theilchen zuſammenſetzen, wovon jedes ein Product aus einem Zeittheilchen und der während deſſelben ſtattfindenden Geſchwindigkeit iſt. Graphiſche Darſtellung.

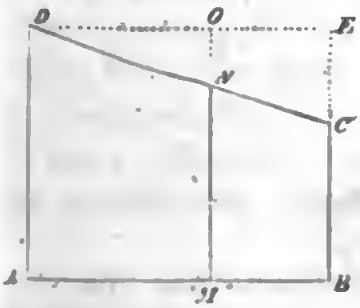
§. 23. Bei der gleichförmig veränderten Bewegung iſt die Zu- oder Abnahme $v - c$ der Geſchwindigkeit ($= pt$, §. 13.) proportional der Zeit (t). Ziehen wir nun in Fig. 43 und Fig. 44 die Linie DE der Grundlinie AB parallel, und ſchneiden wir dadurch von den die Geſchwindigkeiten vorſtellenden Linien BC und MN die der Anfangsgeſchwindigkeit AD gleichen Stücke BE und MO ab, ſo bleiben uns die Linien CE und NO als Geſchwindigkeitszu- oder abnahmen übrig, für welche nach dem Obigen die Proportion

Fig. 43.



$$NO : CE = DO : DE \text{ gilt.}$$

Fig. 44.



Eine ſolche Proportion bedingt, daß N und ſo auch jeder Punkt der Linie CD in der geraden Verbindungslinie zwiſchen C und D liegen, daß alſo jene, die verſchiedenen Geſchwindigkeiten (MN) begrenzende Linie CD ſelbſt gerade ſein muß.

Dieſem zufolge läßt ſich alſo der gleichförmig beſchleunigt und gleichförmig verzögert durchlaufene Raum durch den Inhalt eines Trapezes $ABCD$ darſtellen, das zur Höhe AB die Zeit (t) und zu den (parallelen) Grundlinien AD und BC die Anfangs- und Endgeſchwindigkeit hat. Auch iſt damit die §. 13. gefundene Formel $s = \frac{c+v}{2} \cdot t$ in vollkommener Uebereinſtimmung. Bei der gleichförmig beſchleunigten Bewegung ſteigt die vierte Seite DC vom Anfangspunkte an aufwärts, und bei der gleichförmig verzögerten Bewegung läuft dieſe Linie abwärts. Bei der mit Null Geſchwindigkeit anfangenden gleichförmig beſchleunigten Bewegung geht das Trapez in ein Dreieck vom Inhalte $\frac{1}{2} BC \times AB = \frac{1}{2} ct$ über.

§. 24. Die mittlere Geſchwindigkeit einer ungleichförmigen

Graphiſche Darſtellung.

Bewegung iſt der Quotient: Raum dividirt durch Zeit; ſie giebt alſo mittels Multiplication durch die Zeit den Weg und läßt ſich deshalb auch als die Höhe $AF = BE$ desjenigen Rechteckes $ABEF$ Fig. 45 anſehen, das zur Grundlinie AB die Zeit t hat und an Inhalt dem den zurückgelegten Weg oder Raum meſſenden Vierecke $ABCND$ gleich iſt. Die mittlere Geſchwindigkeit ergibt ſich demnach auch durch Verwandlung des Viereckes $ABCND$ in ein gleich langes Rechteck $ABEF$. Ihre Beſtimmung iſt beſonders bei periodiſchen Bewegungen, welche faſt bei allen Maſchinen vorkommen, von Wichtigkeit. Das Geſetz dieſer Bewegungen wird durch eine Schlangenlinie $CDEFGHK$ Fig. 46 re-

Fig. 45.

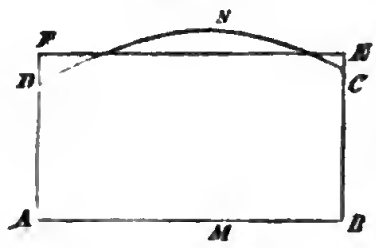
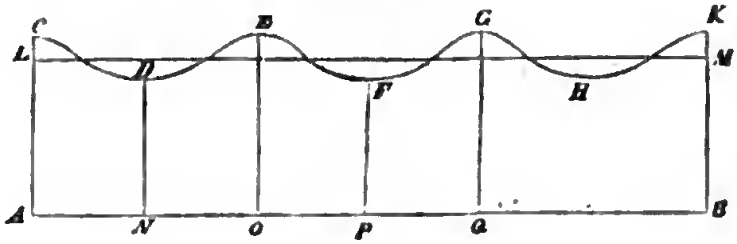


Fig. 46.



präſentirt. Schneidet die mit AB parallel laufende Gerade LM denſelben Raum wie die Schlangenlinie ab, iſt alſo LM gleichſam die Axe, um welche ſich $CDEF\ldots$ windet, ſo iſt der Abſtand $AL = BM$ zwiſchen beiden parallelen Linien AB und LM die mittlere Geſchwindigkeit der periodiſchen Bewegung, AC, OE, BK u. ſ. w. aber iſt die größte und ND, PF u. ſ. w. die kleinſte Geſchwindigkeit einer Periode AO, OQ, QB u. ſ. w.

§. 25. Auch die Acceleration oder der in der Zeitſecunde erfolgte Zuſatz an Geſchwindigkeit läßt ſich in der Figur leicht nachweiſen. Bei der gleichförmig veränderten Bewegung iſt ſie unveränderlich; ſie iſt deshalb die Differenz PQ Fig. 47 und 48 zwiſchen zwei Geſchwindigkeiten OP und MN, wovon die eine einer um eine Secunde (MO) größeren Zeit angehört als die andere.

Fig. 47.

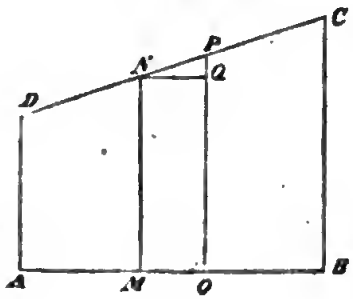
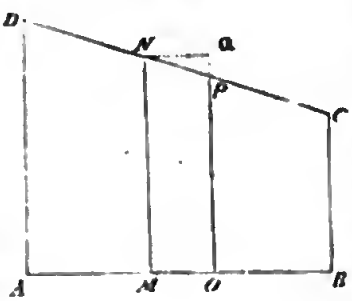


Fig. 48.



Ist die Bewegung ungleichförmig verändert, also die Geschwindigkeitslinie *CD* eine Curve, so ist für jeden Zeitpunkt (*M*) die Acceleration eine andere, und deshalb ist sie auch nicht die wirkliche Differenz *PQ* zwischen den um eine Secunde *MO* von einander abstehenden Geschwindigkeiten *OP* und *MN* = *OQ* Fig. 49 und 50, sondern sie ist die Graphische Darstellung

Fig. 49.

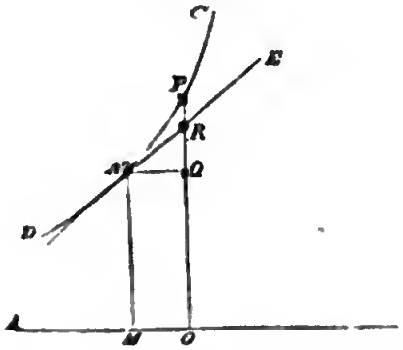
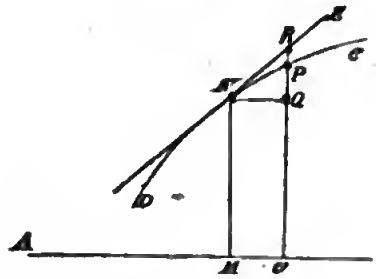


Fig. 50.



Zunahme *RQ* der Geschwindigkeit *MN*, welche eintreten würde, wenn von dem Augenblicke *M* an die Bewegung in eine gleichförmig beschleunigte, also die krumme Geschwindigkeitslinie *NC* in eine gerade Linie *NE* überginge. Nun ist aber die Tangente oder Berührungslinie *NE* diejenige Gerade, in welcher eine Curve *DN* weiter fortgeht, wenn sie von einer gewissen Stelle (*N*) an ihre Richtung unverändert beibehält; es fällt demnach die neue Geschwindigkeitslinie mit der Tangente zusammen, es ist solchem nach die bis zu dieser Linie gehende Höhenlinie *OR* die Geschwindigkeit, welche nach einer Secunde eintreten würde, wenn die Bewegung vom Anfang derselben an in eine gleichförmig beschleunigte übergegangen wäre, und endlich die Differenz *RQ* zwischen dieser Geschwindigkeit und der anfänglichen (*MN*) die Acceleration für den Augenblick, welcher durch den Punkt *M* in der Zeitlinie *AB* gegeben ist.

Zweites Kapitel.

Zusammengesetzte Bewegung.

§. 26. Ein und derselbe Körper kann gleichzeitig zwei oder mehrere Bewegungen besitzen; jede (relative) Bewegung besteht ja aus der Bewegung innerhalb eines Raumes und aus der Bewegung dieses Raumes innerhalb oder in Beziehung auf einen zweiten Raum. So besitzt schon jeder Punkt auf der Erde zwei Bewegungen, denn er läuft täglich einmal um die Erd- Zusammensetzung der Bewegungen.

Digitized by Google

Zuſammenſetzung der Bewegungen.

axe und mit dieſer zugleich jährlich einmal um die Sonne. Eine auf dem Schiffe gehende Perſon hat in Beziehung auf die Ufer zwei Bewegungen, ihre eigene und die des Schiffes; das Waſſer, welches durch eine Boden- oder Seitenöffnung eines Gefäßes ausfließt, das auf einem Wagen fortgefahren wird, hat zwei Bewegungen, die Bewegung aus dem Gefäße und die Bewegung mit dem Gefäße u. ſ. w.

Man unterſcheidet hiernach einfache und zuſammengeſetzte Bewegungen. Einfach (franz. und engl. simple) ſind die geradlinigen Bewegungen, aus welchen andere gerad- oder krummlinige Bewegungen, die man aber deswegen zuſammengeſetzte (franz. composé, engl. composed) nennt, beſtehen oder beſtehend gedacht werden können.

Die Zuſammenſetzung mehrerer einfachen Bewegungen zu einer einzigen und die Zerlegung einer zuſammengeſetzten Bewegung in mehrere einfache werden im Folgenden abgehandelt.

§. 27. Erfolgen die einfachen Bewegungen in einer und derſelben geraden Linie, ſo giebt die Summe oder Differenz derſelben die reſultirende zuſammengeſetzte Bewegung, erſteres, wenn die Bewegungen nach gleichen Richtungen vor ſich gehen, letzteres, wenn ihre Bewegungsrichtungen entgegengeſetzt ſind. Die Richtigkeit dieſes Satzes leuchtet ſogleich ein, wenn man die gleichzeitigen Räume der einfachen Bewegungen zu einem einzigen vereinigt. Den gleichförmigen Bewegungen mit den Geſchwindigkeiten c_1 und c_2 entſprechen die gleichzeitigen Räume $c_1 t$ und $c_2 t$; gehen dieſe Bewegungen in einerlei Richtung vor ſich, ſo iſt demnach der Raum nach t Secunden: $s = c_1 t + c_2 t = (c_1 + c_2) t$, und folglich iſt die reſultirende Geſchwindigkeit, mit welcher die zuſammengeſetzte Bewegung vor ſich geht, die Summe der Geſchwindigkeiten von den einfachen Bewegungen. Bei entgegengeſetzten Richtungen beider Bewegungen iſt $s = c_1 t - c_2 t = (c_1 - c_2) t$, hier iſt alſo die reſultirende Geſchwindigkeit der Differenz der einfachen Geſchwindigkeiten gleich.

Beiſpiele: 1) An einer Perſon, welche ſich mit 4 Fuß Geſchwindigkeit auf dem Verdecke eines Schiffes in der Bewegungsrichtung deſſelben fortbewegt, während das Schiff ſelbſt 6 Fuß Geſchwindigkeit hat, ſcheinen die Gegenſtände an den Ufern mit $4 + 6 = 10$ Fuß Geſchwindigkeit vorbei zu gehen. 2) Das Waſſer, welches aus der Seitenöffnung eines Gefäßes mit 25 Fuß Geſchwindigkeit ausfließt, während es mit dem Gefäße zugleich in der entgegengeſetzten Richtung mit 10 Fuß Geſchwindigkeit fortgeht, hat in Beziehung auf die übrigen in Ruhe befindlichen Gegenſtände nur $25 - 10 = 15$ Fuß Geſchwindigkeit.

§. 28. Dieſelben Verhältniſſe finden auch bei den ungleichförmigen Bewegungen Statt. Hat ein und derſelbe Körper außer den Anfangsgeſchwindigkeiten c_1 und c_2 noch die conſtanten Accelerationen p_1 und p_2, ſo ſind die entſprechenden Räume $c_1 t_1$, $c_2 t_2$, $\frac{1}{2} p_1 t^2$, $\frac{1}{2} p_2 t^2$, und ſind nun Ge-

ſchwindigkeiten und Acceleration in gleicher Richtung, ſo iſt der ganze Raum, welcher dieſen einfachen Bewegungen entſpricht: Zuſammenſetzung der Bewegungen.

$$s = (c_1 + c_2)\, t + (p_1 + p_2)\, \frac{t^2}{2}.$$

Setzt man nun $c_1 + c_2 = c$ und $p_1 + p_2 = p$, ſo erhält man $s = ct + p\,\frac{t^2}{2}$, und es folgt hiernach, daß nicht allein durch die Summe der einfachen Geſchwindigkeiten die Geſchwindigkeit, ſondern auch durch die Summe der Accelerationen der einfachen Bewegungen die Acceleration der reſultirenden oder zuſammengeſetzten Bewegung gegeben wird.

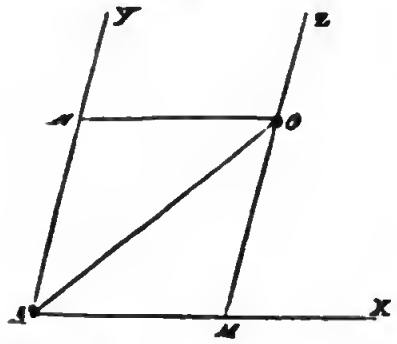
Fig. 51.

Beiſpiel. Ein Körper auf dem Monde erhält von der Mondmaſſe die Acceleration $p_1 = 5$ Fuß und von der Erde die Acceleration $p_2 = 0{,}01$ Fuß. Es fällt daher ein Körper A, Fig. 51, außerhalb des Mondes M und der Erde E mit 5,01 Fuß und ein Körper B innerhalb M und E mit 4,99 Fuß Beſchleunigung dem Mittelpunkte des Mondes zu.

§. 29. Hat ein Körper zwei in den Richtungen von einander abweichende Bewegungen zugleich, ſo nimmt er eine zwiſchen beiden inneliegende Bewegungsrichtung an, und ſind dieſe Bewegungen ungleichartig, iſt z. B. die eine gleichförmig und die andere gleichförmig beſchleunigt, ſo iſt die Richtung an jeder Stelle der Bewegung eine andere, die Bewegung ſelbſt alſo eine krummlinige. Parallelogramm der Geſchwindigkeiten.

Man findet den Ort O Fig. 52, welchen ein nach den Richtungen AX und AY zugleich bewegter Körper nach einer gewiſſen Zeit (t) einnimmt, wenn man den vierten Eckpunkt (O) des Parallelogrammes $AMON$ aufſucht, das durch die gleichzeitigen Wege $AM = x$ und $AN = y$, ſowie durch den Winkel XAY gegeben iſt, um welchen die Bewegungsrichtungen von einander abweichen. Von der Richtigkeit dieſes Verfahrens wird man überzeugt, wenn man die Wege x und y als nicht auf einmal, ſondern nach einander zurückgelegt annimmt. Vermöge der einen Bewegung durchläuft der Körper den Weg $AM = x$, und vermöge der andern von M aus in der Richtung AY, alſo in einer mit AY parallelen Linie MZ, den Weg $AN = y$. Macht man nun $MO = AN$, ſo bekommt man in O den Ort des Körpers, welcher beiden Bewegungen x und y zugleich entſpricht und der, der Conſtruction zu Folge, der vierte Eckpunkt eines Paralelogrammes $AMON$

Fig. 52.

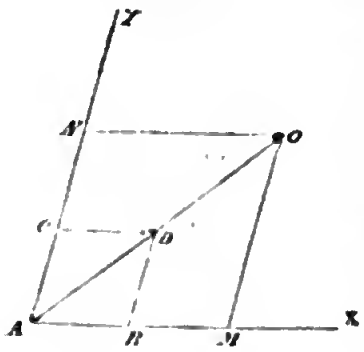


Parallelogramm der Geſchwindigkeiten.

iſt. Auch kann man ſich vorſtellen, daß der Raum $AM = x$ in einer Linie AX zurückgelegt werde, die mit allen ihren Punkten zugleich in der Richtung AY fortgeht, alſo auch M mit AY parallel fortführt und dieſen Punkt den Weg $MO = AN = y$ beſchreiben läßt.

§. 30. Erfolgen die beiden Bewegungen in den Richtungen AX und AY gleichförmig und mit den Geſchwindigkeiten c_1 und c_2, ſo ſind die Räume nach einer gewiſſen Zeit (t): $x = c_1 t$ und $y = c_2 t$; es iſt alſo ihr Verhältniß $\frac{y}{x} = \frac{c_2}{c_1}$ zu allen Zeiten daſſelbe, eine Eigenthümlichkeit, die nur der geraden Linie AO, Fig. 53, zukommt. Es folgt alſo hieraus, daß die zuſammengeſetzte Bewegung in einer geraden Linie vor ſich geht. Conſtruirt man ferner aus den Geſchwindigkeiten $AB = c_1$ und $AC = c_2$ das Parallelogramm $ABCD$, ſo gibt deſſen vierter Eckpunkt den Ort D an, wo ſich der Körper am Ende einer Secunde befindet. Da aber die reſultirende Bewegung eine geradlinige iſt, ſo folgt, daß dieſe überhaupt in der Richtung der Diagonale des aus den Geſchwindigkeiten conſtruirten Parallelogrammes vor ſich geht. Bezeichnet man nun den Weg AO, welcher in der Zeit t wirklich zurückgelegt wird, durch s, ſo hat man wegen Aehnlichkeit der Dreiecke AMO und ABD: $\frac{s}{x} = \frac{AD}{AB}$, es folgt demnach dieſer Weg $s = \frac{x \cdot AD}{AB} = \frac{c_1 t \cdot AD}{c_1} = AD \cdot t$. Der letzten Gleichung zufolge iſt der Weg in der Diagonale der Zeit (t) proportional, alſo die Bewegung ſelbſt gleichförmig und die Diagonale AD ihre Geſchwindigkeit.

Fig. 53.

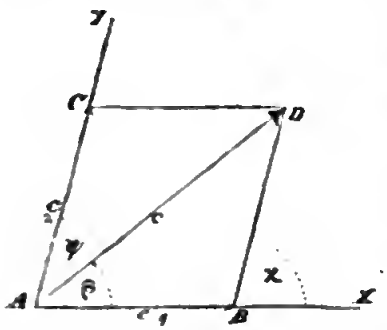


Es gibt alſo die Diagonale eines aus zwei Geſchwindigkeiten und dem von ihnen eingeſchloſſenen Winkel gebildeten Parallelogrammes die Richtung und Größe derjenigen Geſchwindigkeit an, mit welcher die reſultirende Bewegung wirklich vor ſich geht. Man nennt dieſes Parallelogramm Parallelogramm der Geſchwindigkeiten (franz. parallélogramme des vitesses, engl. parallelogram of velocities), die einfachen Geſchwindigkeiten heißen auch wohl Componenten oder Seitengeſchwindigkeiten (franz. composantes, engl. components) und die zuſammengeſetzte Geſchwindigkeit die reſultirende oder mittlere (franz. resultante, engl. resultant).

§ 31. Durch die Anwendung trigonometriſcher Formeln läßt ſich die Richtung und Größe der mittleren Geſchwindigkeit auch rechnend finden. Die Auflöſung von einem der gleichen Dreiecke z. B. von ABD, aus denen das Parallelogramm $ABDC$ (Fig. 54) der Geſchwindigkeiten beſteht, gibt die mittlere Geſchwindigkeit $AD = c$ aus der Seitengeſchwindigkeiten $AB = c_1$ und $AC = c_2$ und dem von ihren Richtungen gebildeten Winkel $BAC = \alpha$ durch die Formel: $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + 2\,c_1 c_2 \cos.\alpha}$, und den Winkel $BAD = \varphi$, den die mittlere Geſchwindigkeit mit der Geſchwindigkeit c_1 einſchließt, durch die Formel

Parallelogramm der Geſchwindigkeiten.

Fig. 54.



$$\sin.\varphi = \frac{c_2 \sin.\alpha}{c} \text{ oder } tang.\varphi = \frac{c_2 \sin.\alpha}{c_1 + c_2 \cos.\alpha}.$$

Sind die Geſchwindigkeiten c_1 und c_2 einander gleich, iſt alſo das Parallelogramm derſelben ein Rhombus, ſo ergibt ſich einfacher, wegen der Rechtwinkeligkeit zwiſchen den Diagonalen:

$$c = 2\,c_1 \cos.\tfrac{1}{2}\alpha \text{ und } \varphi = \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Schließen endlich die Geſchwindigkeiten einen Rechtwinkel ein, ſo erhält man ebenfalls einfacher:

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \text{ und } tang.\ \varphi = \frac{c_2}{c_1}.$$

Beiſpiele: 1) Das aus einem Gefäße oder aus einer Maſchine ausfließende Waſſer hat eine Geſchwindigkeit $c_1 = 25$ Fuß, während ſich das Gefäß ſelbſt mit einer Geſchwindigkeit $c_2 = 19$ Fuß in einer Richtung bewegt, die mit der des ausfließenden Waſſers einen Winkel $\alpha^0 = 130^0$ bildet. Welches iſt die Richtung und Größe der reſultirenden, oder wie man wohl ſagt, der abſoluten Geſchwindigkeit?

Es iſt $c = \sqrt{25^2 + 19^2 + 2.25.19\ cos.130^0} = \sqrt{625 + 361 - 50.19.\ cos\ 50^0}$

$= \sqrt{986 - 950\,cos.\ 50^0} = \sqrt{986 - 610{,}7} = \sqrt{375{,}3} = 19{,}37$ Fuß, die geſuchte reſultirende Geſchwindigkeit.

Ferner $sin.\ \varphi = \frac{19\ sin.\ 130^0}{19{,}37} = 0{,}9808\ sin.\ 50^0 = 0{,}7513$, und ſonach der Winkel, um welchen die Reſultirende von der Geſchwindigkeit c_1 abweicht, $\varphi = 48^0, 42'$, alſo der Winkel, welchen ſie mit der Bewegungsrichtung des Gefäßes einſchließt: $\alpha - \varphi = 81^0, 18'$.

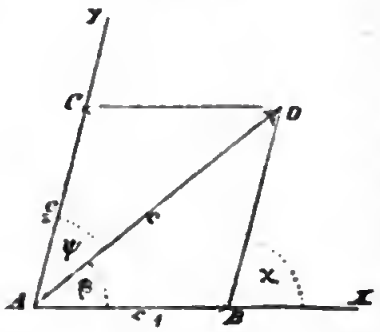
2) Wären die vorigen Geſchwindigkeiten winkelrecht gegen einander gerichtet, ſo würde $cos.\ \alpha = cos.\ 90^0 = 0$ und deshalb die mittlere Geſchwindigkeit $c = \sqrt{986} = 31{,}40$ Fuß ſein; für ihre Richtung wäre $tang.\ \varphi = {}^{19}/_{25} = 0{,}76$, daher die Abweichung derſelben von der erſten Geſchwindigkeit: $\varphi = 37^0, 14'$.

§. 32. Man kann auch jede gegebene Geſchwindigkeit aus zwei Seitengeſchwindigkeiten beſtehend anſehen, und deshalb, gewiſſen Bedingungen entſprechend, in ſolche zerlegen. Sind z. B. die Winkel $DAB = \varphi$, und

Parallelogramm der Geſchwindigkeiten.

$DAC = \psi$ Fig. 55. gegeben, welche die zu ſuchenden Geſchwindigkeiten mit der mittleren $AD = c$ einſchließen ſollen, ſo ziehe man durch den Endpunkt D der die c vorſtellenden Graden andere Linien parallel zu den Richtungen AX und AY: die ſich ergebenden Durchſchnittspunkte ſchneiden nun die geſuchten Geſchwindigkeiten $AB = c_1$ und $AC = c_2$ ab.

Fig. 55.



Die Trigonometrie gibt dieſe Geſchwindigkeiten durch die Formeln

$$c_1 = \frac{c \sin.\psi}{\sin.(\varphi + \psi)}, \quad c_2 = \frac{c \sin.\varphi}{\sin.(\varphi + \psi)}.$$

In den gewöhnlichen Fällen der Anwendung ſind die beiden Geſchwindigkeiten winkelrecht gegen einander, dann iſt alſo $\varphi + \psi = 90^o$, $\sin.(\varphi + \psi) = 1$, und es folgt:

$$c_1 = c \cos.\varphi \text{ und } c_2 = c \sin.\psi.$$

Uebrigens kann auch aus einer Seitengeſchwindigkeit (c_1) und ihrem Richtungswinkel (φ) die Richtung und Größe der andern Seitengeſchwindigkeit gefunden werden. Endlich laſſen ſich auch aus den Geſchwindigkeiten c, c_1 und c_2 ihre Richtungswinkel beſtimmen, wie man aus den drei Seiten eines Dreiecks die Winkel deſſelben findet.

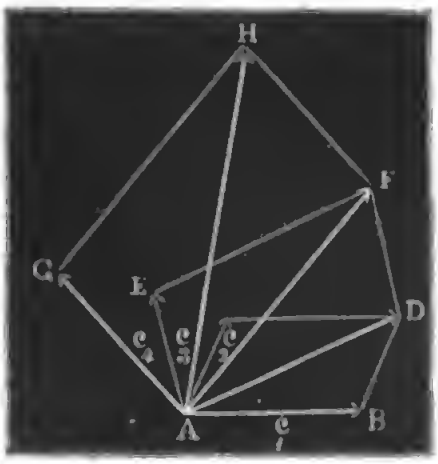
Beiſpiel: Es ſei die Geſchwindigkeit $c = 10$ Fuß in zwei Seitengeſchwindigkeiten zu zerlegen, welche um die Winkel $\varphi = 65°$ und $\psi = 70°$ von ihrer Richtung abweichen. Dieſe Geſchwindigkeiten ſind

$$c_1 = \frac{10 \sin.70^o}{\sin.135^o} = \frac{9{,}397}{\sin.45^o} = 13{,}29 \text{ Fuß und } c_2 = \frac{10 \sin.65^o}{\sin.135^o} = \frac{9{,}063}{0{,}7071} = 12{,}81 \text{ Fuß.}$$

Zuſammenſetzung und Zerlegung der Geſchwindigkeiten.

§. 33. Durch wiederholte Anwendung des Parallelogrammes der Geſchwindigkeiten läßt ſich jede beliebige Anzahl von Geſchwindigkeiten in eine einzige verwandeln. Durch Conſtruction des Parallelogrammes $ABDC$ (Fig. 56) ergibt ſich die mittlere Geſchwindigkeit AD zu c_1 und c_2; durch Conſtruction des Parallelogrammes $ADFE$ erhält man in AF die mittlere Geſchwindigkeit zu AD und $AE = c_3$, und ebenſo ſtellt ſich durch Conſtruction des Parallelogrammes $AFHG$ die mittlere Geſchwindigkeit $AH = c$ von AF und $AG = c_4$, und dadurch auch die von c_1, c_2, c_3 und c_4 heraus.

Fig. 56.

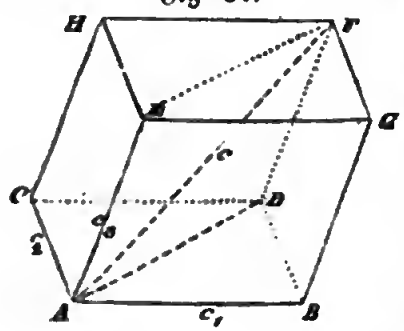


Am einfachſten ergibt ſich die in Frage ſtehende mittlere Geſchwindig-

keit durch Construction eines Polygones $ABDFH$, dessen Seiten AB, BD, DF und FH den gegebenen Geschwindigkeiten c_1, c_2, c_3 und c_4 parallel und gleich gemacht werden, und dessen letzte Seite AH allemal die resultirende Geschwindigkeit ist. Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten.

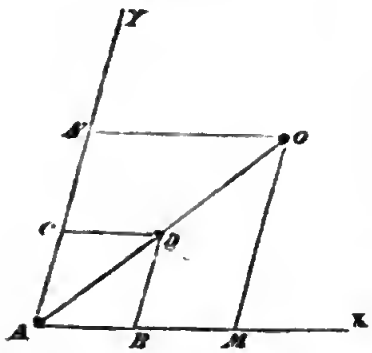
Auch in dem Falle, wenn die Geschwindigkeiten nicht in einerlei Ebene liegen, läßt sich die mittlere Geschwindigkeit durch mehrfache Anwendung des Parallelogrammes der Geschwindigkeiten finden. Die mittlere Geschwindigkeit $AF=c$ (Fig. 57.) von drei nicht in einer Ebene befindlichen Geschwindigkeiten $AB=c_1$, $AC=c_2$ und $AE=c_3$ ist die Diagonale eines Parallelepipeds $BCHG$, dessen Seiten diesen Geschwindigkeiten gleich sind. Man spricht daher wohl auch von einem Parallelepiped der Geschwindigkeiten.

Fig. 57.



§. 34. Zwei gleichförmig beschleunigte und mit Null Geschwindigkeit anfangende Bewegungen geben in ihrer Zusammensetzung wieder eine gleichförmig beschleunigte Bewegung in der geraden Linie. Sind die Accelerationen dieser nach den Richtungen AX und AY (Fig. 58) vor sich gehenden Bewegungen p_1 und p_2, so sind am Ende der Zeit t die Räume $AM=x=\frac{p_1t^2}{2}$ und $AN=y=\frac{p_2t^2}{2}$, und es ist ihr Verhältniß $\frac{y}{x}=\frac{p_1t^2}{p_2t^2}=\frac{p_1}{p_2}$ von der Zeit gar nicht abhängig, deshalb also der Weg AO der zusammengesetzten Bewegung ein geradliniger. Macht man $AB=p_1$, und $BD=AC=p_2$, so bekommt man ein Parallelogramm $ABDC$, welches dem Parallelogramm $AMON$ ähnlich und für welches Zusammensetzung der Accelerationen.

Fig. 58.



$$\frac{AO}{AD}=\frac{AM}{AB}=\frac{\frac{1}{2}p_1t^2}{p_1}=\frac{1}{2}t^2, \text{ also } AO=\frac{1}{2}AD\,.\,t^2 \text{ ist.}$$

Dieser Gleichung zufolge ist der Weg AO der zusammengesetzten Bewegung dem Quadrate der Zeit proportional, die Bewegung selbst also gleichförmig beschleunigt, und die Acceleration derselben die Diagonale AD des aus den einfachen Accelerationen p_1 und p_2 construirten Parallelogrammes.

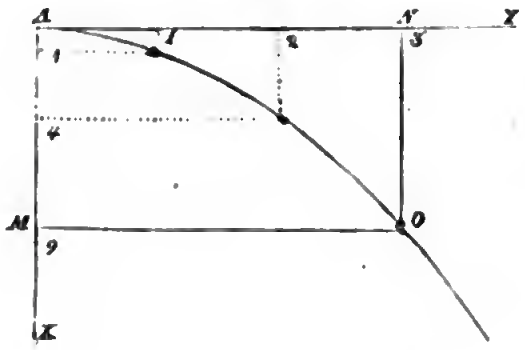
So wie man also durch das Parallelogramm der Geschwindigkeiten Geschwindigkeiten zusammensetzt und zerlegt, ebenso lassen sich nach genau denselben Regeln durch ein Parallelogramm, welches man das Parallelogramm der Accelerationen (franz. parallélogramme des accélé-

rations, engl. parallelogram of accelerations) nennt, Acceleration zu einer einzigen vereinigen, und in mehrere andere zerlegen.

Zuſammenſetzung von Geſchwindigkeiten und Accelerationen.

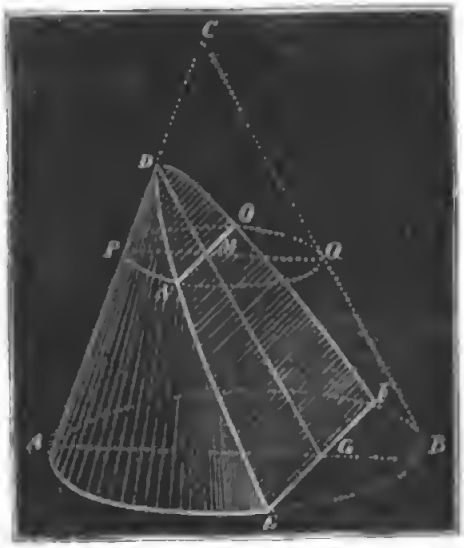
§. 35. Aus der Vereinigung von einer gleichförmigen Bewegung mit einer gleichförmig beſchleunigten geht eine gänzlich ungleichförmige Bewegung hervor, wenn die Bewegungsrichtungen nicht zuſammenfallen. In einer gewiſſen Zeit t wird bei der Geſchwindigkeit c in der einen Richtung AY, Fig. 59, der Weg $AN = y = ct$ und in derſelben Zeit bei einer unveränderlichen Acceleration in einer gegen die erſtere rechtwinkeligen Richtung AX der Weg $AM = x = \frac{pt^2}{2}$ zurückgelegt, und es iſt der Körper im Eckpunkte O des aus $y = ct$ und $x = \frac{pt^2}{2}$ conſtruirten Parallelogrammes.

Fig. 59.



Mit Hülfe dieſer Formeln läßt ſich zwar der Ort des Körpers zu jeder Zeit finden, allein derſelbe liegt nicht in einer und derſelben Geraden, denn nehmen wir aus der erſten Gleichung $t = \frac{y}{c}$ und ſetzen dieſen Werth in die zweite, ſo erhalten wir die Gleichung $x = \frac{p\,y^2}{2c^2}$. Dieſer zufolge verhalten ſich die Wege (x) in der zweiten Bewegungsrichtung nicht wie die in der erſten, ſondern wie die Quadrate (y^2) derſelben in der erſten und es iſt deshalb der Weg des Körpers auch keine gerade, ſondern eine gewiſſe krumme Linie, die man in der Geometrie unter dem Namen die Parabel (franz. parabole, engliſch parabola) kennen lernt.

Fig. 60.



Anmerkung. Es ſei ABC, Fig. 60, ein Kegel mit kreisförmiger Baſis $AEBF$, DEF ein Schnitt deſſelben parallel zur Seitenlinie BC und winkelrecht zum Durchſchnitt ABC geführt, und $OPNQ$ ein zweiter, mit der Baſis paralleler

und deswegen ebenfalls kreisförmiger Durchschnitt. Es sei ferner EF die Durchschnittslinie zwischen der Basis und dem zweiten Schnitte, und ON die zwischen beiden Schnitten; denken wir uns endlich im triangulären Durchschnitte ABC die parallelen Durchmesser AB und PQ und im Schnitte DEF die Axe DG geführt. Alsdann gilt für die halbe Kreissehne $MN = MO$ die Gleichung $MN^2 = PM \times MQ$; aber MQ ist $= BG$ und für PM gilt die Proportion $PM : MD = AG : DG$, es folgt daher $MN^2 = BG \times \frac{DM \times AG}{DG}$. Ebenso ist aber auch $GE^2 = BG \times AG$; dividirt man daher beide Gleichungen durch einander, so folgt

$\frac{DM}{DG} = \frac{\overline{MN}^2}{\overline{GE}^2}$; es verhalten sich also die auf der Axe abgeschnittenen Stücke (Abscissen), wie die Quadrate der entsprechenden Perpendikel (Ordinaten). Dieses Gesetz stimmt mit dem oben gefundenen Bewegungsgesetze vollkommen überein; es geht also diese Bewegung in einer krummen Linie DNE vor sich, die man als Schnitt am Kegel (Kegelschnitt) nachweisen kann.

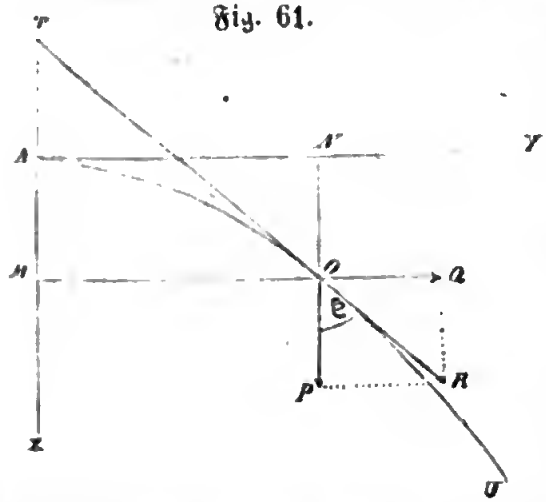
Zusammensetzung von Geschwindigkeiten und Accelerationen.

§. 36. Um die aus der Zusammensetzung von Geschwindigkeit und Acceleration hervorgehende Bewegung vollständig zu kennen, muß man auch noch die Richtung, Geschwindigkeit und den durchlaufenen Weg für jede Zeit (t) angeben können. Die Geschwindigkeit parallel zu AY ist unveränderlich $= c$, die parallel zu AX aber veränderlich und $= pt$, construirt man nun aus dieser Geschwindigkeit $OQ = c$ und $OP = pt$ das Parallelogramm $OPRQ$, Fig. 61, so erhält man in der Diagonale OR desselben die mittlere oder diejenige Geschwindigkeit, mit welcher der Körper in O die parabolische Bahn AOU verfolgt. Diese Geschwindigkeit selbst ist $v = \sqrt{c^2 + pt^2}$.

Parabelbewegung.

Ebenso giebt OR die Tangente oder Richtung, in welcher der Körper in O einen Augenblick lang fortgeht, und es ist für den Winkel $POR = XTO = \varphi$,

Fig. 61.



welchen dieselbe mit der zweiten Richtung (Axe) AX einschließt, durch die Formel

$$tang.\ \varphi = \frac{OQ}{OP} = \frac{c}{pt}$$

gegeben.

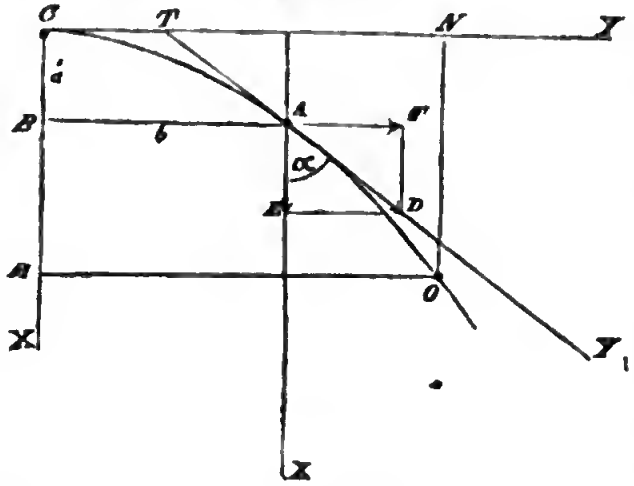
Um endlich noch den durchlaufenen Raum oder Curvenbogen $AO = s$ zu finden, kann man sich der Gleichung $\sigma = vt$ (§. 19), wonach sich, als Elemente anzusehende kleine Theile desselben berechnen lassen, bedienen. Uebrigens giebt auch die höhere Geometrie eine complicirte Formel zur Berechnung eines Parabelbogens.

§. 37. Wir haben seither angenommen, daß die ursprünglichen Beweg-

Parabelbewegung.

ungsrichtungen einen Rechtwinkel einſchließen, und müſſen nun noch denjenigen Fall näher kennen lernen, bei welchem die Richtung der Acceleration mit der Geſchwindigkeit einen gewiſſen Winkel einſchließt. Hat der Körper in der Richtung AY_1 (Fig. 62) die Geſchwindigkeit c und in der Richtung AX_1, welche mit der erſten den Winkel $X_1AY_1 = \alpha$ einſchließt, die Acceleration p, ſo iſt A nicht mehr Scheitel und AX_1 nicht mehr Axe, ſondern nur die Axenrichtung der Parabel. Der Scheitel C ſteht vielmehr um die Coordinaten $CB = a$ und $BA = b$, wovon die erſtere in die Axe ſelbſt fällt und die letztere winkelrecht darauf ſteht, von dem Anfangspunkte A der Bewegung ab. Die Geſchwindigkeit $AD = c$ beſteht aus den Seitengeſchwindigkeiten $AF = c\ sin.\ \alpha$ und $AE = c\ cos.\ \alpha$. Von ihnen iſt die erſtere immer dieſelbe, die letztere aber der veränderlichen Geſchwindigkeit pt gleich zuſetzen, vorausgeſetzt, daß der Körper die Zeit t nöthig gehabt hat, um vom Scheitel C nach dem eigentlichen Anfangspunkte A zu gelangen. Es ergiebt ſich alſo $c\ cos.\ \alpha = pt$, folglich $t = \frac{c\ .\ cos.\ \alpha}{p}$, und

Fig. 62.



1) $CB = a = \frac{pt^2}{2} = \frac{c^2\ cos.\ \alpha^2}{2p}$, und

2) $BA = b = c\ sin.\ \alpha\ .\ t = \frac{c^2\ sin.\ \alpha\ cos.\ \alpha}{p} = \frac{c^2\ sin.\ 2\alpha}{2p}$.

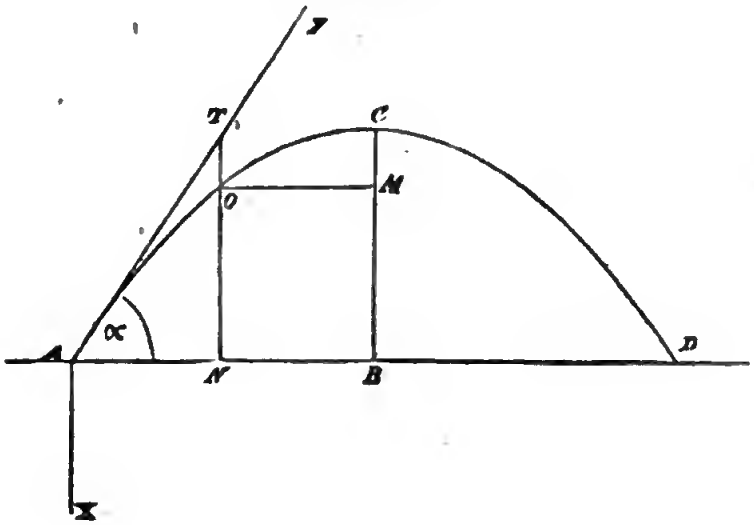
Hat man durch dieſe Abſtände den Scheitel C der Parabel gefunden, ſo kann man, von da ausgehend, für jede beliebige Zeit den Ort O des Körpers finden. Uebrigens gilt auch: $CM = x$ und $MO = y$ ſetzend, die allgemeine Formel $x = \frac{p\,y^2}{2\,c^2 sin.\,\alpha^2}$, oder $y = c\ sin.\ \alpha \sqrt{\frac{2x}{p}}$.

Anmerkung. Die ſeither abgehandelte Theorie der paraboliſchen, aus einer unveränderlichen Geſchwindigkeit und einer conſtanten Acceleration hervorgehenden Bewegung findet ihre Anwendung in der Balliſtik, oder der Lehre von der Wurfbewegung. Die ſchief auf- oder abwärts geworfenen Körper würden in Folge ihrer Anfangsgeſchwindigkeit (c) und der Acceleration der Schwere ($g = 31\frac{1}{4}$ Fuß) einen Parabelbogen durchlaufen, wenn der Widerſtand der Luft beſeitigt wäre, oder die Bewegung im luftleeren Raume vor ſich ginge. Iſt die

Wurfgeſchwindigkeit nicht groß und der geworfene Körper ſehr ſchwer in Hinſicht auf ſein Volumen, ſo fällt die Abweichung von der Parabel klein genug aus, um dieſelbe ganz vernachläſſigen zu können. Am vollkommenſten wird aber die paraboliſche Bahn durch Waſſerſtrahlen, wie ſie ſich beim Ausfluſſe aus Gefäßen, bei Spritzen u. ſ. w. bilden, vorgefunden. Abgeſchoſſene Körper, wie z. B. Geſchützkugeln, beſchreiben in Folge des großen Luftwiderſtandes von der Parabel bedeutend abweichende Bahnen. Parabelbewegung.

§. 38. Ein unter dem Elevationswinkel $YAD = \alpha$ (Fig. 63) abgeſchoſſener Körper ſteigt auf eine gewiſſe Höhe BC, welche die Wurfhöhe (franz. hauteur du jet, engl. height of projection) genannt wird, und er erreicht die Horizontalebene, von der er in A ausgegangen iſt, in einer Entfernung AD, welche die Wurfweite (franz. amplitude du jet, engl. range of projection) heißt.

Fig. 63.



Aus der Geſchwindigkeit c, der Acceleration g und dem Elevationswinkel folgt, nach §. 37, indem man p durch g und α^0 durch $90^0 + \alpha^0$, alſo *cos.* α durch *sin.* α erſetzt:

$$\text{die Wurfhöhe } CB = a = \frac{c^2 \sin.\alpha^2}{2g} \text{ und}$$

$$\text{die halbe Wurfweite } AB = b = \frac{c^2 \sin.2\alpha}{2g}.$$

Für einen Punkt O der Wurfbahn hat man, wenn $CM = x$ und $MO = y$ deſſen Coordinaten ſind, $x = \frac{g y^2}{2 c^2 \cos.\alpha^2}$, oder, wenn er durch die Coordinaten $AN = x_1$ und $NO = y_1$ angegeben werden ſoll,

Digitized by Google

Parabelbewegung.

$$y_1 = CB - CM = a - x = a - \frac{g(b-x_1)^2}{2c^2 \cos.\alpha^2}, \text{ d. i.}$$

$$y_1 = x_1 \, tang.\, \alpha - \frac{g x_1^2}{2c^2 \cos.\alpha^2}.$$

Aus der Formel für die Wurfweite erſieht man, daß dieſe am größten ausfällt, wenn $sin.\ 2\alpha = 1$, alſo $2\alpha = 90^0$, d. i. $\alpha = 45^0$ iſt. Ein unter dem Elevationswinkel von 45 Grad aufſteigender Körper erreicht alſo die größte Wurfweite.

Beiſpiel: 1) Ein unter dem Elevationswinkel von 66° mit 20 Fuß Geſchwindigkeit aufſteigender Waſſerſtrahl, dem alſo die Geſchwindigkeitshöhe $h = 0{,}0\,16 . 20^2 = 6{,}4$ Fuß zukommt, ſteigt auf die Höhe $b = h\ sin.\ \alpha^2 = 6{,}4\ (sin.\ 66^0)^2 = 5{,}34$ Fuß und hat die Wurf- oder Sprungweite $a = 2 . 6{,}4\ sin.\ 132^0 = 2 . 6{,}4\ sin.\ 48^0 = 9{,}51$ Fuß. Die Zeit, welche jedes Waſſertheilchen braucht, um den ganzen Parabelbogen ACD zu durchlaufen, iſt $t = \frac{2c\ sin.\alpha}{g} = \frac{2 . 20 . sin.\ 66^0}{31{,}25} = 1{,}17$ Secunde. Die Höhe, welche dem Horizontalabſtande $AN = x_1 = 3$ Fuß entſpricht, iſt

$$y_1 = 3 . tang.\ 66^0 - \frac{31{,}25 . 9}{2 . 400 . (cos.\ 66^0)^2} = 6{,}738 - \frac{0\,35156}{0{,}16543} = 6{,}738 - 2{,}125 = 4{,}613 \text{ Fuß.}$$

2) Der aus einer horizontalen Röhre ausfließende Waſſerſtrahl hat auf einer Höhe von 1¾ Fuß eine Sprungweite (halber Wurfweite) von 5¼ Fuß, wie groß iſt die Geſchwindigkeit des Waſſers?

Aus der Formel $x = \frac{gy^2}{2c^2} = \frac{y^2}{4h}$ folgt $h = \frac{y^2}{4x}$, hierin $x = 1{,}75$ und $y = 5{,}25$ geſetzt, $h = \frac{5{,}25^2}{4 . 1{,}75} = 3{,}937$ Fuß, und die dieſer Höhe entſprechende Geſchwindigkeit $c = 15{,}68$ Fuß.

Anmerkung. Ueber die Conſtruction, Tangentenlage und andere Eigenſchaften der Parabel findet man das Nähere im »Ingenieur, Seite 242,«.

Krummlinige Bewegungen überhaupt.

§. 39. Aus der Vereinigung von mehreren Geſchwindigkeiten und mehreren unveränderlichen Acceleration entſpringt ebenfalls eine paraboliſche Bewegung, denn es laſſen ſich nicht nur die Geſchwindigkeiten, ſondern auch die Acceleration zu einer einzigen vereinigen; es iſt alſo das Ergebniß daſſelbe, als wenn nur eine Geſchwindigkeit und nur eine Acceleration, d. i. nur eine gleichförmige, und nur eine gleichförmig beſchleunigte Bewegung vorhanden wäre

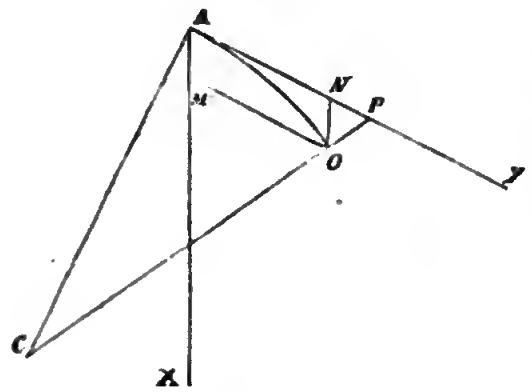
Sind die Acceleration veränderlich, ſo kann man ſie ebenſo gut zu einer mittleren vereinigen, als wenn ſie conſtant wären, denn es iſt erlaubt, dieſelben in einem unendlich kleinen Zeittheilchen (τ) als unveränderlich, die entſprechenden Bewegungen alſo innerhalb dieſes Theilchens als gleichförmig beſchleunigt anzuſehen. Allerdings iſt die reſultirende Acceleration veränderlich, wie ihre Componenten ſelbſt. Vereinigt man nun dieſe reſultirende Acceleration mit der gegebenen Geſchwindigkeit, ſo läßt ſich ein kleiner Parabelbogen angeben, in welchem die Bewegung während

eines kleinen Zeittheilchens ſtatthat. Beſtimmt man ſo für das folgende Zeittheilchen wieder die Geſchwindigkeit und die mittlere Acceleration, ſo läßt ſich ein neues, einer andern Parabel angehöriges Bogenſtück finden, und fährt man ſo fort, ſo erhält man nach und nach die vollſtändige Bahn. Krummlinige Bewegungen überhaupt.

§. 40. Man kann jeden kleinen Bogentheil irgend einer Curve als einen Kreisbogen anſehen. Der Kreis, welchem dieſer Bogen zugehört, heißt Krümmungskreis (franz. cercle osculateur, engl. circle of curvature), ſein ihm zugehöriger Halbmeſſer aber Krümmungshalbmeſſer (franz. rayon de courbure, engl. radius of curvature). Es läßt ſich ebenſo die Bahn eines bewegten Körpers aus Kreisbogen zuſammenſetzen, und deshalb eine Formel für ihre Halbmeſſer entwickeln.

Es ſei AM (Fig. 64) ein ſehr kleiner gleichförmig beſchleunigt zurückgelegter Weg $x = \frac{p\tau^2}{2}$ in der Richtung AX, und AN ein ſehr kleiner, gleichförmig durchlaufener Weg $y = c\tau$, und O der vierte Endpunkt des aus x und y conſtruirten Parallelogramms, d. i. der Punkt, welchen der von A ausgehende Körper am Ende des Zeittheilchens (τ) einnimmt. Legen wir AC rechtwinkelig gegen AY und ſehen wir nun zu, aus welchem Punkte C in dieſer Linie ſich ein kleiner Kreisbogen durch A und O beſchreiben läßt. Wegen der Kleinheit des Bogens AO können wir annehmen, daß nicht allein CA, ſondern auch COP rechtwinkelig gegen AY ſtehe, daß alſo im kleinen Dreiecke NOP der Winkel NPO ein rechter ſei. Die Auflöſung dieſes Dreiecks giebt $OP = ON \sin. ONP = AM \sin. XAY = \frac{p\tau^2}{2} \sin. \alpha$, und die Tangente $AP = AN + NP = c\tau + \frac{p\tau^2}{2} \cos. \alpha = (c + \frac{p\tau}{2} \cos. \alpha).\ \tau$ läßt ſich $= c\tau$ ſetzen, weil $\frac{p\tau}{2} \cos. \alpha$ wegen des unendlich kleinen Factors τ gegen c verſchwindet. Nun iſt aber nach der Lehre vom Kreiſe $\overline{AP}^2 = PO \times (PO + 2\,CO)$, oder, da PO gegen $2CO$ verſchwindet, $\overline{AP}^2 = PO \times 2CO$; es folgt daher der geſuchte Krümmungshalbmeſſer

Fig. 64.



$$CA = CO = r = \frac{\overline{AP}^2}{2PO} = \frac{c^2\tau^2}{p\tau^2 \sin. \alpha} = \frac{c^2}{p \sin. \alpha}.$$

Durch dieſelbe Formel laſſen ſich die Krümmungshalbmeſſer aller Bo-

Digitized by Google

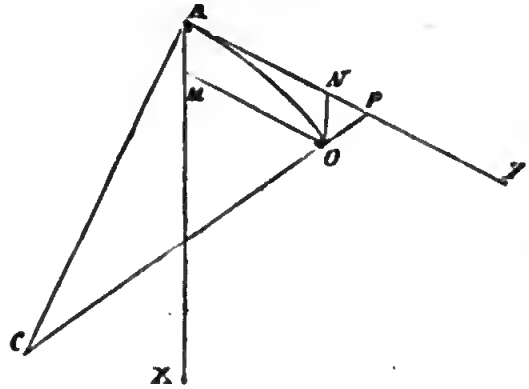
Krummlinige Bewegungen überhaupt.

genelemente finden, wenn man nur die jedesmalige Geſchwindigkeit (c), Acceleration (p) und den Winkel (α) einführt, welchen die letztere mit der Geſchwindigkeit oder mit der durch eine Berührungslinie angegebenen Bewegungsrichtung einſchließt.

Beiſpiel: Für die durch die Acceleration der Schwere bewirkte paraboliſche Bahn iſt $r = 0{,}032\,\frac{c^2}{\sin.\alpha}$, und im Scheitel dieſer Curven, wo $\alpha = 90°$, alſo $\sin.\alpha = 1$, fällt $r = 0{,}032\,c^2$ aus. Bei einer Geſchwindigkeit von 20 Fuß ergäbe ſich alſo $r = 12{,}8$ Fuß; jemehr ſich aber der Körper vom Scheitel entfernt, deſto kleiner wird α und deſto größer wird alſo auch der Krümmungshalbmeſſer.

§. 41. Geht man von einer Stelle A (Fig. 65.) aus, wo die Acceleration in einer Richtung AC winkelrecht zur Bewegungsrichtung AY ſtatthat, iſt alſo $\alpha = 90°$, ſo hat man den Krümmungshalbmeſſer $CA = r = \frac{c^2}{p}$, und es iſt die Geſchwindigkeit im folgenden Punkte O zuſammengeſetzt aus c und aus $p\tau$, daher

Fig. 65.



$$v = \sqrt{c^2 + p^2\tau^2} = c + \frac{p^2\tau^2}{2c},$$

weil τ unendlich klein iſt gegen c.

Schreiben wir $v = c + \frac{p^2}{2c}\,\tau \,.\, \tau$,

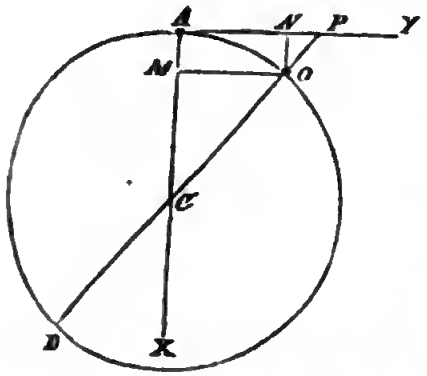
ſo können wir $\frac{p^2\tau}{2c}$ als Acceleration, und $\frac{p^2\tau}{2c} \,.\, \tau$ als einen dieſer entſprechenden Zuſatz an Geſchwindigkeit anſehen. Weil aber τ unendlich klein iſt, ſo fällt auch die Acceleration $\frac{p^2\tau}{2c}$ unendlich klein aus, man hat alſo in einer Secunde nur einen unendlich kleinen Zuwachs an Geſchwindigkeit, und kann folglich die Bewegung als gleichförmig anſehen, d. i. $v = c$ ſetzen.

Aendert ſich mit der Bewegungsrichtung auch die Richtung der Acceleration, und bleibt dieſelbe immer winkelrecht auf jener, ſo iſt ſonach auch immer $v = c$; es bleibt alſo die Geſchwindigkeit der Bewegung unverändert, wie ſie anfangs war, nämlich $= c$. Man nennt eine ſolche immer winkelrecht gegen die Bewegung ſtehende, oder den Körper immer, winkelrecht von der Bewegung ablenkende Acceleration (Normalacceleration (franz. accélération normale, engl. normal-acceleration), und weiß alſo hiernach, daß dieſe allein eine Geſchwindigkeitsveränderung nicht, ſondern nur eine Ablenkung von der Geraden bewirkt. Nach der obigen Formel $r = \frac{c^2}{p}$ haben wir die Normalacceleration $p = \frac{c^2}{r}$

= Quadrat der Geschwindigkeit dividirt durch den jedesmaligen Krümmungshalbmesser zu setzen. Krummlinige Bewegungen überhaupt.

Beim Kreis AOD (Fig. 66) ist der Krümmungshalbmesser (r) der Kreishalbmesser $CA = CO$ selbst; daher ist bei der Bewegung in demselben die Acceleration $p = \frac{c^2}{r}$ unveränderlich. Eine unveränderliche Acceleration, welche den Körper unaufhörlich rechtwinkelig von seiner Bewegung ablenkt, bewirkt also eine Umdrehung im Kreise.

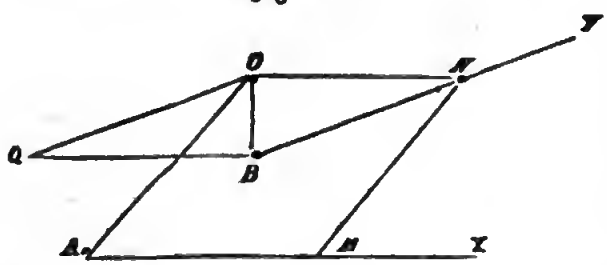
Fig. 66.



Beispiel: Ein Körper, welcher in einem Kreise von 5 Fuß Halbmesser so herumgeht, daß er zu jeder Umdrehung 5 Secunden Zeit braucht, hat die Geschwindigkeit $c = \frac{2\pi r}{t} = \frac{2\pi.5}{5} = 2\,.\,\pi = 6{,}283$ Fuß, und die Normalacceleration $p = \frac{(6{,}283)^2}{5} = 7{,}896$ Fuß; d. h. er wird in jeder Secunde um $\frac{1}{2}p = \frac{1}{2} \times 7{,}896 = 3{,}948$ Fuß von der geraden Linie abgelenkt.

§. 42. Bei der gleichzeitigen Bewegung zweier Körper findet eine immerwährende Veränderung in der gegenseitigen Lage, Entfernung u. s. w. derselben Statt, es läßt sich aber dieselbe mit Hülfe des Obigen für jeden Zeitpunkt finden. Relative Bewegungen.

Fig. 67.



Es sei in Fig. 67 A der Anfangspunkt des einen Körpers, B der des andern; jener rücke in der Richtung AX in einer gewissen Zeit (t) nach M, dieser in der Richtung BY in eben dieser Zeit nach N; ziehen wir nun MN, so erhalten wir in dieser Linie die relative Lage und Entfernung der Körper A und B am Ende dieser Zeit. Legen wir AO parallel mit MN und machen auch $AO = MN$, so wird die Linie AO die gegenseitige Lage der Körper A und B ebenfalls angeben. Ziehen wir noch ON, so erhalten wir ein Parallelogramm, in welchem auch $ON = AM$ ist. Machen wir endlich noch BQ parallel und gleich der NO und ziehen OQ, so erhalten wir ein neues Parallelogramm $BNOQ$, in welchem die eine Seite BN der absolute Weg (y) des zweiten Körpers und die andere Seite BQ der nach entgegengesetzter Richtung gelegte Weg (x) des ersten Körpers, der vierte Eckpunkt O aber der relative Ort des zweiten Körpers

Relative Bewegungen.

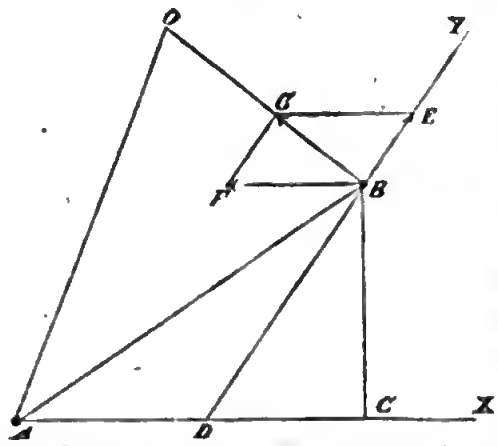
iſt, wofern er nämlich auf den als unveränderlich anzuſehenden Ort des erſten Körpers bezogen wird.

Man findet alſo den relativen Ort O eines bewegten Körpers (B), wenn man dieſem außer ſeiner eigenen Bewegung (BN) noch diejenige AM des Körpers (A), worauf man den Ort bezieht, in umgekehrter Richtung, alſo BQ, beilegt, und nun nach den gewöhnlichen Regeln, z. B. mit Hülfe eines Parallelogrammes $BNOQ$, dieſe Bewegungen zuſammengeſetzt.

§. 43. Sind die Bewegungen der Körper A und B gleichförmig, ſo kann man für AM und BN die Geſchwindigkeiten c und c_1 d. i. die Wege in einer Secunde, einſetzen. Man erhält deshalb die relative Geſchwindigkeit des einen Körpers, wenn man demſelben außer ſeiner eigenen abſoluten Geſchwindigkeit auch noch die des Körpers, auf welchen man die erſte Geſchwindigkeit bezieht, in entgegengeſetzter Richtung beilegt. Auch findet daſſelbe Verhältniß mit den Accelerationen Statt.

Beiſpiel. Ein Dampfwagenzug fährt auf der Schienenbahn AX Fig. 68 von A aus mit 35 Fuß Geſchwindigkeit; ein anderer gleichzeitig von B aus auf einer Bahn BY, welche mit der erſteren den Winkel $BDX = 56°$ einſchließt, mit 20 Fuß Geſchwindigkeit. Wenn nun die anfänglichen Abſtände $AC = 30000$ Fuß und $CB = 24000$ Fuß betragen, wie groß iſt die Entfernung AO beider Wagenzüge nach einer Viertelſtunde? Aus der abſoluten Geſchwindigkeit $BE = c_1 = 20$ Fuß des zweiten Zuges, der umgekehrten Geſchwindigkeit $BF = c = 35$ Fuß des erſten Zuges und dem eingeſchloſſenen Winkel $EBF = \alpha = 180° - BDC = 180° - 56° = 124°$ folgt die relative Geſchwindigkeit des zweiten Zuges:

Fig. 68.



$$BG = \sqrt{c^2 + c_1^2 + 2\,c\,c_1\ cos.\ \alpha} = \sqrt{35^2 + 20^2 - 2.35.20.cos.56°}$$
$$= \sqrt{1225 + 400 - 1400\ cos.56°} = \sqrt{1625 - 782{,}9} = \sqrt{842{,}1} = 29{,}02 \text{ Fuß.}$$

Für den Winkel $GBF = \varphi$, den dieſelbe mit der erſten Bewegungsrichtung einſchließt, iſt

$$sin.\ \varphi = \frac{c_1\ sin.\ 56°}{29{,}02} = \frac{20\,.\,0{,}8290}{29{,}02};\quad Log.\ sin.\ \varphi = 0{,}75690 - 1, \text{ daher } \varphi = 34°{,}50'.$$

Der in 15 Minuten = 900 Sec. relativ durchlaufene Weg iſt $BO = 29{,}02\,.\,900 = 26118$ Fuß, die Entfernung $AB = \sqrt{(30000)^2 + (24000)^2} = 38419$ Fuß, der Winkel $BAC = ABF$, da deſſen Tangente $\frac{24000}{30000} = 0{,}8$ iſt, $= 38°, 40'$, daher der Winkel $ABO = 38°, 40' + \varphi = 38°, 40' + 34°, 50' = 73°\ 30'$, und die Entfernung der beiden Wagenzüge nach 15 Minuten:

$$AO = \sqrt{AB^2 + BO^2 - 2AB\,.\,BO\ cos.\ ABO}$$
$$= \sqrt{38419^2 + 26118^2 - 2\,.\,38419\,.\,26118\ cos.\ 73°,30'}$$
$$= \sqrt{1588190000} = 39850 \text{ Fuß.}$$

Zweiter Abſchnitt.

Mechanik oder phyſiſche Bewegungslehre im Allgemeinen.

Erſtes Kapitel.

Grundbegriffe und Grundgeſetze der Mechanik.

§. 44. Die Mechanik (fr. mécanique, engl. mechanics) iſt die Wiſſen- Mechanik.
ſchaft, welche von den Bewegungsgeſetzen materieller Körper handelt. Sie iſt in ſofern eine Anwendung der Phoronomie auf die Körper der Außenwelt, als die letztere ſich nur mit der Bewegung geometriſcher Körper befaßt.

Die Mechanik iſt ein Theil der Naturlehre (fr. physique générale, engl. natural-philosophy) oder der Lehre von den Geſetzen, nach welchen die Veränderungen in der Körperwelt erfolgen, nämlich derjenige Theil, welcher ſich mit den aus meßbaren Bewegungen hervorgegangenen Veränderungen in der materiellen Welt beſchäftigt.

§. 45. Kraft (fr. force, engl. force) iſt die Urſache der Bewegung Kraft.
oder der Bewegungsveränderung materieller Körper. Jede Bewegungsveränderung, z. B. jede Veränderung in der Geſchwindigkeit eines Körpers iſt als die Wirkung einer Kraft anzuſehen. Aus dieſem Grunde meſſen wir denn auch jedem frei fallenden Körper eine Kraft, die ſogenannte Schwerkraft, bei, weil derſelbe ſeine Geſchwindigkeit unaufhörlich ändert. Auf der andern Seite iſt aus der Ruhe oder aus der Unveränderlichkeit im Bewegungszuſtande eines Körpers noch nicht auf die Abweſenheit von Kräften zu ſchließen, denn es können ſich die Kräfte eines Körpers gegenſeitig aufheben, ohne eine Wirkung übrig zu laſſen. Die Schwerkraft, mit welcher ein Körper zur Erde niederfällt, beſitzt derſelbe auch noch, wenn er auf einem Tiſche ruht, es wird aber hier ihre Wirkung durch die Feſtigkeit des Tiſches oder einer andern Unterlage aufgehoben.

Gleichgewicht. §. 46. Ein Körper iſt im Gleichgewicht (fr. équilibre, engl. equilibrium), oder die Kräfte eines Körpers halten einander das Gleichgewicht, wenn dieſelben ohne eine Wirkung übrig zu laſſen, oder ohne Bewegung zu erzeugen oder zu verändern, einander aufheben oder vernichten.

Bei einem an einem Faden aufgehängten Körper iſt z. B die Schwerkraft in demſelben mit der Cohäſion des Fadens im Gleichgewicht. Das Gleichgewicht unter Kräften wird aufgehoben, und es entſteht Bewegung, wenn man eine von den Kräften entfernt oder auf andere Weiſe aufhebt. So geht z. B. die durch ein Gewicht gebogene Stahlfeder in Bewegung über, wenn das Gewicht weggenommen wird, weil nun diejenige Kraft der Feder, welche man ihre Elaſticität nennt, allein noch wirkt.

Statik (fr. statique, engl. statics) iſt derjenige Theil der Mechanik, welcher von den Geſetzen des Gleichgewichts handelt; die Dynamik (fr. dynamique, engl. dynamics) hingegen handelt von den Kräften, inwiefern ſie Bewegungen hervorbringen.

Eintheilung der Kräfte. §. 47. Nach ihren Wirkungen ſind die Kräfte entweder bewegende (fr. forces motrices, puissances, engl. moving forces) oder widerſtehende (Widerſtände, fr. résistances, engl. resistances). Jene bringen Bewegungen hervor, oder vermögen dieſelben zu erzeugen, dieſe hingegen können dieſelben nur verhindern und mäßigen. Die Schwerkraft, die Elaſticität einer Stahlfeder u. ſ. w. gehören zu den bewegenden Kräften, die Reibung, Feſtigkeit der Körper u. ſ. w. ſind widerſtehende Kräfte oder Widerſtände, weil durch ſie nur Bewegungen verhindert oder vermindert oder bewegende Kräfte aufgehoben, aber keineswegs Bewegungen hervorgerufen werden können. Die bewegenden Kräfte theilt man wieder ein in beſchleunigende (fr. accéleratrices, engl. accelerating) und in verzögernde (fr. retardatrices, engl. retarding). Jene erzeugen eine poſitive, dieſe eine negative Acceleration, durch jene wird alſo eine beſchleunigte, durch dieſe eine verzögerte Bewegung hervorgebracht. Die Widerſtände ſind ſtets verzögernde Kräfte, aber nicht alle verzögernde Kräfte ſind widerſtehende. Bei einem ſenkrecht in die Höhe geworfenen Körper wirkt z. B. die Schwerkraft verzögernd, deswegen iſt aber die Schwerkraft noch keine widerſtehende Kraft, denn beim darauf folgenden Herabfallen des Körpers nimmt ſie wieder die Stelle einer bewegenden Kraft ein.

Noch unterſcheidet man beſtändige (conſtante, fr. constantes, engl. uniform) und veränderliche Kräfte (fr. variables, engl. variable) von einander. Während conſtante Kräfte immer auf gleiche Weiſe wirken und eben deshalb in gleichen Zeittheilchen gleiche Wirkungen, d. i. gleiche Zuſätze oder Abnahmen in der Geſchwindigkeit hervorbringen, ſind bei den veränderlichen Kräften dieſe Wirkungen zu verſchiedenen Zeiten verſchieden; während alſo aus jenen Kräften gleichförmig veränderte Be-

wegungen hervorgehen, entsprechen diesen Kräften ungleichförmig beschleunigte oder ungleichförmig verzögerte Bewegungen.

§. 48. Druck (fr. pression, engl. pressure) und Zug (fr. traction, engl. traction) sind die ersten Wirkungen der Kräfte auf materielle Körper. Vermöge derselben werden Körper zusammengedrückt und ausgedehnt, oder überhaupt in ihrer Form verändert. Druck.

Der durch die lothrecht abwärts wirkende Schwerkraft hervorgebrachte Druck oder Zug, welchen die Unterlage eines schweren Körpers oder der Faden, woran ein Körper aufgehängt ist, auszuhalten hat, heißt das Gewicht (fr. poids, engl. weight) des Körpers.

Druck und Zug, und also auch Gewicht sind Größen eigenthümlicher Art, die zwar nur unter einander verglichen werden, aber als Wirkungen der Kräfte zum Maaße dieser dienen können.

Die einfachsten, und deshalb gewöhnlichsten Mittel zum Messen der Kräfte sind Gewichte.

§. 49. Zwei Gewichte oder auch zwei Drücke oder Züge, und also auch die Kräfte, welche letzteren entsprechen, sind gleich, wenn man eine durch die andere ersetzen kann, ohne verschiedene Wirkungen hervorzubringen. Wenn z. B. eine Stahlfeder durch ein angehängtes Gewicht G genau so gebogen wird wie durch ein anderes, genau ebenso angehängtes Gewicht G_1, so sind diese Gewichte, und deshalb auch die Schwerkräfte in beiden Körpern, gleich. Wenn ebenso eine belastete Waage (fr. und engl. balance) sowohl durch das Gewicht G als auch durch ein anderes Gewicht G_1, welches man an die Stelle von G setzt, zum Einspielen gebracht wird, so sind diese Gewichte G und G_1 gleich, die Waage mag übrigens gleich- oder ungleicharmig, und die übrige Belastung derselben mag groß oder klein sein. Gleichheit der Kräfte.

Ein Druck oder Gewicht (Kraft) ist 2, 3, 4 u. s. w. und überhaupt n mal so groß als ein anderer Druck u. s. w., wenn er dieselbe Wirkung hervorbringt als 2, 3, 4 ... n Drücke der zweiten Art zusammen. Wenn eine übrigens beliebig belastete Waage durch ein Gewicht (G) ebenso zum Einspielen gebracht wird, als durch Auflegen von 2, 3, 4 u. s. w. gleichen Gewichten (G_1), so ist jenes Gewicht (G) 2, 3, 4 u. s. w. mal so groß als dieses Gewicht (G_1).

§. 50. Materie (fr. matière, engl. matter) ist Dasjenige, wodurch die Körper der Außenwelt, die wir, im Gegensatz zu den Körpern der Geometrie, auch materielle oder physische Körper nennen, auf unsere Sinne wirken. Masse (fr. und engl. masse) ist das Quantum der einen Körper bildenden Materie. Materie.

Körper von gleichem Volumen (fr. und engl. volume) oder gleichem geometrischen Inhalte haben meist verschiedene Gewichte, wenn sie aus

Materie. verſchiedenartigen Materien beſtehen. Man kann daher aus dem Volumen eines Körpers auf deſſen Gewicht noch nicht ſchließen; es iſt dazu vielmehr nöthig, daß man das Gewicht von einer Volumeneinheit, z. B. von einem Cubikfuß, Cubikmeter u. ſ. w. der Materie des Körpers kenne.

Gewichtseinheit. §. 51. Das Meſſen von Gewichten oder Kräften beſteht in einer Vergleichung derſelben mit einem gegebenen und unveränderlichen, zur Einheit angenommenen Gewichte. Die Auswahl dieſer Gewichts- oder Krafteinheit iſt zwar an ſich willkürlich, es iſt jedoch praktiſch vortheilhaft, hierzu das Gewicht von einem allgemein verbreiteten Körper bei einem der gebräuchlichen Raumeinheit gleichen Volumen hierzu auszuwählen.

Eine derartige Gewichtseinheit iſt das Gramm, welches durch das Gewicht von einem Cubikcentimeter reinen Waſſers im Zuſtande der größten Dichtigkeit (bei ungefähr 4° C. Temperatur) gegeben wird. Aber auch das preußiſche Pfund iſt eine auf das Gewicht des Waſſers zurückgeführte Einheit, es wiegt nämlich ein preußiſcher Cubikfuß deſtillirten Waſſers im luftleeren Raume und bei 15° R. Temperatur 66 preußiſche Pfund. Nun iſt aber ein preußiſcher Fuß = 139,13 Pariſer Linien = 0,3137946 Meter, es folgt daher ein preußiſches Pfund = 467,711 Gramm.

Trägheit. §. 52. Trägheit oder Beharrungsvermögen (fr. inertie, engl. inertia) iſt diejenige Eigenſchaft der Materie, vermöge welcher dieſelbe durch ſich allein weder Bewegung annehmen, noch erhaltene Bewegung abändern kann. Jeder materielle Körper bleibt ſo lange in Ruhe, ſo lange keine Kraft auf ihn einwirkt, und jeder einmal in Bewegung geſetzte materielle Körper bleibt in einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung, ſo lange als er ohne Einwirkung einer Kraft iſt. Wenn alſo in dem Bewegungszuſtande eines materiellen Körpers Veränderungen vor ſich gehen, wenn ein Körper ſeine Bewegungsrichtung verändert, oder wenn er eine größere oder kleinere Geſchwindigkeit annimmt, ſo iſt dieſelbe nicht dem Körper, als einem gewiſſen Quantum von Materie, an ſich beizumeſſen, ſondern es muß eine fremde Urſache, d. i. eine Kraft, dieſelbe herbeigeführt haben.

Inſofern bei jeder Aenderung im Bewegungszuſtande eines materiellen Körpers eine Kraftentwickelung vor ſich geht, inſofern läßt ſich die Trägheit auch den Kräften beizählen.

Könnten wir die auf eine bewegte Maſſe wirkenden Kräfte gänzlich entfernen, ſo würde dieſelbe ſich ohne Ende gleichförmig fortbewegen; wir finden aber eine ſolche gleichförmige Bewegung nirgends, weil es uns nicht möglich iſt, eine Maſſe der Einwirkung aller Kräfte zu entziehen. Bewegt ſich eine Maſſe auf einem horizontalen Tiſche, ſo übt zwar die nun

vom Tische aufgenommene Schwerkraft eine unmittelbare Wirkung auf den Körper nicht aus, allein aus dem Drucke des Körpers gegen den Tisch entsteht ein Widerstand, den wir in der Folge unter dem Namen Reibung näher kennen lernen werden, welcher dem bewegten Körper unaufhörlich Geschwindigkeit entzieht, weshalb er aus diesem Grunde eine verzögerte Bewegung annimmt und endlich zur Ruhe übergeht. Indessen auch die Luft setzt dem bewegten Körper einen Widerstand entgegen, und wenn auch die Reibung des Körpers ganz beseitigt werden könnte, so würde schon wegen dieses Hindernisses eine allmälige Abnahme an Geschwindigkeit eintreten. Wir finden aber, daß der Verlust an Geschwindigkeit um so kleiner wird, die Bewegung sich also um so mehr und mehr einer gleichförmigen nähert, je mehr wir diese Widerstände der Zahl und Stärke nach vermindern, und könnnen daraus schließen, daß bei Beseitigung aller bewegenden Kräfte und Widerstände eine gänzlich gleichförmige Bewegung eintreten muß. Trägheit.

§. 53. Die Kraft (P), welche eine träge Masse (M) accelerirt, ist proportional der Acceleration (p) und proportional der Masse (M) selbst; sie wächst bei einerlei Massen wie die in unendlich kleinen Zeiten erlangten Zunahmen an Geschwindigkeit und nimmt bei gleichen Geschwindigkeitszunahmen in demselben Maaße zu, als die Massen größer werden. Die $m$fache Acceleration einer und derselben Masse oder gleicher Massen erfordert eine $m$fache Kraft und die $n$fache Masse macht bei einerlei Acceleration auch die $n$fache Kraft nöthig Kraftmaaß.

Da wir bis jetzt ein Maaß der Massen noch nicht ausgewählt haben, so können wir deshalb sogleich

$P = Mp$, die Kraft gleich dem Producte aus Masse und Acceleration annehmen, und zugleich statt Kraft ihre Wirkung, d. i. den von ihr hervorgebrachten Druck einsetzen.

Die Richtigkeit dieses allgemeinen Bewegungsgesetzes läßt sich allerdings wohl durch directe Versuche darthun, indem man z. B. gleiche und verschiedene, auf einem horizontalen Tische bewegliche Massen durch gebogene Stahlfedern fortschnellen läßt, indessen liegt dieselbe auch schon darin, daß alle aus ihnen gemachte Folgerungen und entwickelte Regeln für zusammengesetzte Bewegungen den Beobachtungen und Erscheinungen in der Natur vollkommen entsprechen.

§. 54. Alle Körper fallen an einem und demselben Orte der Erde und im luftleeren Raume gleich schnell nieder, nämlich mit der unveränderlichen Acceleration $g = 9{,}81$ Meter $= 31\frac{1}{4}$ Fuß (§. 15); ist daher die Masse eines Körpers $= M$ und das die Schwerkraft desselben messende Gewicht $= G$, so hat man nach der letzten Formel auch Masse.

$$G = Mg, \text{ d. i.}$$

Maſſe. das Gewicht eines Körpers iſt ein Product aus deſſen Maſſe und der Acceleration der Schwere, und umgekehrt:

$$M = \frac{G}{g}, \text{ d. i.}$$

Maſſe eines Körpers iſt Gewicht deſſelben dividirt durch die Beſchleunigung der Schwere, oder Maſſe iſt dasjenige Gewicht eines Körpers, welches derſelbe haben würde, wenn die Acceleration der Schwere = Eins, z. B. ein Meter, ein Fuß u. ſ. w. wäre. An dem Punkte auf oder in der Nähe der Erde oder eines andern Weltkörpers, wo die Körper nicht mit 9,81 Meter, ſondern mit 1 Meter Geſchwindigkeit (nach der erſten Secunde) niederfallen, wird hiernach die Maſſe, oder vielmehr nur das Maaß derſelben, durch das Gewicht des Körpers unmittelbar angegeben.

Je nachdem wir die Beſchleunigung der Schwere in Metern oder Fußen ausdrücken, haben wir nun die Maſſe

$$M = \frac{G}{9{,}81} = 0{,}1019\ G \text{ oder}$$

$$M = \frac{G}{31{,}25} = 0{,}032\ G.$$

Hiernach iſt z. B. die Maſſe von einem 20 Pfund ſchweren Körper, $M = 0{,}032 \times 20 = 0{,}64$ Pfund, und umgekehrt das Gewicht einer Maſſe von 20 Pfund, $G = 31{,}25 \times 20 = 625$ Pfund.

§. 55. Inſofern wir die Beſchleunigung (g) der Schwere als unveränderlich annehmen, ſo folgt nun, daß die Maſſe eines Körpers dem Gewichte deſſelben vollkommen proportional iſt, daß alſo für die Maſſen M und M_1 mit den Gewichten G und G_1 iſt:

$$\frac{M}{M_1} = \frac{G}{G_1}.$$

Wir erhalten hiernach das Gewicht als Maaß der Maſſe eines Körpers, meſſen alſo einem Körper in demſelben Maaße mehr Maſſe bei, als derſelbe mehr Gewicht hat.

Allerdings iſt die Beſchleunigung der Schwere etwas veränderlich, ſie wird größer, je näher man den Erdpolen kommt, und nimmt um ſo mehr ab, je mehr man ſich dem Erdäquator nähert, iſt alſo an den Polen am größten und am Aequator am kleinſten. Auch nimmt ſie ab, je mehr ein Körper über oder unter dem Niveau des Meeres befindlich iſt, hat alſo im Niveau des Meeres ihren größten Werth. Da nun aber eine Maſſe, ſo lange man zu ihr Nichts hinzunimmt und von ihr Nichts wegnimmt, etwas Unveränderliches iſt, alſo auf allen Punkten der Erde und ſelbſt außerhalb derſelben, z. B. auf dem Monde, noch dieſelbe iſt, ſo folgt daraus, daß auch das Gewicht eines Körpers veränderlich und von dem Orte

der Körper abhängig, überhaupt aber der dem Orte entsprechenden Accele- Masse.
ration der Schwere proportional, oder $\frac{G}{G_1} = \frac{g}{g_1}$ sein müsse.

Es wird also hiernach eine und dieselbe Stahlfeder durch ein und dasselbe Gewicht an verschiedenen Orten der Erde, verschieden gebogen, am Aequator, auf hohen Bergen und in tiefen Gruben am schwächsten, in der Nähe der Erdpole und im Nieveau des Meeres am stärksten.

§. 56. Dichtigkeit (fr. densité, engl. density) ist die Stärke der Dichtigkeit.
Raumerfüllung der Materie. Ein Körper ist um so dichter, je mehr Materie derselbe in seinem Raume einschließt. Das natürliche Maaß der Dichtigkeit ist dasjenige Quantum an Materie (diejenige Masse), welches die Volumeneinheit ausfüllt; weil sich aber die Materie nur durch Gewichte messen läßt, so dient das Gewicht von einer Volumeneinheit, z. B. von einem Cubikmeter oder Cubikfuße einer gewissen Materie als Maaß der Dichtigkeit derselben.

Hiernach ist z. B. die Dichtigkeit des Wassers = 66 Pfund und die des Gußeisens = 470 Pfund, weil ein Cubikfuß Wasser 66, und ein Cubikfuß Gußeisen 470 Pfund wiegt.

Aus dem Volumen V eines Körpers und der Dichtigkeit γ desselben folgt sein Gewicht: $G = V\gamma$.

Volumen mal Dichtigkeit giebt also das Gewicht eines Körpers.

Die Dichtigkeit der Körper ist entweder gleichförmig (fr. uniforme, homogène, engl. uniform) oder ungleichförmig (fr. variable, hétérogène, engl. variable), je nachdem gleiche Volumentheile desselben gleich oder verschieden schwer sind. Es ist z. B. die Dichtigkeit der Metalle gleichförmig oder es sind die Metalle homogen, weil gleiche, übrigens noch so kleine Theile derselben, gleichviel wiegen, hingegen ist Granit ein Körper von ungleichförmiger Dichtigkeit, weil er aus Theilen von verschiedener Dichtigkeit besteht.

Beispiele: 1) Wenn die Dichtigkeit des Bleies 746 Pfund beträgt, so wiegen 3,2 Cubikfuß Blei: $G = V\gamma = 746 \times 3{,}2 = 2387.2$ Pfund. 2) Ist die Dichtigkeit des Stabeisens = 502 Pfund, so hat eine Masse desselben von 205 Pfund das Volumen $V = \frac{G}{\gamma} = \frac{205}{502} = 0{,}4083$ Cubikfuß $= 0{,}4083 \times 1728 = 705{,}5$ Cubikzoll. 3) Wiegen 10,4 Cubikfuß vollkommen mit Wasser angeschwängertes Tannenholz 577 Pfund, so ist die Dichtigkeit dieses Holzes:

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{577}{10{,}4} = 55{,}5 \text{ Pfund.}$$

§. 57. Specifisches, auch eigenthümliches Gewicht (fr. poids Specifisches Gewicht.
spécifique, engl. specific-weight, specific gravity) ist das Verhältniß der Dichtigkeit eines Körpers zu der als Einheit angenommenen Dichtigkeit

Specifiſches Gewicht.

eines andern, gewöhnlich des Waſſers. Nun iſt aber die Dichtigkeit gleich dem Gewichte der Volumeneinheit; daher iſt auch ſpecifiſches Gewicht das Verhältniß zwiſchen dem Gewichte eines Körpers zu dem eines andern, z. B. des Waſſers, bei einerlei Volumen.

Um das ſpecifiſche Gewicht nicht mit dem Gewichte zu verwechſeln, welches einem Körper von beſtimmter Größe zukommt, pflegt man das letztere abſolutes Gewicht (fr. poids absolu, engl. absolute-weight) zu nennen.

Iſt γ die Dichtigkeit der Materie (des Waſſers), auf welche wir die Dichtigkeiten anderer Materien beziehen, und γ_1 die Dichtigkeit irgend einer dieſer Materien, deren ſpecifiſches Gewicht wir durch ε bezeichnen wollen, ſo gelten die Formeln

$$\varepsilon = \frac{\gamma_1}{\gamma} \text{ und } \gamma_1 = \varepsilon . \gamma.$$

es iſt alſo die Dichtigkeit eines Stoffes gleich: ſpecifiſches Gewicht deſſelben mal Dichtigkeit des Waſſers.

Das abſolute Gewicht G einer Maſſe vom Volumen V und ſpecifiſchem Gewichte ε iſt: $G = V\gamma_1 = V\varepsilon\gamma$.

Beiſpiele: 1) Die Dichtigkeit des reinen Silbers iſt 676,5 Pfund und die des Waſſers = 66 Pfund, folglich das ſpecifiſche Gewicht des erſteren (in Hinſicht auf Waſſer) $= \frac{676,5}{66} = 10,25$, d. h. jede Silbermaſſe iſt $10\frac{1}{4}$ mal ſo ſchwer als eine ebenſo viel Raum einnehmende Waſſermaſſe. 2) Das ſpecifiſche Gewicht des Queckſilbers = 13,598 angenommen, folgt die Dichtigkeit deſſelben $\gamma = 13,598 \times 66 = 897,468$ Pfund; eine Maſſe von 35 Cubikzoll deſſelben wiegt, da 1728 Cubikzoll einen Cubikfuß geben:

$$G = 897,468 . V = \frac{897,468 \times 35}{1728} = 18,18 \text{ Pfund.}$$

Anmerkung. Der Gebrauch des franzöſiſchen Maaßes und Gewichtes gewährt bei dieſen Rechnungen den Vortheil, daß man die Multiplication von ε und γ durch bloßes Rücken des Decimalſtriches vollziehen kann, weil ein Cubikcentimeter Waſſer ein Gramm und ein Cubikmeter eine Million Gramm oder 1000 Kilogramm wiegt. Die Dichtigkeit des Queckſilbers iſt hiernach für das franzöſiſche Maaß und Gewicht $\gamma_1 = 13,598 \times 1000 = 13598$ Kilogramm, d. i. ein Cubikmeter Queckſilber wiegt 13598 Kilogramm.

§. 58. Folgende Tabelle enthält die ſpecifiſchen Gewichte von einigen, vorzüglich in der praktiſchen Mechanik in Anwendung kommenden Körpern. Eine vollſtändige Zuſammenſtellung dieſer Gewichte giebt der »Ingenieur«:

Mittleres ſpecifiſches Gewicht der getrockneten Laubhölzer .	= 0,659,
mit Waſſer geſättigt	= 1,110.
Mittleres ſpecifiſches Gewicht der getrockneten Nadelhölzer .	= 0,453,
mit Waſſer geſättigt	= 0,839 *).
Queckſilber	= 13,56.

*) S. das Waſſeranſaugen des Holzes, polytechniſche Mittheilungen, Band II. 1845.

Blei	=	11,33.		Specifisches Gewicht.
Kupfer, gegossen und dicht	=	8,75.		
» geschmiedet	=	8,97.		
Messing	=	8,55.		
Eisen, Gußeisen, weißes	=	7,50.		
» » graues	=	7,10.		
» » halbirtes	=	7,06.		
» Stabeisen	=	7,60.		
Zink, gegossen	=	7,05.		
» gewalzt	=	7,54.		
Granit	=	2,50	bis 3,05.	
Gneiß	=	2,39	bis 2,71.	
Kalkstein	=	2,40	bis 2,86.	
Sandstein	=	1,90	bis 2,70.	
Ziegelstein	=	1,40	bis 2,22.	
Mauerwerk mit Kalkmörtel von Bruchsteinen: frisch	=	2,46.		
trocken	=	2,40.		
» » » » Sandsteinen: frisch	=	2,12.		
trocken	=	2,05.		
» » » » Ziegelsteinen: frisch	=	1,55	bis 1,70.	
trocken	=	1,47	bis 1,59.	
Erde, lehmige, festgestampft, frisch	=	2,06,		
trocken	=	1,93.		
Gartenerde: frisch	=	2,05,		
trocken	=	1,63.		
Trockene magere Erde	=	1,34.		

§. 59. Die Körper erscheinen uns nach dem verschiedenen Zusammenhange ihrer Theile in drei Hauptzuständen, die wir auch wohl Aggregatzustände nennen. Sie sind entweder fest (fr. solides, engl. rigid) oder flüssig (fr. fluides, engl. fluid) und im letzteren Falle wieder entweder tropfbar flüssig (fr. liquides, engl. liquid) oder elastisch flüssig (fr. gazeux, aëriformes, engl. aëriform). Feste Körper sind diejenigen, deren Theilchen so stark unter sich zusammenhängen, daß eine gewisse Kraft nöthig ist, die Gestalt dieser Körper zu verändern oder eine Zertheilung derselben zu bewirken. Flüssige Körper hingegen sind solche, deren Theile durch die kleinste Kraft an einander verschoben werden können. Die elastisch flüssigen Körper, deren Repräsentant die athmosphärische Luft ist, unterscheiden sich dadurch von den tropfbar flüssigen, durch das Wasser repräsentirten Körpern, daß denselben ein Bestreben, sich immer weiter und weiter auszudehnen, inne wohnt welches Bestreben dem Wasser u. s. w. mangelt. Aggregatzustände.

Während die festen Körper eine eigenthümliche Gestalt und ein bestimmtes

Volumen haben, besitzen die tropfbar flüssigen oder wasserförmigen Körper nur ein bestimmtes Volumen ohne eigenthümliche Form, die elastisch-, oder ausdehnsam flüssigen Körper endlich weder das eine noch das andere.

Eintheilung der Kräfte.

§. 60. Ihrer Natur nach sind die Kräfte sehr verschieden; wir führen hier nur die vorzüglichsten an:

1) Die Schwerkraft, vermöge welcher sich alle Körper dem Mittelpunkte der Erde zu nähern suchen.
2) Die Kraft der Trägheit, welche bei Geschwindigkeitsveränderungen träger Massen hervortritt.
3) Die Muskelkraft der beseelten Wesen, die mittelst der Muskel von Menschen und Thieren ausgeübte (animalische) Kraft.
4) Die Elasticität oder Federkraft, welche Körper bei ihrer Form- oder Volumenveränderung äußern.
5) Die Wärmekraft, vermöge welcher sich Körper beim Wechsel der Temperatur ausdehnen oder zusammenziehen.
6) Die Magnetkraft, oder die Anziehungs- und Abstoßungskraft der Magnete.
7) Die Cohäsionskraft, die Kraft, mit welcher die Theile eines Körpers zusammenhängen, mit welcher also auch dieselben einer Trennung widerstehen.
8) Die Adhäsionskraft, mit welcher zwei in nahe Berührung gebrachte Körper einander anziehen.

Die Widerstände der Reibung, Steifigkeit, Festigkeit u. s. w. entspringen vorzüglich aus der Cohäsionskraft.

Bestimmungsstücke einer Kraft.

§. 61. Bei einer jeden Kraft unterscheiden wir:

1) Den Angriffspunkt (fr. point d'application, engl. point of application), den Punkt des Körpers, auf welchen eine Kraft unmittelbar wirkt.
2) Die Kraftrichtung (fr. und engl. direction), die gerade Linie, in welcher eine Kraft den Angriffspunkt fortbewegt, oder fortzubewegen oder dessen Bewegung zu verhindern sucht. Die Kraftrichtung hat, wie jede Bewegungsrichtung, zwei Seiten; sie kann von links nach rechts oder von rechts nach links, von oben nach unten oder von unten nach oben vor sich gehen. Man nennt die eine die positive und die andere die negative. Da wir von links nach rechts und von oben nach unten schreiben, so wäre es am geeignetsten, diese Bewegungen positive und die entgegengesetzten Bewegungen negative zu nennen.
3) Die absolute Größe oder Intensität (fr. grandeur absolue, intensité, engl. intensity) der Kraft, die nach dem Obigen durch Gewichte, z. B. Pfunde, Kilogramme u. s. w. gemessen wird.

§. 62. Die erste Wirkung, welche eine Kraft in einem Körper hervorbringt, ist eine mit Ausdehnung oder Zusammendrückung verbundene Form- oder Volumenveränderung, welche im Angriffspunkt ihren Anfang nimmt und sich von da aus immer weiter und weiter ausbreitet. Durch diese innere Veränderung des Körpers wird aber die in ihm liegende Elasticität angeregt, die sich mit der Kraft ins Gleichgewicht setzt und deshalb der Kraft gleich ist und ihr entgegengesetzt wirkt. Man sagt hiernach: Wirkung und Gegenwirkung sind einander gleich und entgegengesetzt. Dieses Gesetz findet nicht nur bei den durch Berührung erzeugten Einwirkungen der Kräfte, sondern auch bei den sogenannten Anziehungs- und Abstoßungskräften, wohin die magnetische und selbst die Schwerkraft zu rechnen sind, Statt. So stark ein Magnet einen Eisenstab anzieht, ebenso stark wird der Magnet vom Eisenstabe selbst angezogen. Die Kraft, mit welcher der Mond von der Erde angezogen wird (durch die Schwerkraft) ist gleich der Kraft, mit welcher der Mond auf die Erde zurückwirkt. Wirkung und Gegenwirkung.

Die Kraft, mit welcher ein Gewicht auf eine Unterlage drückt, giebt diese in der entgegengesetzten Richtung zurück; die Kraft, womit ein Arbeiter an einer Maschine zieht, schiebt u. s. w., wirkt auf den Arbeiter zurück und sucht denselben in entgegengesetzter Richtung zu bewegen. Wenn ein Körper gegen einen andern stößt, so drückt der erste den andern genau so viel, wie der andere den ersten.

§. 63. Die gesammte Mechanik wird nach den zwei Aggregatzuständen der Körper in zwei Hauptabtheilungen gebracht, nämlich Eintheilung der Mechanik.

1) in die Mechanik der festen Körper, die man auch wohl Geomechanik (fr. mécanique des corps solides, engl. mechanics of rigid bodies) nennt, und
2) in die Mechanik der flüssigen Körper, Hydromechanik, auch Hydraulik (fr. mécanique des fluides, hydraulique, engl. mechanics of fluids). Die letztere theilt man wieder ein
   1) in die Mechanik des Wassers und der tropfbar flüssigen Körper überhaupt, Hydromechanik, auch Hydraulik (fr. hydraulique, engl. hydraulic) und
   2) in die Mechanik der Luft und anderer luftförmigen Körper überhaupt, Aëromechanik (fr. mécanique des fluides aëriformes, engl. mechanics of elastic fluids).

Nimmt man nun noch auf die Eintheilung der Mechanik in Statik und Dynamik (§. 46) Rücksicht, so erhält man folgende Theile:

1) Statik der festen Körper, oder Geostatik,
2) Dynamik der festen Körper, oder Geodynamik,
3) Statik des Wassers u. s. w. oder Hydrostatik,

Eintheilung der Mechanik.

4) Dynamik des Waſſers u. ſ. w., oder Hydrodynamik,
5) Statik des Luftförmigen, oder Aëroſtatik,
6) Dynamik des Luftförmigen, oder Aërodynamik, auch Pneumatik.

Zweites Kapitel.

Mechanik des materiellen Punktes.

§. 64. Materieller Punkt (fr. point matériel, engl. material point) iſt ein materieller Körper, deſſen Dimenſionen nach allen Seiten hin unendlich klein ſind in Hinſicht auf die von ihm zurückgelegten Wege. Um den Vortrag zu vereinfachen, wird im Folgenden zunächſt nur von der Bewegung und dem Gleichgewichte eines materiellen Punktes die Rede ſein. Ein (endlicher) Körper iſt eine ſtetige Verbindung von unendlich vielen materiellen Punkten. Wenn ſich die einzelnen Punkte oder Elemente eines Körpers alle vollkommen gleich, d. i. in parallellen geraden Linien, gleich ſchnell bewegen, ſo kann man die Theorie der Bewegung eines materiellen Punktes auch auf die des ganzen Körpers anwenden, weil ſich in dieſem Falle annehmen läßt, daß gleiche Maſſentheile des Körpers durch gleiche Kraftheile getrieben werden.

Einfache conſtante Kraft.

§. 65. Iſt p die Acceleration, mit welcher eine Maſſe M durch eine Kraft fortgetrieben wird, ſo hat man nach §. 53. für dieſe:

$$P = Mp, \text{ ſo wie umgekehrt, die Acceleration } p = \frac{P}{M}.$$

Setzen wir ferner die Maſſe $M = \frac{G}{g}$, wo G das Gewicht des Körpers und g die Beſchleunigung der Schwere bezeichnet, ſo hat man die Kraft:

$$1)\quad P = \frac{p}{g} G, \text{ und die Acceleration:}$$

$$2)\quad p = \frac{P}{G} g.$$

Man findet alſo die Kraft (P), welche einen Körper mit einer gewiſſen Acceleration (p) forttreibt, wenn man das Gewicht (G) des Körpers durch das Verhältniß $\left(\frac{p}{g}\right)$ ſeiner Acceleration zu der der Schwere multiplicirt.

Es ergiebt sich umgekehrt die Acceleration (p), mit welcher ein Körper durch eine Kraft (P) fortbewegt wird, indem man die Acceleration (g) der Schwere durch das Verhältniß $\left(\frac{P}{G}\right)$ zwischen Kraft und Gewicht des Körpers multiplicirt. Einfache constante Kraft.

Beispiel. Man denke sich einen Körper auf einem horizontalen und sehr glatten Tische liegend, welcher dem Körper keine Hindernisse in den Weg setzt, wohl aber die Schwerkraft in demselben aufhebt. Wird dieser Körper von einer horizontal wirkenden Kraft gedrückt, so wird der Körper der Einwirkung derselben nachgeben und in der Richtung dieser Kraft fortgehen. Ist das Gewicht dieses Körpers: $G = 50$ Pfund und die auf ihn unausgesetzt drückende Kraft $P = 10$ Pfund, so wird er in eine gleichförmig beschleunigte Bewegung mit der Acceleration $p = \frac{P}{G} \cdot g = \frac{10}{50} \cdot 31{,}25 = 6{,}25$ Fuß übergehen. Ist hingegen die Acceleration, mit welcher ein 42 Pfund schwerer Körper durch eine Kraft (P) beschleunigt wird $= 9$ Fuß, so wird diese Kraft $P = \frac{p}{g} G = \frac{9}{31.25} \cdot 42 = 0{,}032 \cdot 378 = 12{,}1$ Pfund betragen.

§. 66. Ist die Kraft, welche auf einen Körper wirkt, constant, so entsteht eine gleichförmig veränderte Bewegung, und zwar eine gleichförmig beschleunigte, wenn die Kraftrichtung in die anfängliche Bewegungsrichtung fällt, und dagegen eine gleichförmig verzögerte, wenn die Kraftrichtung der anfänglichen Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. Setzen wir nun in den phoronometrischen Formeln (§. 13 und §. 14) statt p den Werth $\frac{P}{M} = \frac{P}{G} g$ ein, so bekommen wir Folgendes:

I. Für gleichförmig beschleunigte Bewegungen:

1) $v = c + \frac{P}{G} gt$, oder $v = c + 31{,}25 \frac{P}{G} t$.

2) $s = ct + \frac{P}{G} \frac{gt^2}{2}$, oder $s = ct + 15{,}625 \frac{P}{G} t^2$.

II. Für gleichförmig verzögerte Bewegungen:

1) $v = c - \frac{P}{G} gt = c - 31{,}25 \frac{P}{G} t$,

2) $s = ct - \frac{P}{G} \frac{gt^2}{2} = ct - 15{,}625 \frac{P}{G} t^2$.

Mit Hülfe dieser Formeln lassen sich alle Fragen, welche sich in Ansehung der durch eine beständige Kraft veranlaßten geradlinigen Bewegungen von Körpern stellen lassen, beantworten.

Beispiele. 1) Ein 2000 Pfund schwerer Wagen geht mit 4 Fuß Geschwindigkeit auf einer horizontalen, ihm keine Hindernisse entgegen setzenden Bahn fort und wird 15 Secunden lang durch eine unveränderliche Kraft von 25 Pfund vorwärts geschoben, mit welcher Geschwindigkeit wird er nach Einwirkung dieser

Einfache conſtante Kraft.

Kraft fortgehen? Es iſt dieſe Geſchwindigkeit $v = c + 31{,}25\,\frac{P}{G}t$, aber $c = 4$, $P = 25$, $G = 2000$ und $t = 15$; es folgt daher $v = 4 + 31{,}25 \cdot \frac{25}{2000} \cdot 15 = 4 + 5{,}859 = 9{,}859$ Fuß. 2) Unter gleichen Umſtänden wird ein 5500 Pfund ſchwerer Wagen, der vorher in 3 Minuten gleichförmig fortgehend 950 Fuß zurückgelegt hat, durch eine 30 Secunden lang anhaltend wirkende Kraft ſo fortgetrieben, daß er ſpäter in 3 Minuten 1650 Fuß gleichförmig durchläuft. Welches war dieſe Kraft? Hier iſt Anfangsgeſchwindigkeit $c = \frac{950}{3 \cdot 60} = 5{,}277$ Fuß, und Endgeſchwindigkeit $v = \frac{1650}{3 \cdot 60} = 9{,}166$ Fuß, daher $\frac{P}{G}gt = v - c = 3{,}889$, und die Kraft $P = \frac{3{,}889 \cdot G}{gt} = 0{,}032 \cdot 3{,}889 \cdot \frac{5500}{30} = 0{,}12445 \cdot \frac{550}{3} = 22{,}81$ Pfund. 3) Ein mit 15 Fuß Geſchwindigkeit fortgleitender 1500 Pfund ſchwerer Schlitten verliert in Folge der Reibung auf der horizontalen Unterlage innerhalb 25 Secunden ſeine ganze Bewegung; wie groß iſt dieſe Reibung? Hier iſt die Bewegung gleichförmig verzögert und die Endgeſchwindigkeit $v = 0$, daher $c = 31{,}25\,\frac{Pt}{G}$, und $P = 0{,}032\,\frac{Gc}{t} = 0{,}032 \cdot \frac{1500 \cdot 15}{25} = 0{,}032 \cdot 900 = 28{,}8$ Pfund die in Frage ſtehende Reibung. 4) Ein anderer Schlitten von 1200 Pfund Gewicht und 12 Fuß Anfangsgeſchwindigkeit hat bei ſeiner Bewegung eine Reibung von 45 Pfund zu überwinden; welche Geſchwindigkeit hat derſelbe nach 8 Secunden, und wie groß iſt ſein zurückgelegter Weg? Die Endgeſchwindigkeit iſt $v = 12 - 31{,}25 \cdot \frac{45 \cdot 8}{1200} = 12 - 9{,}375 = 2{,}625$ Fuß, und der zurückgelegte Weg $s = \left(\frac{c + v}{2}\right)t = \left(\frac{12 + 2{,}625}{2}\right) \cdot 8 = 58{,}5$ Fuß.

Mechaniſche Arbeit.

§. 67. **Leiſtung** oder **Arbeit einer Kraft** (fr. travail mécanique, engl. work done, labouring force) iſt diejenige Wirkung einer Kraft, welche dieſelbe bei Ueberwindung eines **Widerſtandes**, z. B. der Schwerkraft, der Reibung, der Trägheit u. ſ. w. hervorbringt. Man verrich- alſo eine **mechaniſche Arbeit**, indem man Laſten emporhebt, Maſſen eine größere Geſchwindigkeit ertheilt, Körper in ihrer Form verändert, zertheilt u. ſ. w. Die Leiſtung oder Arbeit hängt nicht allein von der Kraft, ſondern auch von dem Wege ab, auf welchem dieſe thätig iſt oder einen Widerſtand überwindet; ſie wächſt überhaupt mit der Kraft und dem Wege gleichzeitig. Heben wir einen Körper langſam genug in die Höhe, um ſeine Trägheit vernachläſſigen zu können, ſo iſt die verrichtete Arbeit ſeinem Gewichte und der Höhe, auf welche der Körper gehoben wird, proportional; denn 1) die Wirkung iſt dieſelbe, ob ein Körper vom m (3) fachen Gewichte (mG) auf eine gewiſſe Höhe gehoben wird oder ob m (3) Körper vom einfachen Gewichte (G) auf dieſelbe Höhe gehoben werden; ſie iſt nämlich $m$mal ſo groß als die nöthige Wirkung zum Aufheben des einfachen Gewichtes auf die nämliche Höhe; und ebenſo iſt 2) die

Leiſtung dieſelbe, ob ein und daſſelbe Gewicht auf die n (5) fache Höhe (nh) oder ob es n (5) mal auf die einfache Höhe gehoben wird, überhaupt aber n (5) mal ſo groß, als wenn daſſelbe Gewicht um die einfache Höhe (h) empor ſteigt. Ebenſo iſt die von einem langſam ſinkenden Gewichte verrichtete Arbeit der Größe dieſes Gewichtes und der Höhe, von welcher es herabgeſunken iſt, proportional. Dieſe Proportionalität findet aber auch bei jeder anderen Art der Arbeitsverrichtung Statt; um bei einerlei Tiefe einen Sägeſchnitt von doppelter Länge auszuführen, ſind noch ein mal ſo viel Theilchen zu trennen, als beim Schnitt von der einfachen Länge, iſt alſo auch die Arbeit doppelt ſo groß; die doppelte Länge erfordert aber auch den doppelten Weg der Kraft, es iſt folglich die Arbeit dem Wege proportional. Ebenſo wird die Arbeit eines Mahlganges offenbar mit der Menge der Körner einer gewiſſen Getreideart, welche derſelbe bis zu einem gewiſſen Grade zerreibt, wachſen. Dieſe Menge iſt aber unter übrigens gleichen Umſtänden der Zahl der Umdrehungen oder vielmehr dem Weg, welchen der obere Mühlſtein (Läufer) während des Mahlens dieſer Getreidemenge gemacht hat, proportional; es wächſt folglich auch die mechaniſche Arbeit mit dem Wege gleichmäßig. Mechaniſche Arbeit.

§. 68. Die angegebene Abhängigkeit der Arbeit einer Kraft von der Größe und dem Wege der Kraft erlaubt uns diejenige Arbeit, welche bei Ueberwindung eines Widerſtandes von der Größe der Gewichtseinheit (z. B. Kilogramm, Pfund u. ſ. w.) längs eines Weges von der Größe der Längeneinheit (z. B. Meter oder Fuß) aufgewendet wird, als Einheit der mechaniſchen Arbeit oder Leiſtung (fr. unité dynamique, engl. dynamical unit) anzunehmen und nun das Maaß dieſer gleich zuſetzen dem Producte aus Kraft oder Widerſtand und aus dem während der Ueberwindung des Widerſtandes in der Kraftrichtung zurückgelegten Wege.

Setzen wir die Größe des Widerſtandes ſelbſt $= P$, und den bei ſeiner Ueberwindung von der Kraft oder vielmehr von ihrem Angriffspunkte zurückgelegten Wege $= s$, ſo iſt hiernach die bei Ueberwindung dieſes Widerſtandes aufgewendete Arbeit oder Leiſtung

$$L = Ps \text{ Arbeitseinheiten.}$$

Um die Arbeitseinheit, für welche man auch den einfachen Namen Dynamie gebrauchen kann, näher zu bezeichnen, giebt man gewöhnlich die Einheiten beider Factoren P und s an, und ſagt deshalb ſtatt Arbeitseinheiten Kilogrammmeter, Pfundfuß, auch umgekehrt, Meterkilogramm, Fußpfund u. ſ. w. je nachdem Gewicht und Weg in Kilogramm und Meter oder in Pfund und Fuß ausgedrückt werden. Der Einfachheit wegen ſchreibt man ſtatt Meterkilogramm *mk* oder *km*, und ebenſo ſtatt Fußpfund, Fpf.

Mechaniſche Arbeit.

Beiſpiele. 1) Um einen Pochſtempel von 210 Pfund 15 Zoll hoch zu heben, iſt die mechaniſche Arbeit $L = 210 \times \frac{15}{12} = 262{,}5$ Fpf. nöthig. 2) Durch eine mechaniſche Leiſtung von 1500 Fußpfund kann ein Schlitten, welcher bei ſeiner Bewegung 75 Pfund Reibung zu überwinden hat, um $s = \frac{L}{P} = \frac{1500}{75}$ = 20 Fuß fortgezogen werden.

§. 69. Nicht nur bei unveränderlicher Kraft oder conſtantem Widerſtande iſt die Arbeit ein Product aus Kraft und Weg, ſondern auch dann, wenn der Widerſtand während ſeiner Ueberwindung veränderlich iſt, läßt ſich die Arbeit als das Product aus Kraft und Weg ausdrücken, wenn man nur als Kraft einen mittleren Werth aus der ſtetigen Folge von Kräften annimmt. Das Verhältniß iſt hier daſſelbe wie das zwiſchen Zeit, Geſchwindigkeit und Raum, denn auch der letztere läßt ſich ja als ein Product aus Zeit und einem mittleren Werthe der Geſchwindigkeiten anſehen. Auch hier ſind dieſelben graphiſchen Darſtellungen anwendbar. Es läßt ſich die mechaniſche Arbeit als Flächeninhalt eines Rechteckes *ABCD*, Fig. 69, anſehen, deſſen Grundlinie *AB* der zurückgelegte Weg (*s*) und deſſen Höhe entweder die unveränderliche Kraft (*P*) ſelbſt oder das

Fig. 69.

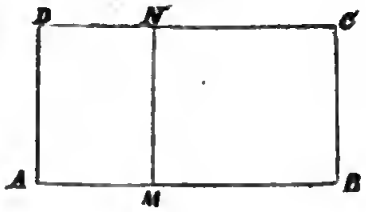
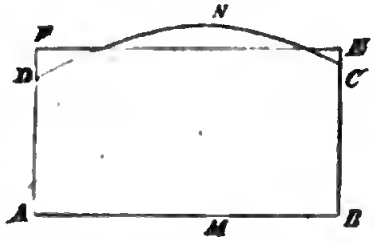


Fig. 70.

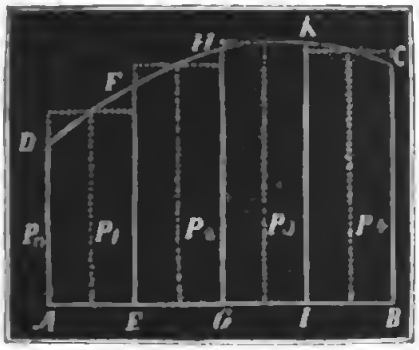


Mittel von den verſchiedenen Kraftwerthen iſt. Im Allgemeinen läßt ſich aber die Arbeit durch den Flächenraum einer Figur *ABCD*, Fig. 70, darſtellen, die zur Grundlinie den Weg *s* hat und deren Höhe über jeder Stelle der Grundlinie gleich iſt der jeder Stelle des Weges entſprechenden Kraft. Verwandelt man die Figur *ABCD* in ein Rechteck *ABEF* von gleicher Grundlinie und gleichem Inhalte, ſo erhält man in der Höhe $AF = BE$ deſſelben die mittlere Kraft.

§. 70. Die Arithmetik und Geometrie geben verſchiedene Mittel, um aus einer ſtetigen Folge von Größen einen mittleren Werth derſelben ausfindig zu machen; man findet auch die vorzüglichſten im »Ingenieur« angegeben. Unter ihnen iſt aber die ſogenannte Simpſon'ſche Regel dasjenige, welches man in der Praxis am häufigſten anwendet, weil es große Einfachheit mit einem hohen Grade von Genauigkeit in ſich vereinigt.

In jedem Falle iſt es nöthig, den Weg $AB = s$ (Fig. 71) in n (je mehr, je beſſer) gleiche Theile wie $AE = EG = GI$ u. ſ. w. einzu-

Fig. 71.



Mechanische Arbeit.

theilen und die Kräfte $EF = P_1$, $GH = P_2$, $IK = P_3$ u. ſ. w. an den Enden dieſer Wegtheile zu ermitteln. Setzen wir dann noch die anfängliche Kraft $AD = P_0$ und die Kraft BC am Ende $= P_n$, ſo erhalten wir die mittlere Kraft $P = (\frac{1}{2}P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_{n-1} + \frac{1}{2}P_n) : n$, und daher die Arbeit derſelben

$$Ps = (\tfrac{1}{2}P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1} + \tfrac{1}{2}P_n)\frac{s}{n}.$$

Iſt die Anzahl (n) der Theile eine gerade, nämlich 2, 4, 6, 8 u ſ. w., ſo giebt die Simpſon'ſche Regel noch genauer die mittlere Kraft $P = (P_0 + 4P_1 + 2P_2 + 4P_3 + \ldots + 4P_{n-1} + P_n) : 3n$, und daher die entſprechende Arbeit

$$Ps = (P_0 + 4P_1 + 2P_2 + 4P_3 + \ldots + 4P_{n-1} + P_n)\frac{s}{3n},$$

Beiſpiel. Um die mechaniſche Arbeit eines Zugpferdes zu finden, die dieſes beim Fortziehen eines Wagens auf einer gewiſſen Straße verrichtet, bedient man ſich eines Kraftmeſſers (Dynamometers), welcher auf der einen Seite mit dem Wagen und auf der andern Seite mit den Strängen der Pferde in Verbindung geſetzt wird, und beobachtet an demſelben von Zeit zu Zeit die Kraft. Wenn die anfängliche Kraft $P_0 = 110$ Pf., die nach Zurücklegung von 25 Fuß Weg 122 Pf., nach Zurücklegung von 50 Fuß 127 Pf., bei einem Wege von 75 Fuß 120 Pf. und am Ende des ganzen Weges von 100 Fuß $= 114$ Pfund beträgt, ſo hat man die mittlere Kraft
nach der erſten Formel $P = (\frac{1}{2} \cdot 110 + 122 + 127 + 120 + \frac{1}{2} \cdot 114) : 4 = 120{,}25$ Pfund, und die mechaniſche Arbeit

$$Ps = 120{,}25 \cdot 100 = 12025 \text{ Fpf.};$$

nach der zweiten Formel aber

$$P = (110 + 4 \cdot 122 + 2 \cdot 127 + 4 \cdot 120 + 114) : (3 \cdot 4)$$
$$= \frac{1446}{12} = 120{,}5 \text{ Pf. und die mechaniſche Leiſtung}$$
$$Ps = 120{,}5 \cdot 100 = 12050 \text{ Fpf.}$$

§. 71. Setzen wir in der §. 13 entwickelten Formel der Phoronomie $s = \frac{v^2 - c^2}{2p}$ oder $ps = \frac{v^2 - c^2}{2}$ für die Acceleration p ihren Werth $\frac{P}{G}g$, ſo erhalten wir $Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2g}\right)G$, oder, wenn wir die Geſchwindigkeitshöhen $\frac{v^2}{2g}$ und $\frac{c^2}{2g}$ durch h und h_1 bezeichnen:

Princip der lebendigen Kraft.

$$Ps = (h - h_1)\,G.$$

Dieſe für die praktiſche Mechanik überaus fruchtbringende Gleichung ſagt:

Princip der lebendigen Kräfte.

Die mechaniſche Arbeit (Ps), welche eine Maſſe entweder in ſich aufnimmt, wenn ſie aus einer kleineren Geſchwindigkeit (c) in eine größere (v) übergeht, oder hervorbringt, wenn ſie aus einer größeren Geſchwindigkeit in eine kleinere überzugehen genöthigt wird, iſt ſtets gleich dem Producte aus dem Gewichte dieſer Maſſe und der Differenz der, beiden Geſchwindigkeiten entſprechenden Geſchwindigkeitshöhen $\left(\frac{v^2}{2g} - \frac{c^2}{2g}\right)$.

Beiſpiele. 1) Um einen 4000 Pfund ſchweren Wagen auf einer vollkommen glatten Schienenbahn in eine Geſchwindigkeit von 30 Fuß zu verſetzen, iſt eine mechaniſche Arbeit $Ps = \frac{v^2}{2g} G = 0{,}016\, v^2 G = 0{,}016 \,.\, 900 \,.\, 4000 = 57600$ Fußpfund nöthig; und ebenſo viel Arbeit wird dieſer Wagen verrichten, wenn man ihm einen Widerſtand entgegenſetzt und ihn dadurch allmälig in Ruhe überzugehen nöthigt. 2) Ein anderer Wagen von 6000 Pfund geht mit 15 Fuß Geſchwindigkeit fort und wird durch eine auf ihn wirkende Kraft in eine Geſchwindigkeit von 24 Fuß verſetzt, wie groß iſt die von dieſem Wagen in ſich aufgenommene oder von der Kraft verrichtete Arbeit? Den Geſchwindigkeiten 15 Fuß und 24 Fuß entſprechen die Geſchwindigkeitshöhen $h_1 = \frac{c^2}{2g} = 3{,}6$ Fuß und $h = \frac{v^2}{2g}$ $= 9{,}216$ Fuß, demnach iſt die geſuchte mechaniſche Arbeit $Ps = (h - h_1)\, G$ $= (9{,}216 - 3{,}600) \,.\, 6000 = 5{,}616 \,.\, 6000 = 33696$ Fpf. Kennt man nun den Weg, auf welchem dieſe Geſchwindigkeitsveränderung vor ſich geht, ſo läßt ſich die Kraft finden, und kennt man dieſe, ſo kann man den Weg beſtimmen. Soll z. B. im letzten Falle der Weg des Wagens nur 100 Fuß betragen, während deſſen Zurücklegung die Geſchwindigkeit von 15 Fuß in die von 24 Fuß übergeht, ſo hat man die Kraft $P = (h - h_1)\, \frac{G}{s} = \frac{33696}{100} = 336{,}96$ Pfund. Wäre aber die Kraft ſelbſt 2000 Pfund, ſo würde der Weg $s = (h - h_1)\, \frac{G}{P} = \frac{33696}{2000}$ $= 16{,}848$ Fuß betragen. 3) Wenn ein 500 Pfund ſchwerer Schlitten in Folge der Reibung auf der Bahn ſeine Geſchwindigkeit von 16 Fuß nach Zurücklegung von 100 Fuß Weg gänzlich verloren hat, ſo iſt der Reibungswiderſtand

$$P = \frac{hG}{s} = 0{,}016 \,.\, 16^2 \,.\, \frac{500}{100} = 0{,}016 \,.\, 256 \,.\, 5 = 20{,}48 \text{ Pf.}$$

§. 72. Die im vorigen Paragraphen gefundene Arbeitsformel

$$Ps = (h - h_1)\, G$$

gilt nicht allein für conſtante, ſondern auch für veränderliche Kräfte, wenn man nur (nach §. 70) ſtatt P den mittleren Kraftwerth einführt, denn denkt man ſich den ganzen Weg (s) der Bewegung aus lauter gleichen, gleichförmig beſchleunigt zurückgelegten Theilen $\left(\frac{s}{n}\right)$ beſtehend, ſo erhält man die Arbeiten innerhalb dieſer:

Princip der lebendigen Kraft

$$P_1\left(\frac{s}{n}\right) = \frac{v_1^2 - c^2}{2g} G,$$

$$P_2\left(\frac{s}{n}\right) = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} G,$$

$$P_3\left(\frac{s}{n}\right) = \frac{v_3^2 - v_2^2}{2g} G$$

u. s. w., insofern v_1, v_2, v_3 u. s. w. die an den Enden dieser Raumtheile erlangten Geschwindigkeiten bezeichnen, und es giebt nun die Addition aller dieser Arbeiten die gesammte, zum Umsetzen der Geschwindigkeit (c in v) nöthige Arbeit:

$Ps = (P_1 + P_2 + P_3 + \ldots)\frac{s}{n} = \frac{v^2 - c^2}{2g} G$, weil sich für eine unendliche Anzahl (n) von Kräften, $(P_1 + P_2 + P_3 + \ldots) : n$ in die mittlere Kraft verwandelt und sich auf der rechten Seite der Gleichung die Glieder $\frac{v_1^2}{2g} G$ und $-\frac{v_1^2}{2g} G$, so wie $\frac{v_2^2}{2g} G$ und $-\frac{v_2^2}{2g} G$ u. s. w. gegen einander heben, so daß nur das durch die Endgeschwindigkeit v und das durch die Anfangsgeschwindigkeit c bestimmte Glied $\frac{v^2}{2g} G$ und $\frac{c^2}{2g} G$ übrig bleiben.

Die Formel $Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2g}\right) G = (h - h_1) G$ wird nicht allein zur Bestimmung der Arbeit, sondern auch, und dies zumal sehr oft, zur Ermittlung der Endgeschwindigkeit gebraucht. Im letzteren Falle setzt man $h = h_1 + \frac{Ps}{G}$ oder $v = \sqrt{c^2 + 2g\frac{Ps}{G}}$. Wenn bei der (stetigen) Bewegung eines Körpers die Endgeschwindigkeit v gleich ist der Anfangsgeschwindigkeit c, so ist die in Anspruch genommene Arbeit = Null, d. h. es nimmt der beschleunigte Theil der Bewegung gerade so viel Arbeit in Anspruch, als der verzögerte Theil derselben ausgiebt.

Beispiel. Wenn ein ohne Reibung auf einer Eisenbahn fortgehender Wagen von 2500 Pfund Gewicht zur Vermehrung seiner Geschwindigkeit, die anfangs nur 10 Fuß betrug, eine mechanische Arbeit von 8000 Fußpfund in sich aufgenommen hat, so wird seine Geschwindigkeit nach Aufnahme dieser Arbeit $v = \sqrt{10^2 + 62{,}5 \cdot \frac{8000}{2500}} = \sqrt{100 + 200} = 17{,}32$ Fuß betragen.

Anmerkung. Man nennt, ohne einen besonderen Begriff damit zu verbinden, das Product aus Masse $M = \frac{G}{g}$ und Quadrat der Geschwindigkeit (v^2), also Mv^2, die lebendige Kraft (franz.: force vive, engl., eigentlich lat.: vis viva) der bewegten Masse, und kann hiernach die mechanische Arbeit, welche eine bewegte Masse in sich vereinigt, gleichsetzen der halben lebendigen Kraft derselben. Geht eine träge

Maſſe aus einer Geſchwindigkeit c in eine andere v über, ſo iſt die eingenommene oder ausgegebene Arbeit gleich der halben Differenz zwiſchen den lebendigen Kräften am Ende und am Anfange der Geſchwindigkeitsveränderung. Dieſes Geſetz von der mechaniſchen Leiſtung der Körper durch ihre Trägheit nennt man das Princip der lebendigen Kräfte (franz principe des forces vives, engl. principle of vis viva).

Zuſammenſetzung der Kräfte.

§. 73. Wirken zwei Kräfte P_1 und P_2 auf einen und denſelben Körper in gleicher oder entgegengeſetzter Richtung, ſo iſt die Wirkung dieſelbe, als wenn nur eine Kraft auf den Körper wirkte, welche der Summe oder Differenz dieſer Kräfte gleich iſt, denn dieſe Kräfte ertheilen der Maſſe M die Acceleration: $p_1 = \frac{P_1}{M}$ und $p_2 = \frac{P_2}{M}$, es iſt folglich nach §. 28 die aus beiden reſultirende Acceleration

$p = p_1 \pm p_2 = \frac{P_1 \pm P_2}{M}$, und demnach die derſelben entſprechende Kraft $P = Mp = P_1 \pm P_2$.

Man nennt die aus den beiden Kräften hervorgehende, gleich viel vermögende (äquipollente) Kraft P die Reſultirende (franz. résultante, engl. resultant), ihre Beſtandtheile P_1 und P_2 aber die Componenten (franz composantes, engl. components).

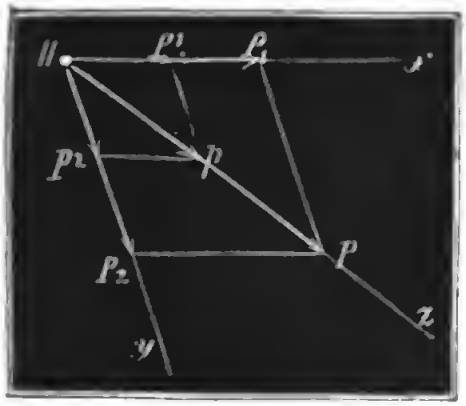
Beiſpiele. 1) Ein auf der flachen Hand liegender Körper drückt nur ſo lange mit ſeinem abſoluten Gewichte auf dieſelbe, ſo lange die Hand in Ruhe iſt oder mit dem Körper gleichförmig auf- oder abwärts bewegt wird; hebt man aber die Hand beſchleunigt empor, ſo erleidet dieſelbe einen ſtärkeren Druck, geht man dagegen beſchleunigt mit der Hand ſenkrecht nieder, ſo wird der Druck kleiner als das Gewicht; er wird ſogar Null, wenn man die Hand mit der Acceleration der Schwere herabführt. Iſt der Druck auf die Hand $= P$, ſo fällt der Körper nur mit der Kraft $G - P$ nieder, während ſeine Maſſe $M = \frac{G}{g}$ iſt; ſetzen wir daher die Acceleration, mit welcher die Hand mit dem darauf liegenden Körper niedergeht, $= p$, ſo folgt $G - P = \frac{G}{g} p$, und daher der Druck $P = G - \frac{p}{g} G = \left(1 - \frac{p}{g}\right) G$. Läßt man dagegen den Körper auf der Hand mit der Acceleration p aufſteigen, ſo iſt p der Acceleration g entgegengeſetzt, daher der Druck auf die Hand $P = \left(1 + \frac{p}{g}\right) G$. Je nachdem man einen Körper mit 20 Fuß Beſchleunigung ab- oder aufwärts ſteigen läßt, iſt der Druck auf die Hand $= \left(1 - \frac{20}{31{,}25}\right) G = (1 - 0{,}64)\, G = 0{,}36$ des Körpergewichtes oder $= 1 + 0{,}64 = 1{,}64$ deſſelben. 2) Wenn ich mit der flachen Hand einen Körper von 3 Pfund Gewicht 14 Fuß hoch ſenkrecht in die Höhe ſchleudere, indem ich ihn auf die erſten zwei Fuß Höhe mit der Hand unausgeſetzt forttreibe, ſo iſt die verrichtete mechaniſche Arbeit $P s = G h = 3 \times 14 = 42$ Fußpfund, und demnach der Druck des Körpers auf die Hand: $P = \frac{42}{2} = 21$ Pfund. Während alſo der

ruhende Körper mit 3 Pfund drückt, wirkt er während des Werfens mit 21 Pfund Kraft auf die Hand zurück.

§. 74. Wird eine Masse (ein materieller Punkt) M, Fig. 72, von zwei Kräften P_1 und P_2 ergriffen, deren Richtungen MX und MY einen Winkel $XMY = \alpha$ zwischen sich einschließen, so erzeugen diese nach eben diesen Richtungen die Accelerationen $p_1 = \frac{P_1}{M}$ und $p_2 = \frac{P_2}{M}$, aus deren Vereinigung eine mittlere Acceleration (§. 34) in einer Richtung MZ entsteht, die durch die Diagonale eines aus p_1, p_2 und α construirten Parallelogramms gegeben ist; auch ist diese mittlere oder resultirende Acceleration $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2 p_1 p_2 \cos. \alpha}$ und für den Winkel φ, den die Richtung derselben mit der Richtung MX der einen Acceleration p_1 einschließt, hat man

Parallelogramm der Kräfte.

Fig. 72.



$$\sin. \varphi = \frac{p_2 \sin. \alpha}{p}.$$

Setzen wir in diesen beiden Formeln die angegebenen Werthe von p_1 und p_2, so folgt

$$p = \sqrt{\left(\frac{P_1}{M}\right)^2 + \left(\frac{P_2}{M}\right)^2 + 2\left(\frac{P_1}{M}\right)\left(\frac{P_2}{M}\right) \cos. \alpha} \text{ und}$$

$$\sin. \varphi = \left(\frac{P_2}{M}\right)\frac{\sin. \alpha}{p}.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung durch M, so folgt

$$Mp = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos. \alpha}. \text{ oder,}$$

da Mp die der Acceleration entsprechende Kraft P ist,

$$1)\ P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos. \alpha} \text{ und}$$

$$2)\ \sin. \varphi = \frac{P_2 \sin. \alpha}{P}.$$

Es wird also die Resultirende oder Mittelkraft sowohl ihrer Größe als auch ihrer Richtung nach aus den Componenten oder Seitenkräften genau so bestimmt, wie die mittlere Acceleration aus den Seitenaccelerationen.

Repräsentiren wir die Kräfte durch gerade Linien, indem wir diese in denselben Verhältnissen zu einander stehen lassen, wie sie in Gewichten, z. B. Pfunden, in Wirklichkeit zu einander stehen, so läßt sich demnach

Parallelogramm der Kräfte.

die Reſultirende durch die Diagonale desjenigen Parallelogrammes darſtellen, deſſen Seiten durch die Seitenkräfte gebildet werden und wovon ein Winkel dem von den Richtungen der Seitenkräfte gebildeten Winkel gleich iſt. Das ſo aus den Seitenkräften conſtruirte und durch ſeine Diagonale die Mittelkraft ausdrückende Parallelogramm wird das Parallelogramm der Kräfte genannt.

Beiſpiel. Wenn ein auf einem vollkommen glatten Tiſche ruhender Körper,

Fig. 73.

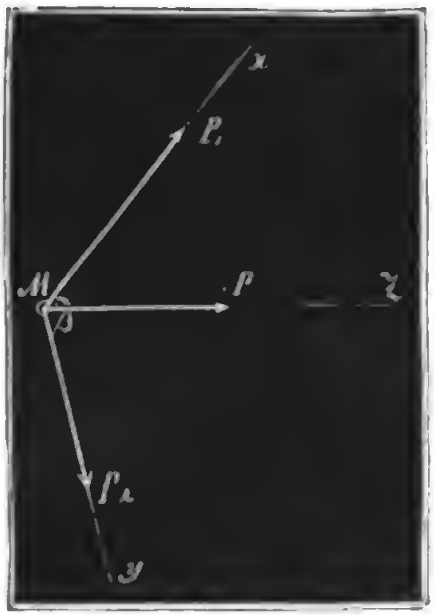


Fig. 73, von 150 Pfund Gewicht von zwei Kräften $P_1 = 30$ Pf. und $P_2 = 24$ Pf. ergriffen wird, die einen Winkel $P_1 M P_2 = \alpha + \beta = 105$ Grad zwiſchen ſich einſchließen, ſo iſt die Frage, nach welcher Richtung und mit welcher Acceleration die Bewegung vor ſich gehen werde? Da $\cos.(\alpha+\beta) = \cos. 105° = -\cos. 75°$, ſo folgt die Mittelkraft

$$P = \sqrt{30^2 + 24^2 - 2 \cdot 30 \cdot 24 \cos. 75°}$$
$$= \sqrt{900 + 576 - 1440 \cos. 75°}$$
$$= \sqrt{1476 - 372{,}4} = 33{,}22 \text{ Pf.};$$

und die ihr entſprechende Acceleration

$$p = \frac{P}{M} = \frac{Pg}{G} = \frac{33{,}22 \cdot 31{,}25}{150} = 6{,}92 \text{ Fuß}.$$

Die Bewegungsrichtung ſchließt mit der Richtung der erſten Kraft einen Winkel α ein, der beſtimmt iſt durch

$$\sin. \alpha = \frac{24}{33{,}22} \sin. 105 = 0{,}7224 \sin. 75° = 0{,}6978;$$

es iſt alſo $\alpha = 44°. 15'$.

Anmerkung. Die Mittelkraft (P) hängt, den gefundenen Formeln zufolge, nur von den Seitenkräften, nie aber von der Maſſe (M) des Körpers, auf welche die Kräfte wirken, ab. Deshalb findet man in vielen Werken über Mechanik die Richtigkeit des Parallelogramms der Kräfte ohne Rückſicht auf die Maſſe, wohl aber mit Zugrundlegung irgend eines Grundgeſetzes bewieſen. Solcher rein ſtatiſchen Beweiſe giebt es viele. In jedem der folgenden Werke findet man einen andern Beweis. Eytelwein's Handbuch der Statik feſter Körper, Gerſtner's Handbuch der Mechanik, Kayſer's Handbuch der Statik, Möbius' Lehrbuch der Statik, Rühlmann's techniſche Mechanik. Der Beweis in Gerſtner's Mechanik ſetzt die Theorie des Hebels voraus; er iſt übrigens ſehr einfach und findet ſich in ſehr vielen alten und auch in neuen Schriften, z. B. in denen von Käſtner, Monge, Whewell u. ſ. w. Kayſer's Beweis iſt der Poiſſon'ſche in elementarem Gewande. Möbius' Entwickelung iſt auf eine beſondere, von Poinſot (Elémens de Statique) eingeführte Theorie, auf die der Kräftepaare (des couples), gegründet. Den Beweis in Rühlmann's Mechanik hat Duchayla zuerſt geliefert; er wird aber auch noch in vielen anderen Werken angewendet, z. B. in Moſeley's Mechanical Principles u. ſ. w. Eine auf die Bewegungsgeſetze gegründete Theorie dieſes Parallelogramms findet man ſchon in Newton's Principien; ſie wird aber auch von vielen Neueren gebraucht, z. B. von Venturoli, Poncelet, Burg u. ſ. w. S. Elementi di Mecanica e d'Idraulica di

Venturoli; Mécanique industrielle par Poncelet; Compendium der populären Mechanik und Maschinenlehre von Burg.

§. 75. Mit Hülfe des Kräfteparallelogramms lassen sich nicht nur zwei oder mehrere Kräfte zu einer einzigen zusammensetzen, sondern auch gegebene Kräfte unter gegebenen Verhältnissen in zwei oder mehrere Kräfte zerlegen. Zerlegung der Kräfte. Sind die Winkel α und β gegeben, welche die Seitenkräfte $MP_1 = P_1$ und $MP_2 = P_2$, Fig. 73, mit der gegebenen Kraft $MP = P$ einschließen, so ergeben sich die Seitenkräfte oder Componenten durch die Formeln $P_1 = \frac{P \sin.\beta}{\sin.(\alpha+\beta)}$, $P_2 = \frac{P \sin.\alpha}{\sin.(\alpha+\beta)}$. Stehen die Seitenkräfte winkelrecht auf einander, ist also $\alpha+\beta = 90^0$ und $\sin.(\alpha+\beta) = 1$, so hat man $P_1 = P \cos.\alpha$ und $P_2 = P \sin.\alpha$. Sind endlich β und α einander gleich, so ist auch

$$P_2 = P_1, \text{ nämlich} = \frac{P \sin.\alpha}{\sin.2\alpha} = \frac{P}{2\cos.\alpha}.$$

Beispiele. 1) Wie stark wird der Tisch AB, Fig. 74, von einem Körper M gedrückt, dessen Gewicht $G = 70$ Pf. ist, und auf den eine Kraft $P = 50$ Pf. wirkt, deren Richtung unter dem Winkel $PMP_1 = \alpha = 40^0$ gegen den Horizont geneigt ist? Der horizontale Component von P ist

Fig. 74.

$P_1 = P \cos.\alpha = 50 \cos. 40^0 = 38{,}30$ Pf. und der vertikale Component $P_2 = P \sin.\alpha = 50 \sin. 40^0 = 32{,}14$ Pf.; der letztere sucht den Körper vom Tische abzuziehen, es bleibt folglich der Druck auf den Tisch: $G - P_2 = 70 - 32{,}14 = 37{,}86$ Pf. 2) Wenn ein Körper M, Fig. 73, von 110 Pf. Gewicht, auf einer horizontalen Unterlage durch zwei Kräfte so bewegt wird, daß er in der ersten Secunde einen Weg von 6,5 Fuß in einer Richtung durchläuft, welche von den beiden Kräfterichtungen um die Winkel $\alpha = 52^0$ und $\beta = 77^0$ abweicht, so ergeben sich die Kräfte selbst durch Folgendes. Die Acceleration ist der doppelte Weg in der ersten Secunde, also hier $p = 2 \times 6{,}5 = 13$ Fuß. Die Mittelkraft ist nun

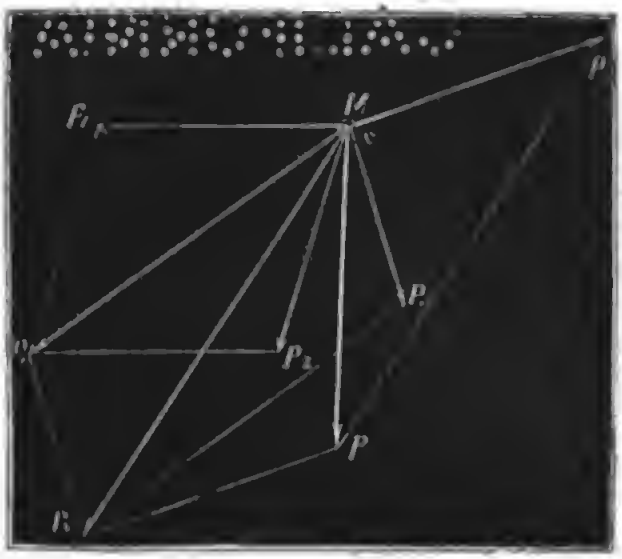
$P = \frac{p\,G}{g} = 0{,}032 \times 13 \times 110 = 45{,}76$ Pf.; daher die eine Seitenkraft

$P_1 = \frac{P \sin.77^0}{\sin.(52+77^0)} = \frac{45{,}76 \sin.77^0}{\sin.51^0} = 57{,}37$ Pf., und die andere Seitenkraft

$P_2 = \frac{45{,}76 \sin.52^0}{\sin.51^0} = 46{,}40$ Pf.

§. 76. Um die Mittelkraft P zu einem Systeme von Seitenkräften P_1, P_2, P_3 u. s. w. (Fig. 75 a. f. S.) zu finden, kann man genau denselben Weg (§. 33) einschlagen, welcher bei der Zusammensetzung von Geschwindigkeiten befolgt wurde, man kann nämlich durch wiederholte Anwendung Kräfte in einer Ebene.

Fig. 75.



Kräfte in einer Ebene.

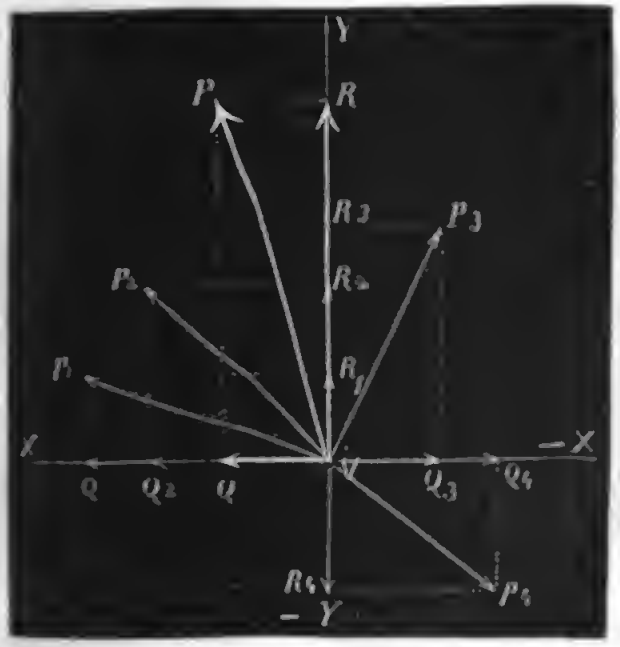
des Kräfteparallelogrammes je zwei und zwei Kräfte zu einer vereinigen, bis zuletzt nur noch eine übrig bleibt. Die Kräfte P_1 und P_2 geben z. B. durch das Parallelogramm MP_1QP_2 die Mittelkraft $MQ = Q$; wenn man dieſe wieder mit P_3 vereinigt, erhält man im Parallelogramm $MQRP_3$ die Mittelkraft $MR = R$, und die letztere wieder mit P_4 zu einem Parallelogramm verbunden, ſtellt ſich in der Diagonale $MP = P$ die letzte, allen vier Kräften P_1, P_2, P_3 und P_4 zuſammen äquivalente Mittelkraft heraus.

Es iſt nicht nöthig, bei dieſer Zuſammenſetzungsweiſe das Parallelogramm ſtets zu vollenden und deſſen Diagonale anzugeben. Man bilde ein Polygon MP_1QRP, indem man die Seiten MP_1, P_1Q, QR, RP den gegebenen Componenten P_1, P_2, P_3, P_4 parallel legt und gleichmacht; die letzte, das Polygon zuſchließende Seite MP, iſt die geſuchte Mittelkraft P oder vielmehr nur ihr Maaß.

Anmerkung. Es iſt ſehr nützlich, die Aufgaben der Mechanik auch durch Conſtruction aufzulöſen; wenn die conſtruirende Auflöſung auch nicht ſo viel Genauigkeit gewährt als die rechnende, ſo ſichert ſie dagegen ſehr vor groben Fehlern und kann deshalb immer als Prüfung der Rechnung dienen. In Fig. 75 ſind die Kräfte unter den gegebenen Winkeln $P_1MP_2 = 72°\,30'$; $P_2MP_3 = 33°\,20$ und $P_3MP_4 = 92°\,40'$ an einander geſtoßen und ſo aufgetragen, daß ein Pfund durch eine Linie des preuß. Zolles repräſentirt wird. Die Kräfte $P_1 = 11.5$ Pf., $P_2 = 10{,}8$ Pf., $P_3 = 8{,}5$ Pf. und $P_4 = 12{,}2$ Pf. ſind daher durch Seiten von 11,5 Lin., 10,8 Lin., 8,5 Lin. und 12,2 Linien Länge ausgedrückt. Eine ſorgfältige Conſtruction des Kräftepolygons giebt die Größe der Mittelkraft $P = 14{,}6$ Pfund und die Abweichung ihrer Richtung MP von der Richtung MP_1 der erſten Kraft $= 86\frac{1}{2}$ Grad.

§. 77. Einfacher und ſchärfer beſtimmt ſich die Mittelkraft P, wenn man jeden der gegebenen Componenten P_1, P_2, P_3 u. ſ. w. nach zwei rechtwinklig gegen einander ſtehenden Axenrichtungen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$, Fig. 76,

Fig. 76.



Kräfte in einer Ebene.

in Seitenkräfte wie Q_1 und R_1, Q_2 und R_2, Q_3 und R_3 u. ſ. w. zerlegt, die in eine und dieſelbe Axenrichtung fallenden Kräfte algebraiſch addirt und nun aus den ſich ergebenden, unter einem Rechtwinkel aus einander ziehenden zwei Kräften die Größe und Richtung der Reſultirenden ſucht. Sind die Winkel P_1MX, P_2MX, P_3MX u. ſ. w., welche die Richtungen von den Kräften P_1, P_2, P_3 u. ſ. w. mit der Axe XX einſchließen, $= \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ u. ſ. w., ſo hat man die Seitenkräfte $Q_1 = P_1 \cos. \alpha_1$, $R_1 = P_1 \sin. \alpha_1$, $Q_2 = P_2 \cos. \alpha_2$, $R_2 = P_2 \sin. \alpha_2$ u. ſ. w., weshalb folgt aus $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots$,

1) $Q = P_1 \cos. \alpha_1 + P_2 \cos. \alpha_2 + P_3 \cos. \alpha_3 + \ldots$, und ebenſo aus $R = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$,

2) $R = P_1 \sin. \alpha_1 + P_2 \sin. \alpha_2 + P_3 \sin. \alpha_3 + \ldots$

Aus den ſo gefundenen zwei Seitenkräften Q und R folgt nun die Größe der geſuchten Mittelkraft

3) $P = \sqrt{Q^2 + R^2}$ und der Winkel $PMX = \varphi$, den ihre Richtung mit XX einſchließt, durch

4) $tang.\ \varphi = \frac{R}{Q}$.

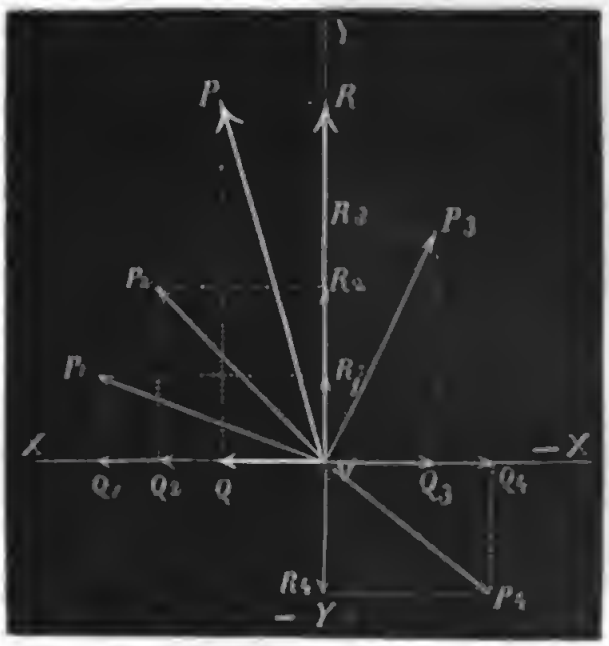
Bei der algebraiſchen Addition der Kräfte hat man die Vorzeichen genau zu berückſichtigen, denn ſind dieſelben bei zwei Kräften verſchieden, d. h. ſind dieſe Kräfte vom Angriffspunkte M aus nach entgegengeſetzten Seiten gerichtet, ſo geht dieſe Addition in eine arithmetiſche Subtraction über (§. 73). Der Winkel φ iſt ſpitz, ſo lange Q und R poſitiv ſind, er iſt zwiſchen einem und zwei Rechtwinkeln, wenn Q negativ und R poſitiv, zwiſchen zwei und drei Rechten, wenn Q und R beide negativ ſind, liegt endlich aber zwiſchen drei und vier Rechten, wenn bloß R negativ iſt.

Beiſpiel. Welches iſt die Größe und Richtung der Mittelkraft aus den Seitenkräften $P_1 = 30$ Pf., $P_2 = 70$ Pf. und $P_3 = 50$ Pf., deren Richtungen,

Kräfte in einer Ebene.

in einer Ebene liegend, die Winkel $P_1 MP_2 = 56°$ und $P_2 MP_3 = 104°$ zwiſchen ſich einſchließen? Legen wir die Axe XX, Fig. 77, in die Richtung der erſten Kraft, ſo erhalten wir $\alpha_1 = 0°$, und $\alpha_2 = 56°$, $\alpha_3 = 56° + 104° = 160°$; daher

Fig. 77.



1) $Q = 30 \,.\, cos.\ 0°$
$+ 70 \,.\, cos.\ 56°$
$+ 50\ cos.\ 160°$
$= 30 + 39{,}14 - 46{,}98$
$= 22{,}16$ Pf., und

2) $R = 30 \,.\, sin.\ 0°$
$+ 70 \,.\, sin.\ 56°$
$+ 50 \,.\, sin.\ 160°$
$= 0 + 58{,}03 + 17{,}10$
$= 75{,}13$ Pf. Ferner

3) $tang.\ \varphi = \frac{75{,}13}{22{,}16}$
$= 3{,}3903$,

und hiernach den Winkel, welchen die Mittelkraft mit dem poſitiven Axentheile MX oder der Kraft P_1 einſchließt, $\varphi = 73° 34'$, endlich dieſe Kraft ſelber

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \frac{Q}{cos.\ \varphi} = \frac{R}{sin.\ \varphi} = \frac{75{,}13}{sin.\ 73°34'} = \frac{75{,}13}{0{,}9591} = 78{,}33 \text{ Pf.}$$

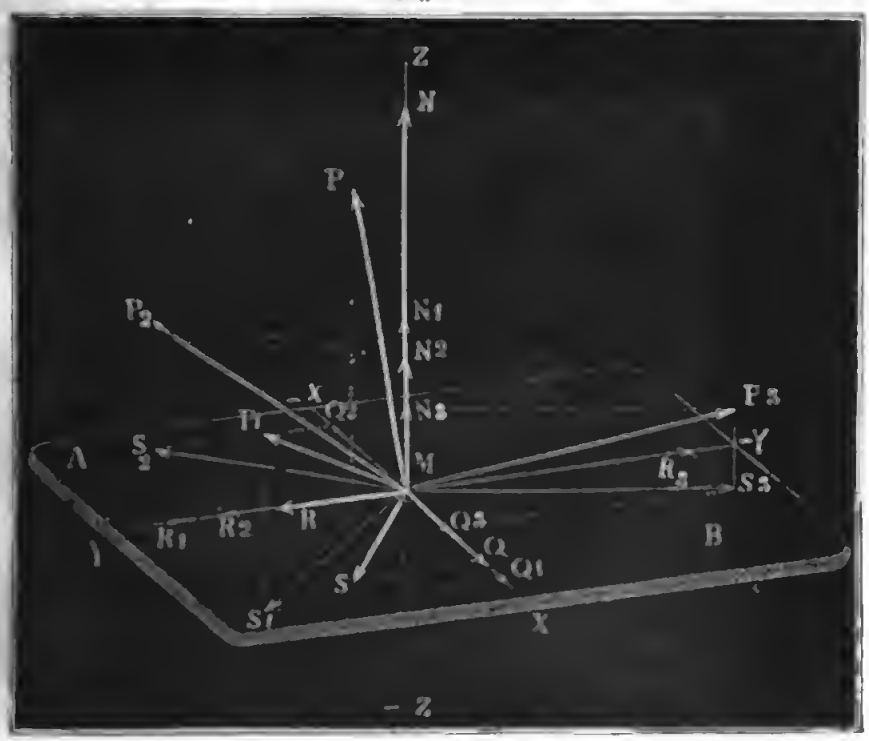
Kräfte im Raume.

§. 78. Liegen die Kraftrichtungen nicht in einer und derſelben Ebene, ſo lege man durch den Angriffspunkt der Kräfte eine Ebene und zerlege jede derſelben in zwei andere, die eine derſelben in der Ebene liegend, die andere rechtwinklig zur Ebene. Die ſo erhaltenen Seitenkräfte in der Ebene ſind nach der Regel des vorigen §. in eine Mittelkraft und die Seitenkräfte rechtwinklig zur Ebene hat man durch Addition zu einer einzigen zu vereinigen; zu den auf dieſe Weiſe erhaltenen zwei rechtwinkligen Componenten iſt endlich nach der bekannten Regel (§. 74) die Mittelkraft zu finden.

Fig. 78 (a. f. S.) führt das eben angegebene Verfahren mehr vor Augen. $MP_1 = P_1$, $MP_2 = P_2$, $MP_3 = P_3$ ſeien die einzelnen Kräfte, AB die Ebene (Projectionsebene) und $Z\bar{Z}$ die Axe winkelrecht zu ihr. Aus der Zerlegung der Kräfte P_1, P_2 u. ſ. w. ergeben ſich die Kräfte S_1, S_2 u. ſ. w. in der Ebene und die Kräfte N_1, N_2 u. ſ. w. in der Normale $Z\bar{Z}$. Jene werden wieder nach zwei Axen XX und YY in die Seitenkräfte Q_1, Q_2 u. ſ. w. R_1, R_2 u. ſ. w, zerlegt und geben die Componenten Q und R, woraus nun wieder die Mittelkraft S entſteht, welche, mit der Summe N aller Normalkräfte N_1, N_2 u. ſ. w. vereinigt, die geſuchte Mittelkraft P giebt.

Setzen wir die Winkel, unter welchen die Kraftrichtungen gegen die Ebene AB, z. B. gegen den Horizont geneigt sind, β_1, β_2 u. s. w., so er- Kräfte im Raume.

Fig. 78.



geben sich Kräfte in der Ebene: $S_1 = P_1 \cos. \beta_1$, $S_2 = P_2 \cos. \beta_2$ u. s. w., und die Normalkräfte: $N_1 = P_1 \sin. \beta_1$, $N_2 = P_2 \sin \beta_2$ u. s. w.; bezeichnen wir endlich die Winkel, welche die in der Ebene AB liegenden Projectionen der Kraftrichtungen mit der Axe XX einschließen, mit α_1, α_2 u. s. w., setzen wir also $S_1MX = \alpha_1$, $S_2MX = \alpha_2$ u. s. w., so stoßen wir auf folgende drei, die Kanten eines geraden Parallelepipeds (des Kräfteparallelepipeds) bildende Kräfte:

$$Q = S_1 \cos. \alpha_1 + S_2 \cos. \alpha_2 + \ldots, \text{ oder}$$

1) $Q = P_1 \cos. \beta_1 \cos. \alpha_1 + P_2 \cos. \beta_2 \cos. \alpha_2 + \ldots$, ebenso

2) $R = P_1 \cos. \beta_1 \sin. \alpha_1 + P_2 \cos. \beta_2 \sin. \alpha_2 + \ldots$, endlich

3) $N = P_1 \sin. \beta_1 + P_2 \sin. \beta_2 + \ldots$

Aus diesen drei Kräften folgt die letzte Resultirende:

4) $P = \sqrt{Q^2 + R^2 + N^2}$, ferner

der Neigungswinkel $PMS = \psi$ derselben gegen die Projectionsebene, durch

5) $tang. \psi = \frac{N}{S} = \frac{N}{\sqrt{Q^2 + R^2}}$, endlich

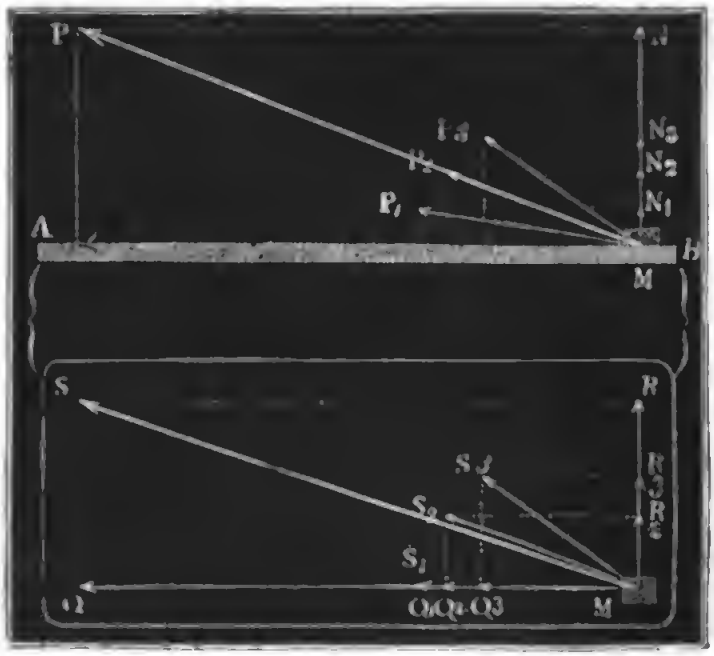
der Winkel $SMX = \varphi$, welchen die Projection der Resultirenden in der Ebene AB mit der ersten Axe XX einschließt, durch

Kräfte im Raume.

6) $tang.\,\varphi = \frac{R}{Q}$.

Beiſpiel. Drei Arbeiter ziehen an den Enden dreier Seile, welche an einer auf einem horizontalen Boden AB, Fig. 79, liegenden Laſt M angeknüpft ſind,

Fig. 79.



jeder mit 50 Pfund Kraft; die Neigungswinkel dieſer Kräfte gegen den Horizont ſind 10°, 20° und 30°, und die Horizontalwinkel zwiſchen der erſten und zweiten und der erſten und dritten Kraft = 20° und 35°; welches iſt die Größe und Richtung der Reſultirenden und wie viel iſt dieſe kleiner als die Summe aller Kräfte, welche reſultiren würde, wenn alle drei Kräfte in einerlei Richtung wirkten. Die vertikal in die Höhe ziehende Kraft iſt:

$N = N_1 + N_2 + N_3 = 50.(sin.10° + sin.20° + sin.30°) = 50.1{,}01567 = 50{,}78$ Pf.;

um ſo viel drückt alſo der Körper auf den Boden weniger als das ganze Gewicht deſſelben.

Die horizontalen Seitenkräfte ſind $S_1 = 50\,.\,cos.\,10° = 50\,.\,0{,}9849 = 49{,}24$ Pf., $S_2 = 50\,.\,cos.\,20° = 46{,}98$ Pf., $S_3 = 50\,.\,cos.\,30° = 43{,}30$ Pf. Legen wir die Are $X\overline{X}$ in die Richtung der erſten Kraft S_1, ſo erhalten wir die Seitenkraft in dieſer Are $X\overline{X}$, $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = S_1\,cos.\,\alpha_1 + S_2\,cos.\,\alpha_2 + S_3\,cos.\,\alpha_3$
$= 49{,}24 \times cos.\,0° + 46{,}98 \times cos.\,20° + 43{,}30 \times cos.\,35° = 49\,24 + 44{,}15 + 35{,}4$
$= 128{,}86$ Pf.; dagegen die Seitenkraft in der zweiten Are $Y\overline{Y}$:
$R = R_1 + R_2 + R_3 = 49{,}24 \times sin.\,0° + 46{,}98 \times sin.\,20° + 43.30 \times sin.\,35°$
$= 0 + 16{,}07 + 24.84 = 40{,}91$ Pf.

Die horizontale Mittelkraft, mit welcher der Körper fortgezogen wird, iſt hiernach

$S = \sqrt{Q^2 + R^2} = \sqrt{(128{,}86)^2 + (40{,}91)^2} = \sqrt{18278{,}7} = 135{,}2$ Pf

Der Winkel φ, welchen dieſe Kraft mit der Are $X\overline{X}$ einſchließt, iſt beſtimmt durch $tang.\,\varphi = \frac{R}{Q} = \frac{40{,}91}{128{,}86} = 0{,}3175$; es iſt alſo $\varphi = 17°{,}37'$; die vollſtändige Re-

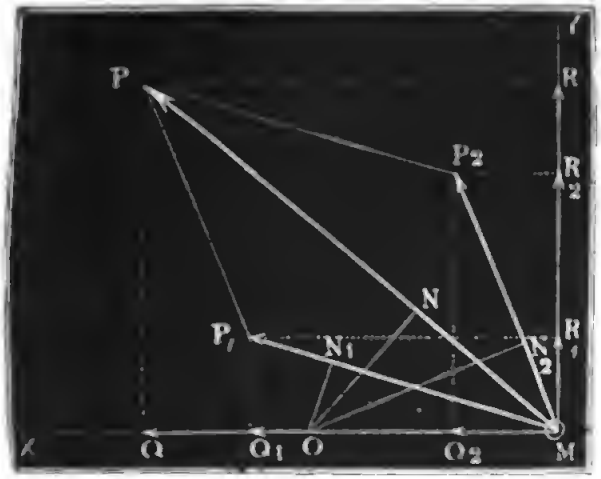
sultirende ist: $P = \sqrt{(135{,}2)^2 + (50{,}78)^2} = \sqrt{20856{,}6} = 144{,}43$ Pf. Kräfte im Raume.

Wirken die Kräfte in gleicher Richtung, so ist die Resultirende $= 3 \times 50 = 150$ Pf.; es ist also der Kraftverlust $= 150 - 144{,}42 = 5{,}58$ Pf.; weil ferner die den Körper fortziehende Horizontalkraft nur 135,20 Pf. beträgt, so hat man in Hinsicht auf die Horizontalbewegung den Kraftverlust $150 - 135{,}20 = 14{,}80$ Pf.

Der Neigungswinkel ψ der Mittelkraft gegen den Horizont ist bestimmt durch $tang.\psi = \frac{N}{S} = \frac{50{,}78}{135{,}20} = 0{,}3756$. weshalb er $= 20°, 35'$ ausfällt.

§. 79. Aus den in dem Vorigen gefundenen Regeln über die Zusammensetzung der Kräfte lassen sich noch zwei andere, im praktischen Gebrauch wesentliche Dienste leistende, ableiten. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. Es sei in Fig. 80 M ein materieller Punkt, es seien $MP_1 = P_1$ und $MP_2 = P_2$ die auf ihn wirkenden Kräfte, endlich sei $MP = P$ die Mittelkraft aus den Kräften P_1 und P_2. Legen wir durch M zwei Axen MX und MY winkelrecht gegen einander, und zerlegen wir die Kräfte P_1 und P_2, so wie ihre Mittelkraft P in nach diesen Axen gerichtete Seitenkräfte, also P_1 in Q_1 und R_1, P_2 in Q_2 und R_2, und P in Q und R, so erhalten wir die Kräfte in der einen Axe Q_1, Q_2 und Q, und die in der andern R_1, R_2 und R, und es ist $Q = Q_1 + Q_2$, so wie $R = R_1 + R_2$.

Fig. 80.



Nehmen wir nun in der Axe MX irgend einen Punkt O an, und fällen von demselben Perpendikel ON_1, ON_2 und ON gegen die Richtungen der Kräfte P_1, P_2 und P, so erhalten wir rechtwinkelige Dreiecke MON_1, MON_2, MON, welche den von den drei Kräften gebildeten Dreiecken ähnlich sind, nämlich:

$$\triangle MON_1 \sim \triangle MP_1Q_1$$
$$\triangle MON_2 \sim \triangle MP_2Q_2$$
$$\triangle MON \sim \triangle MPQ.$$

Diesen Aehnlichkeiten zufolge ist aber $\frac{MQ_1}{MP_1}$, d. i. $\frac{Q_1}{P_1}, = \frac{MN_1}{MO}$ ebenso $\frac{Q_2}{P_2} = \frac{MN_2}{MO}$ und $\frac{Q}{P} = \frac{MN}{MO}$; setzen wir die hiernach bestimmten Werthe von Q_1, Q_2 und Q in die Gleichung $Q = Q_1 + Q_2$, so erhalten wir

$$P.MN = P_1.MN_1 + P_2.MN_2.$$

Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten.

Ebenſo iſt auch $\frac{R_1}{P_1} = \frac{ON_1}{MO}$, $\frac{R_2}{P_2} = \frac{ON_2}{MO}$ und $\frac{R}{P} = \frac{ON}{MO}$, daher

$$P.ON = P_1.ON_1 + P_2.ON_2.$$

Dieſe Gleichungen gelten ſelbſt dann noch, wenn P die Mittelkraft aus drei oder mehreren Kräften P_1, P_2, P_3 u. ſ. w. iſt, weil man allgemein

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots$$
$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots \text{ hat;}$$

man kann daher allgemein

1) $P.MN = P_1.MN_1 + P_2.MN_2 + P_3.MN_3 + \ldots$,

2) $P.ON = P_1.ON_1 + P_2.ON_2 + P_3.ON_3 + \ldots$ ſetzen.

Beiden Gleichungen muß die Mittelkraft P aus den Kräften P_1, P_2, P_3 u. ſ. w. entſprechen, es läßt ſich aber auch dieſelbe durch dieſe Gleichungen nicht allein der Größe, ſondern auch der Richtung nach beſtimmen.

§. 80. Rückt der Angriffspunkt M, Fig. 81, und Fig. 82. in einer geraden Linie nach O, oder denkt man ſich den Angriffspunkt um den Weg

Fig. 81.

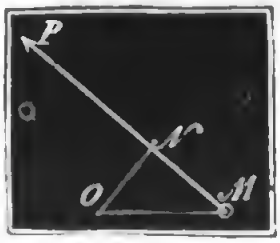
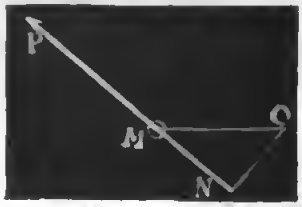


Fig. 82.



$MO = s$ fortgegangen, ſo nennt man die Projection $MN = s_1$ dieſes Weges s nach der Kraftrichtung MP den Weg der Kraft P, und das Product Ps_1 aus der Kraft und ihrem Wege: Arbeit der Kraft. Führen wir nun dieſe Bezeichnungen in der Gleichung (1) des vorigen §. ein, ſo erhalten wir

$$Ps = P_1s_1 + P_2s_2 + P_3s_3 + \ldots,$$

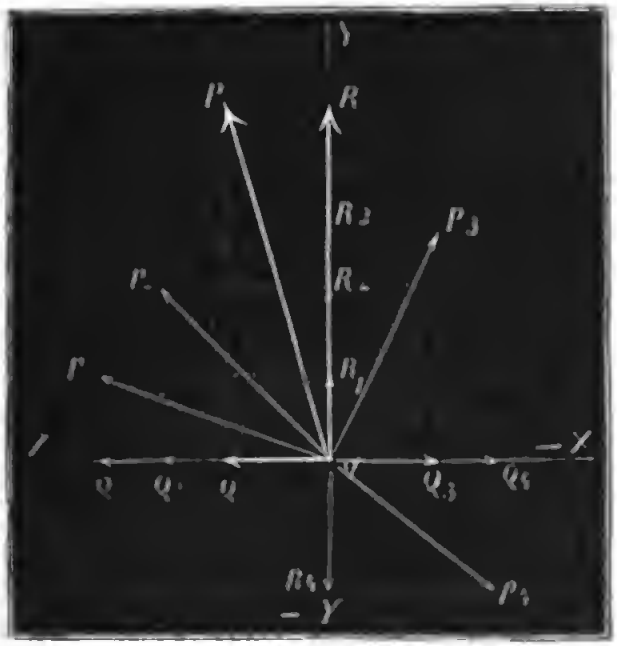
es iſt alſo die Arbeit der Mittelkraft gleich der Summe aus den Arbeiten der Seitenkräfte.

Bei der Summation dieſer mechaniſchen Arbeiten hat man wie bei der Summation von Kräften auf die Zeichen dieſer Rückſicht zu nehmen. Wirkt eine (Q_3) von den Kräften Q_1, Q_2 u ſ. w. des vorigen §. den übrigen entgegengeſetzt, ſo hat man ſie als negative Kraft einzuführen; dieſe Kraft Q_3, Fig. 83., iſt aber Component einer Kraft P_3, die unter den Verhältniſſen, wie ſie im vorigen §. vorausgeſetzt wurden, ihrer eigenen Bewegung MN_3 entgegengeſetzt wirkt; man iſt daher genöthigt, diejenige Kraft, Fig. 82, welche der Bewegung MN entgegengeſetzt wirkt, als negativ zu behandeln, wenn man diejenige Kraft P, Fig. 81, welche in der Bewegungsrichtung MN wirkt, poſitiv ſetzt.

Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Sind die Kräfte ihrer Größe oder Richtung nach veränderlich, so hat die Formel $Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + P_3 s_3 + \ldots$ nur für unendlich kleine

Fig 83.



Wege s, s_1, s_2 u. ſ. w. ihre Richtigkeit.

Man nennt die einer unendlich kleinen Verrückung σ des materiellen Punktes entſprechenden Wege σ_1, σ_2, σ_3, u. ſ. w. der Kräfte die virtuellen Geſchwindigkeiten (franz. vitesses virtuelles, engl. virtual velocities) derſelben und das der Formel $P\sigma = P_1 \sigma_1 + P_2 \sigma_2 + P_3 \sigma_3$ entſprechende Geſetz das Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten.

Uebertragung der mechaniſchen Arbeit.

§. 81. Nach dem Principe der lebendigen Kräfte iſt für eine geradlinige Bewegung (§. 71.) die mechaniſche Arbeit (Ps), welche eine Kraft (P) verrichtet, indem ſie eine Maſſe M aus der Geſchwindigkeit c in die Geſchwindigkeit v verſetzt:

$$Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M.$$

Iſt nun aber P die Mittelkraft aus anderen, auf die Maſſe M wirkenden Kräften P_1, P_2 u. ſ. w., und ſind die Wege, welche dieſe zurücklegen, s_1, s_2 u. ſ. w., während die Maſſe M ſelbſt den Weg s macht, ſo hat man nach dem vorigen §.

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \ldots,$$

es läßt ſich daher folgende allgemeine Formel:

$$P_1 s_1 + P_2 s_2 + \ldots = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M$$

Uebertragung der mechaniſchen Arbeit.

angeben und ihr nach die Summe der Arbeiten der einzelnen Kräfte gleichſetzen dem halben Gewinn der lebendigen Kraft der Maſſe.

Iſt die Geſchwindigkeit während der Bewegung unveränderlich, alſo $v = c$, und die Bewegung ſelbſt gleichförmig, ſo hat man $v^2 - c^2 = 0$, alſo weder Gewinn noch Verluſt an lebendiger Kraft, und daher

$$P_1 s_1 + P_2 s_2 + P_3 s_3 + \ldots = 0;$$

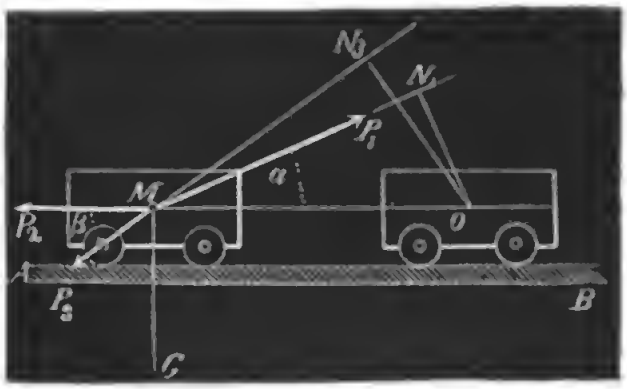
dann iſt alſo die Summe der mechaniſchen Arbeiten von den einzelnen Kräften = Null.

Wenn umgekehrt die Summe der Arbeiten gleich Null iſt, ſo verändern die Kräfte die Bewegung des Körpers in der gegebenen Richtung nicht; hatte der Körper nach der gegebenen Richtung keine Bewegung, ſo wird er auch durch Einwirkung der Kräfte in dieſer Richtung keine bekommen; hatte er vorher eine gewiſſe Geſchwindigkeit nach einer gewiſſen Richtung, ſo wird er dieſelbe auch behalten.

Sind die Kräfte veränderlich, ſo kann die veränderliche Geſchwindigkeit v nach einer gewiſſen Zeit wieder in die Anfangsgeſchwindigkeit c übergehen, was bei allen periodiſchen Bewegungen, wie ſie namentlich an vielen Maſchinen vorkommen, eintritt. Nun giebt aber $v = c$ die Arbeit $\left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M$ = Null, es iſt daher innerhalb einer Periode der Bewegung der Arbeitsverluſt oder Gewinn = Null.

Beiſpiel. Ein Wagen, Fig. 84., von dem Gewichte $G = 5000$ Pf. wird auf einem horizontalen Wege durch eine unter dem Winkel $\alpha = 24$ Grad aufſteigende Kraft $P_1 = 660$ Pf. vorwärts bewegt und hat während der Bewegung zwei Widerſtände, einen horizontalen, $P_2 = 350$ Pf., der Reibung entſprechend, und einen unter $\beta = 35°$ gegen den Horizont abwärts wirkenden Widerſtand $P_3 = 230$ Pf. zu überwinden. Welche Arbeit wird die Kraft (P_1) verrichten müſſen, um dieſen, anfänglich mit 2 Fuß Geſchwindigkeit fortgehenden Wagen in eine Geſchwindigkeit von 5 Fuß zu verſetzen.

Fig. 84.



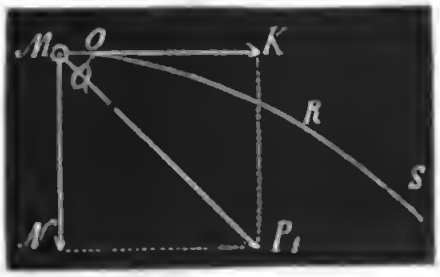
Setzen wir den Weg MO des Wagens $= s$, ſo haben wir die Arbeit der Kraft $P_1 = P_1 . MN_1 = P_1 s \cos.\alpha = 660 \times s \cos.24° = 602{,}94.s$, ferner die Arbeit der als Widerſtand wirkenden Kraft P_2, $= (-P_2) . s = -350 . s$, endlich die Arbeit von $P_3 = (-P_3) . MN_3 = -P_3 s \cos.\beta = -230 \times s \cos.35° = -188{,}40 . s$. Hiernach bleibt denn die Arbeit der bewegenden Kraft:

$Ps = P_1 s \cos.\alpha - P_2 s \cos 0 - P_3 s \cos.\beta = (602{,}94 - 350 - 188{,}40)\ s$ Uebertragung der mechanischen Arbeit.
$= 64{,}54 \ . \ s$ Fßpf.

Die Masse erfordert aber zu ihrer Geschwindigkeitsveränderung die Arbeit
$\left(\frac{v^2-c^2}{2g}\right) G = \left(\frac{5^2-2^2}{2g}\right) \times 5000 = 0{,}016 \times (25-4) \times 5000 = 1680$ Fßpf.
setzen wir daher beide Arbeiten einander gleich, so erhalten wir $64{,}54 \ . \ s = 1680$, folglich den Weg des Wagens: $s = \frac{1680}{64{,}54} = 26{,}03$ Fuß. und endlich die mechanische Arbeit der Kraft P: $P_1 s \cos \alpha = 602{,}94 \ . \ 26{,}03 = 15694$ Fßpf.

§. 82. Setzen wir unendliche kleine Wege (σ, σ_1 u. s. w.) voraus, so können wir die zuletzt gefundene Formel auch auf krumme Wege anwenden. Es sei *MORS*, Fig. 85., die Bahn des materiellen Punktes und $MP_1 = P_1$ die Mittelkraft aller auf ihn wirkenden Kräfte. Zerlegen wir diese Kraft in zwei andere, wovon die eine $MK = K$ tangential und die andere $MN = N$ normal zur Curve gerichtet ist, so nennen wir jene Tangential- und diese Normalkraft. Krummlinige Bewegung.

Fig. 85.



Während der materielle Punkt das Element $MO = \sigma$ seines krummen Weges *MS* durchläuft und seine Geschwindigkeit c in v_1 übergeht, nimmt die Masse M desselben die Arbeit $\left(\frac{v_1^2-c^2}{2}\right) M$ in Anspruch, gleichzeitig verrichtet aber die Tangentialkraft K die Arbeit $K\sigma$, und die Normalkraft die Arbeit $N \ . \ 0 = 0$; es ist folglich $K\sigma = \left(\frac{v_1^2-c^2}{2}\right) M$.

Setzt man die Projection MQ des Wegelementes MO in der Kraftrichtung $= \sigma_1$, so hat man auch $P_1 \sigma_1 = K\sigma$; und daher

$$P_1 \sigma_1 = \left(\frac{v_1^2-c^2}{2}\right) M.$$

Zerlegt man den ganzen Weg MR des materiellen Punktes in lauter unendlich kleine Theile und projicirt jeden derselben auf die jedesmalige Kraftrichtung, so stößt man auf die Wegelemente der jedesmaligen Kraft, und man erhält durch Multiplication beider die jedesmalige Arbeit; addirt man endlich alle diese Arbeiten, so bekommt man

$$P_1\sigma_1 + P_2\sigma_2 + P_3\sigma_3 + \ldots = \left(\frac{v_1^2-c^2}{2}\right) M + \left(\frac{v_2^2-v_1^2}{2}\right) M +$$

$$\left(\frac{v_3^2-v_2^2}{2}\right) M + \ldots = \left(\frac{v^2-c^2}{2}\right) M = (h-h_1)\, G,$$ wenn h_1 die der Anfangsgeschwindigkeit c, und h die der Endgeschwindigkeit v entspre-

Krummlinige Bewegung.

chende Geſchwindigkeitshöhe, G aber das Gewicht Mg des bewegten Körpers bezeichnet.

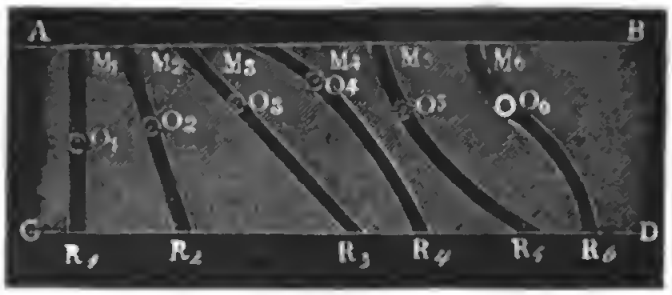
Es iſt alſo auch bei einer krummlinigen Bewegung die ganze Arbeit der bewegenden Kraft gleich dem halben Gewinn an lebendiger Kraft oder gleich dem Producte aus dem Gewichte des bewegten Körpers und aus der Differenz der Geſchwindigkeitshöhen.

Anmerkung und Beiſpiel. Die gewonnene Formel, welche aus der Verbindung des Principes der lebendigen Kräfte mit dem der virtuellen Geſchwindigkeiten hervorgeht, iſt vorzüglich in den Fällen anwendbar, wenn Körper durch feſte Unterlagen oder durch Aufhängen gezwungen werden, eine beſtimmte Bahn zu durchlaufen. Treibt einen ſolchen Körper die Schwerkraft allein, ſo iſt die Arbeit, welche dieſelbe in einem Körper vom Gewichte G beim Herabſinken von einer, der Vertikalprojection $M_1 R_1 = s$ entſprechenden Höhe erzeugt, $= Gs$ und daher

$$Gs = (h - h_1)\, G, \text{ d. i. } s = h - h_1$$

Welches alſo auch der Weg iſt, in welchem ein Körper von einer horizontalen Ebene AB, Fig. 86, bis zu einer zweiten Horizontalebene CD herabſinkt, immer

Fig. 86.



iſt die Differenz der Geſchwindigkeitshöhen gleich der ſenkrechten Fallhöhe. Körper, welche die Bahnen $M_1 O_1 R_1$, $M_2 O_2 R_2$, $M_3 O_3 R_3$ u. ſ. w. mit gleicher Geſchwindigkeit (c) zu durchlaufen anfangen, erlangen auch am Ende dieſer Bahnen, obwohl zu verſchiedenen Zeiten, gleiche Endgeſchwindigkeiten (v). Iſt die Anfangsgeſchwindigkeit $c = 10$ Fuß und die ſenkrechte Fallhöhe $s = 20$ Fuß, alſo $h = s + h_1 = 20 + 0.016 . 10^2 = 21{,}6$ Fuß, ſo folgt die Endgeſchwindigkeit $v = \sqrt{2gh} = 7{,}906 \sqrt{21{,}6} = 36{,}74$ Fuß, in welcher krummen oder geraden Linie auch das Herabfallen vor ſich geht.

Dritter Abſchnitt.

Statik feſter Körper.

Erſtes Kapitel.

Allgemeine Lehren der Statik feſter Körper.

§. 83. Obgleich jeder feſte Körper durch die auf ihn wirkenden Kräfte in ſeiner Form verändert, nämlich zuſammengedrückt, ausgedehnt, gebogen wird u. ſ. w., ſo iſt es doch geſtattet, denſelben meiſt als eine feſte und unveränderliche Verbindung materieller Punkte anzuſehen, theils, weil dieſe Form-Veränderung oder Verrückung der Theile oft ſehr klein iſt, theils weil dieſelbe innerhalb eines ſehr kurzen Zeitraumes vor ſich geht. Wir werden auch in der Folge, wenn es auch nicht beſonders erwähnt wird, jeden feſten Körper als ein Syſtem feſt unter einander verbundener Punkte anſehen, weil wir dadurch die Unterſuchungen weſentlich vereinfachen. Verlegung des Angriffspunktes.

Eine Kraft P, Fig. 87., welche auf einen Punkt A eines feſten Körpers M wirkt, pflanzt ſich in ihrer eigenen Richtung $X\overline{X}$ unverändert durch den ganzen Körper hindurch, und eine ihr gleiche Gegenkraft P_1 ſetzt ſich mit ihr nur dann in's Gleichgewicht, wenn der Angriffspunkt A_1 dieſer in der Richtung $X\overline{X}$ der erſten Kraft liegt. Die Entfernung dieſer Angriffspunkte A und A_1 iſt ohne Einfluß auf dieſen Gleichgewichtszuſtand; die beiden Gegenkräfte halten ſich bei jeder Entfernung das Gleichgewicht, wenn nur beide Punkte feſt unter einander verbunden ſind. Hiernach läßt ſich denn behaupten: die Wir-

Fig. 87.

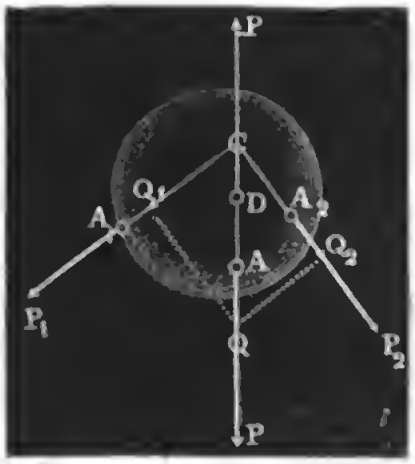
Verlegung des Angriffspunktes.

Fig. 88.

kung einer Kraft P, Fig. 88, bleibt dieſelbe, in welchem Punkte A_1, A_2, A_3 u. ſ. w. ihrer Richtung ſie auch angreift oder unmittelbar auf den Körper M wirkt.

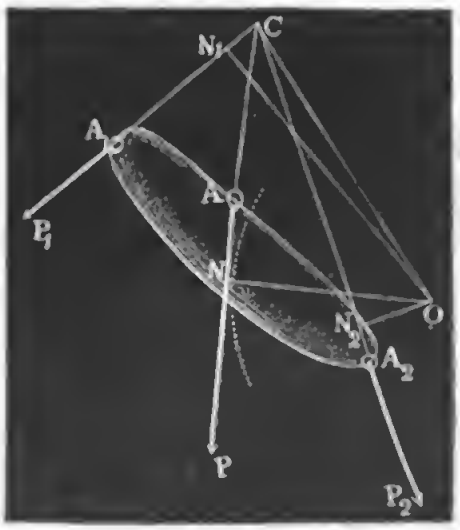
§. 84. Ergreifen zwei, in einerlei Ebene wirkende Kräfte P_1 und P_2, Fig. 89, einen Körper in verſchiedenen Punkten A_1 und A_2, ſo iſt deren Wirkung auf den Körper dieſelbe, als wenn ſie den Punkt C zum gemeinſchaftlichen Angriffspunkte hätten, in welchem ſich die Richtungen beider ſchneiden, denn es läßt ſich nach dem oben ausgeſprochenen Satze jeder dieſer Angriffspunkte nach C verlegen, ohne eine Aenderung in den Wirkungen dadurch hervorzubringen. Machen wir deshalb $CQ_1 = A_1P_1 = P_1$ und $CQ_2 = A_2P_2 = P_2$, und vollenden wir jetzt das Parallelogramm CQ_1QQ_2, ſo giebt uns deſſen Diagonale die Mittelkraft $CQ = P$ von CQ_1 und CQ_2 und alſo auch von den Kräften P_1 und P_2, deren Angriffspunkt übrigens auch jeder andere Punkt A in der Richtung dieſer Diagonale ſein kann.

Fig. 89.



Setzt man der ſo gefundenen Mittelkraft $AP = P$ eine gleich große, in irgend einem Punkte D der Diagonalrichtung CQ angreifende Gegenkraft $DP = -P$ entgegen, ſo wird dadurch den gegebenen Kräften P_1 und P_2 das Gleichgewicht gehalten; P_1, P_2 und $-P$ ſind alſo drei Kräfte im Gleichgewichte.

Fig. 90.



Statiſche Momente.

§. 85. Fällt man von irgend einem Punkte O, Fig. 90, in der Kräfteebene Perpendikel ON_1, ON_2 und ON gegen die Richtungen der Seitenkräfte P_1 und P_2 und ihrer Mittelkraft P, ſo hat man dem §. 79 zufolge:

$$P.ON = P_1.ON_1 + P_2.ON_2,$$

Statische Momente.

und es läßt sich demnach aus den Perpendikeln oder Abständen ON_1 und ON_2 der Seitenkräfte der Abstand ON der Mittelkraft finden, indem man setzt:

$$ON = \frac{P_1.ON_1 + P_2.ON_2}{P}.$$

Während man die Richtung und Größe der Mittelkraft durch Anwendung des Kräfteparallelogrammes findet, ergiebt sich der Ort derselben mit Hülfe der letzten Formel durch Bestimmung des Abstandes ON.

Schließen die gehörig verlängerten Kraftrichtungen den Winkel $P_1CP_2 = \alpha$ zwischen sich ein, so hat man

1) Die Größe der Mittelkraft $P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\ cos.\ \alpha}$.

Bildet ferner die Mittelkraft den Winkel $PCP_1 = \varphi$ mit der Richtung der Seitenkraft P_1, so ist

2) $sin.\ \varphi = \frac{P_2\ sin.\ \alpha}{P}$.

Stehen endlich die Richtungen CP_1 und CP_2 der gegebenen Kräfte um $ON_1 = a_1$ und $ON_2 = a_2$ von einem willkürlichen Punkte O ab, so ist der Abstand $ON = a$ der Richtung CP der Mittelkraft von eben diesem Punkte

3) $a = \frac{P_1a_1 + P_2a_2}{P}$.

Mit Hülfe dieses letzten Abstandes a ergiebt sich aber der Ort der Mittelkraft ohne Rücksichtsnahme auf den Hülfspunkt C, wenn man mit a aus O einen Kreis construirt und an diesen eine Tangente NP legt, deren Richtung durch den Winkel φ bestimmt ist.

Beispiel. Es wirken auf einen Körper die Kräfte $P_1 = 20$ Pfund und $P_2 = 34$ Pf., deren Richtungen unter einem Winkel $P_1CP_2 = \alpha = 70$ Grad zusammenstoßen und von einem gewissen Punkte O um $ON_1 = a_1 = 4$ Fuß und $ON_2 = a_2 = 1$ Fuß abstehen, welches ist die Größe, Richtung und der Ort der Mittelkraft? Die Größe der Mittelkraft ist:

$P = \sqrt{20^2 + 34^2 + 2 \times 20 \times 34\ cos.\ 70^\circ} = \sqrt{400 + 1155 + 1360 \times 0{,}34202}$

$= \sqrt{2021{,}15} = 44{,}96$ Pf; für ihre Richtung ist ferner $sin.\ \varphi = \frac{34 \times sin.70}{44{,}96}$,

$Log.\ sin.\ \varphi = 0{,}85163 - 1$, daher $\varphi = 45^\circ\ 17'$ der Winkel, um welchen diese Mittelkraft von der Richtung der Kraft P_1 abweicht. Der Ort dieser Mittelkraft ist endlich bestimmt durch ihren Abstand ON von O, welcher ist

$$a = \frac{20 \times 4 + 34 \times 1}{44{,}96} = \frac{114}{44{,}96} = 2{,}536 \text{ Fuß}.$$

§. 86. Man nennt die Normalabstände $ON_1 = a_1$, $ON_2 = a_2$ u. s. w. der Kraftrichtungen von einem willkürlichen Punkte O, Fig. 91 a. f. S., die Hebelarme der Kräfte (franz. bras du levier, engl. arms of lever),

Statiſche Momente.

weil ſie bei der in der Folge abzuhandelnden Theorie des Hebels ein weſentliches Element ausmachen. Das Product Pa aus Kraft und Hebelarm hat den Namen ſtatiſches oder Kraftmoment (franz. moment des forces, engl. momentum of the forces) erhalten. Nun iſt aber $Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2$; folglich das ſtatiſche Moment der Mittelkraft gleich der Summe der ſtatiſchen Momente der beiden Seitenkräfte.

Bei der Addition der Momente iſt noch auf Plus und Minus Rückſicht zu nehmen. Wirken die Kräfte P_1 und P_2, Fig. 91, nach gleicher Richtung um den Punkt O herum, ſtimmen z. B. die Kraftrichtungen mit den Bewegungsrichtungen der Zeiger einer Uhr überein, ſo nennt man

Fig. 91.

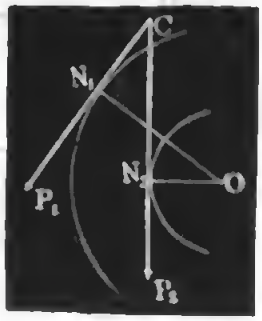
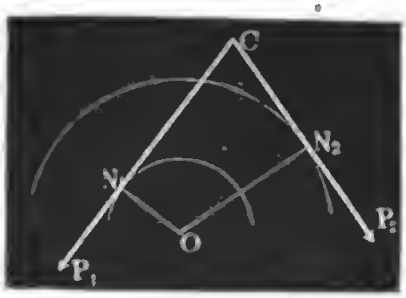
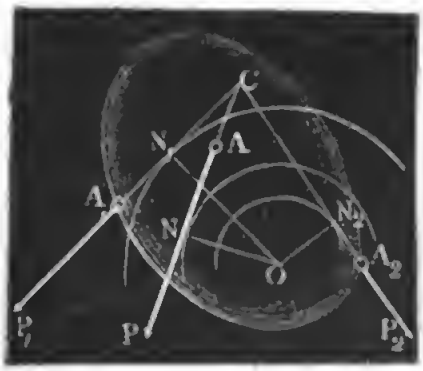


Fig. 92.



dieſe Kräfte, und deshalb auch ihre ſtatiſchen Momente, gleichbezeichnete; wird alſo die eine poſitiv angenommen, ſo muß die andere ebenfalls poſitiv geſetzt werden. Wirken hingegen, wie in Fig. 92, die Kräfte in entgegengeſetzten Richtungen um den Punkt O herum, ſo nennt man dieſelben, ſowie ihre ſtatiſchen Momente, entgegenſetzte, und es iſt nun die eine negativ zu ſetzen, wenn man die andere poſitiv annimmt. Bei der in Fig. 93 repräſentirten Zuſammenſetzung iſt z. B.

Fig. 93.



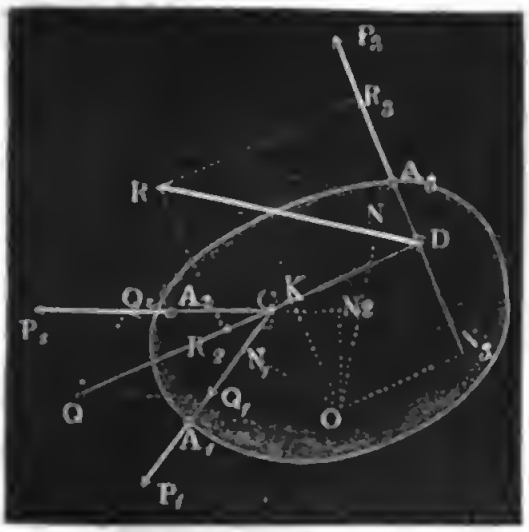
$$Pa = P_1 a_1 - P_2 a_2,$$

weil P_2 der Kraft P_1 entgegengeſetzt, alſo ihr ſtatiſches Moment $P_2 a_2$ negativ iſt.

Zuſammenſetzung der Kräfte in einer Ebene.

§. 87. Ergreifen drei Kräfte P_1, P_2, P_3, Fig. 94, einen Körper in verſchiedenen Punkten A_1, A_2, A_3, ſo vereinige man nach der letzten Regel erſt zwei (P_1, P_2) dieſer Kräfte zu einer Mittelkraft $CQ = Q$, und dieſe nachher, nach derſelben Regel, mit der dritten Kraft (P_2), indem man aus $DR_2 = CQ$ und $DR_3 = A_3P_3$ das Parallelogramm $DR_2\,RR_3$ conſtruirt. Die Diagonale $DR = P$ iſt nun die geſuchte Mittelkraft zu P_1, P_2 und P_3.

Fig. 94.



Zuſammenſetzung der Kräfte in einer Ebene.

Es iſt hiernach auch leicht einzuſehen, wie beim Hinzukommen einer vierten Kraft P_4 die Mittelkraft gefunden werden kann, u. ſ. w.

Bei dieſer Zuſammenſetzung der Kräfte wird die Größe und Richtung der Mittelkraft genau ſo gefunden, als wenn die Kräfte in einem einzigen Punkte angriffen (ſ. §. 77.), es ſind daher die in §. 77 angegebenen Rechnungsregeln anzuwenden, um dieſe beiden erſten Elemente der Mittelkraft zu finden; um aber das dritte Element, nämlich den Ort der Mittelkraft oder ihre Wirkungslinie zu finden, hat man von der Gleichung zwiſchen den ſtatiſchen Momenten Gebrauch zu machen. Sind auch hier $ON_1 = a_1$, $ON_2 = a_2$, $ON_3 = a_3$ und $ON = a$ die Hebelarme der drei Seitenkräfte P_1, P_2, P_3 und ihrer Mittelkraft P in Hinſicht auf einen willkürlichen Punkt O, ſo hat man

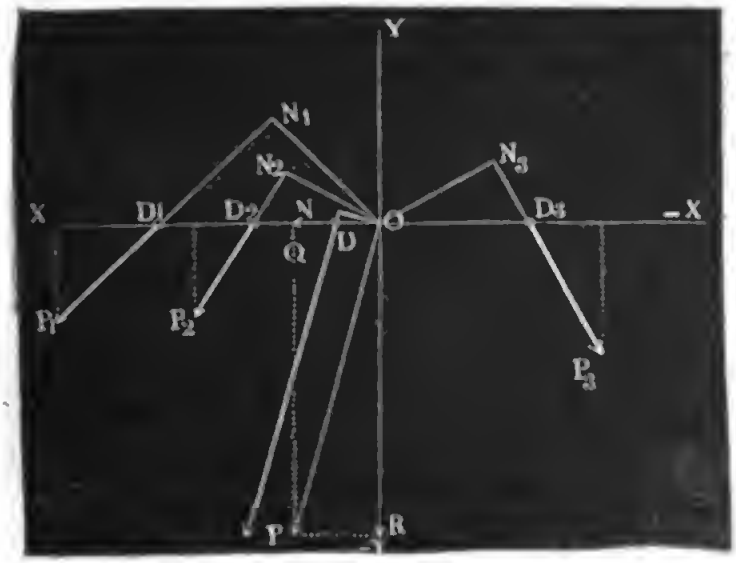
$Pa = Q.OK + P_3a_3$ und

$Q.OK = P_1a_1 + P_2a_2$, wofern Q die Mittelkraft aus P_1 und P_2 und OK der Hebelarm derſelben iſt. Verbinden wir aber dieſe beiden Gleichungen mit einander, ſo erhalten wir

$Pa = P_1a_1 + P_2a_2 + P_3a_3$, und ebenſo ſtellt ſich für mehr Kräfte heraus:

$Pa = P_1a_1 + P_2a_2 + P_3a_3 + \ldots$, d. h. es iſt allemal das (ſtatiſche) Moment der Mittelkraft gleich der algebraiſchen Summe aus den (ſtatiſchen) Momenten der Seitenkräfte.

Fig. 95.

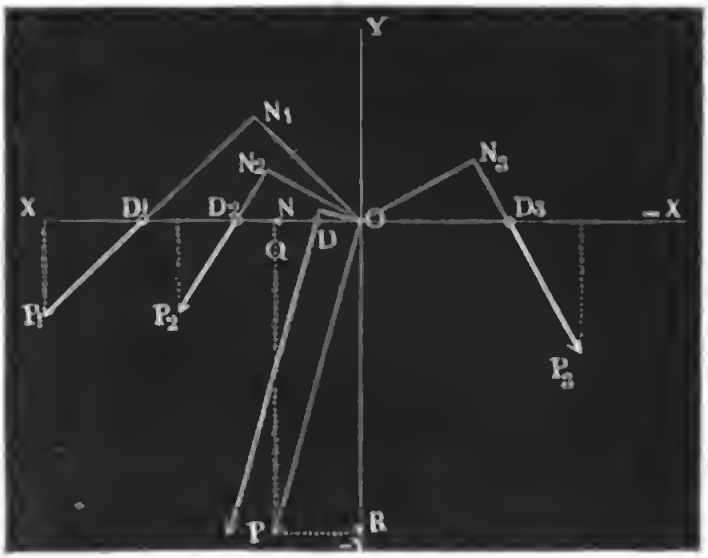


§. 88. Sind nun P_1, P_2, P_3 u. ſ. w., Fig. 95, die einzelnen Kräfte eines Kräfteſyſtemes, ſind ferner α_1, α_2, α_3 u. ſ. w. die Winkel P_1D_1X, P_2D_2X, P_3D_3X u. ſ. w.,

Zuſammenſetzung der Kräfte in einer Ebene.

unter welchen eine beliebig angenommene Axe $X\overline{X}$ von den Kraftrichtungen geſchnitten wird, und bezeichnen endlich a_1, a_2, a_3 u. ſ. w. die Hebelarme, ON_1, ON_2, ON_3 u. ſ. w. dieſer Kräfte hinſichtlich des Durchſchnittspunktes O zwiſchen beiden Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$, ſo hat man nach den §§. 77 und 87

Fig. 96.



1) die Seitenkraft parallel zur Axe $X\overline{X}$:

$$Q = P_1 \cos. \alpha_1 + P_2 \cos. \alpha_2 + \ldots.,$$

2) die Seitenkraft parallel zur Axe $Y\overline{Y}$;

$$R = P_1 \sin. \alpha_1 + P_2 \sin. \alpha_2 + \ldots.,$$

3) die Mittelkraft des ganzen Syſtemes:

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2},$$

4) den Winkel φ, unter welchem die Mittelkraft die Axe ſchneidet, durch

$$\text{tang. } \varphi = \frac{R}{Q},$$

5) den Hebelarm der Mittelkraft, oder den Halbmeſſer des Kreiſes, welchen die Richtung der Mittelkraft tangirt:

$$a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + \ldots}{P}.$$

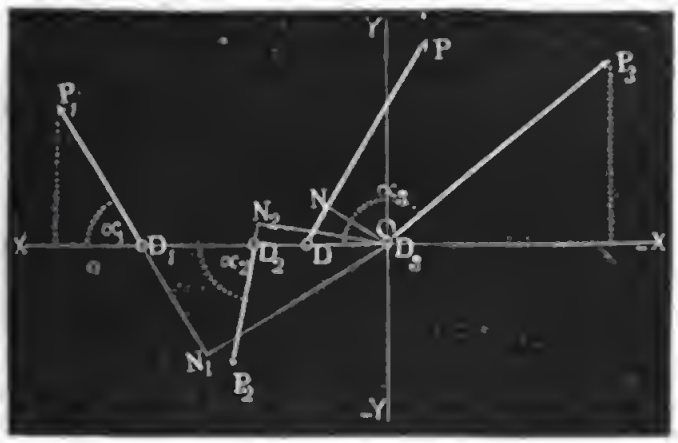
Erſetzt man dieſe Mittelkraft durch eine ihr gleiche Gegenkraft $(-P)$, ſo halten ſich die Kräfte P_1, P_2, P_3.... $(-P)$ das Gleichgewicht.

Beiſpiel. Die Kräfte $P_1 = 40$ Pf., $P_2 = 30$ Pf., $P_3 = 70$ Pf, Fig. 97, durchſchneiden die Axe $X\overline{X}$ unter den Winkeln $\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = -80°$, $\alpha_3 = 142°$, und es ſind die Entfernungen der Durchſchnittspunkte D_1, D_2, D_3 der Kraftrichtungen mit der Axe: $D_1D_2 = 4$ Fuß und $D_2D_3 = 5$ Fuß. Man ſucht die ſämmtlichen Beſtimmungsſtücke der Mittelkraft. Die Summe der Seitenkräfte parallel zur Axe $X\overline{X}$ iſt:

$Q = 40\ cos.60° + 30\ cos.(-80°) + 70\ cos.142°$
$= 40\ cos.60° + 30\ cos.80° - 70\ cos.38°$
$= 20 + 5{,}209 - 55{,}161 = -29{,}952$ Pf.

Zuſammenſetzung der Kräfte in einer Ebene.

Fig. 97.



Die Summe der Seitenkräfte parallel zur Axe $\overline{YY}$:

$R = 40\ sin.60° + 30\ sin.(-80°) + 70\ sin.142°$
$= 40\ sin.60° - 30\ sin.80° + 70\ sin.38°$
$= 34{,}641 - 29{,}544 + 43.096 = 48{,}193.$

Die geſuchte Mittelkraft iſt nun:

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \sqrt{29{,}952^2 + 48{,}193^2} = \sqrt{3219{,}68} = 56.742 \text{ Pf.}$$

Der Winkel φ, unter welchem ſie die Axe ſchneidet, iſt ferner beſtimmt durch

$$tang.\ \varphi = \frac{R}{Q} = \frac{48{,}193}{-29{,}952} = -1{,}6090,$$ es iſt daher

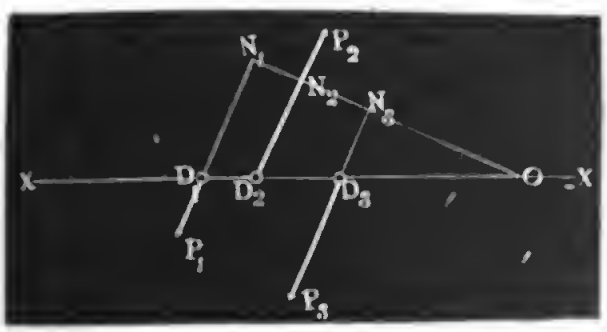
$\varphi = 180° - 58°\,8' = 121°\,52'.$

Der Hebelarm ON_1 der Kraft P_1 iſt $= OD_1\ sin.\alpha_1 = (4+5)\ sin.60°$ $= 9 \times 0{,}86603 = 7{,}794$ Fß, der Hebelarm ON_2 von P_2, $= OD_2\ sin.\alpha_2$ $= 5\ sin.80° = 4{,}924$ Fß., endlich der Hebelarm ON_3 der Kraft $P_3 = 0$, wenn man den Angriffspunkt O nach D_3 verlegt. Es ergiebt ſich folglich der Hebelarm der Mittelkraft:

$$a = \frac{40 \times 7{,}794 - 30 \times 4{,}924}{56{,}742} = \frac{311{,}76 - 147{,}72}{56{,}742} = \frac{164{,}04}{56{,}742} = 2{,}891 \text{ Fuß.}$$

§. 89. Sind die Kräfte P_1, P_2, P_3 u. ſ. w., Fig. 98, eines feſten Syſtemes unter ſich *parallel*, ſo fallen die Hebelarme ON_1, ON_2, ON_3 u. ſ. w. über einander; zieht man nun durch den Anfangspunkt O eine willkürliche Linie $X\bar{X}$, ſo ſchneiden hiervon die Kraftrichtungen die Stücke OD_1, OD_2, OD_3 u. ſ. w. ab, welche den Hebelarmen ON_1, Parallelkräfte

Fig. 98.



Parallelkräfte. ON_2, ON_3 u. ſ. w. proportional ſind, weil $\triangle OD_1N_1 \sim \triangle OD_2N_2 \sim \triangle OD_3N_3$ u. ſ. w. iſt. Bezeichnet man den Winkel $D_1ON_1 = D_2ON_2$ u. ſ. w. durch α, die Hebelarme ON_1, ON_2 u. ſ. w. durch a_1, a_2 u. ſ. w., die Abſchnitte OD_1, OD_2 u. ſ. w. durch b_1, b_2 u. ſ. w., ſo hat man

$$a_1 = b_1 \cos.\alpha,\ a_2 = b_2 \cos.\alpha \text{ u. ſ. w.}$$

Setzt man endlich dieſe Werthe in die Formel

$$Pa = P_1a_1 + P_2a_2 + \ldots,$$

ſo erhält man

$$Pb\cos.\alpha = P_1b_1\cos.\alpha + P_2b_2\cos.\alpha + \ldots,$$

oder, wenn man den gemeinſchaftlichen Factor $\cos.\alpha$ wegläßt,

$$Pb = P_1b_1 + P_2b_2 + \ldots$$

Es iſt alſo bei jedem Syſteme paralleler Kräfte geſtattet, die Hebelarme durch die von irgend einer Linie XX abgeſchnittenen ſchiefen Entfernungen, wie OD_1, OD_2 u. ſ. w., zu erſetzen. Weil die Größe und Richtung der Mittelkraft dieſelbe iſt, die Kräfte mögen in einem oder in verſchiedenen Punkten angreifen, ſo hat die Mittelkraft des Syſtemes paralleler Kräfte mit den einzelnen Kräften gleiche Richtung und iſt gleich der algebraiſchen Summe derſelben; es iſt alſo

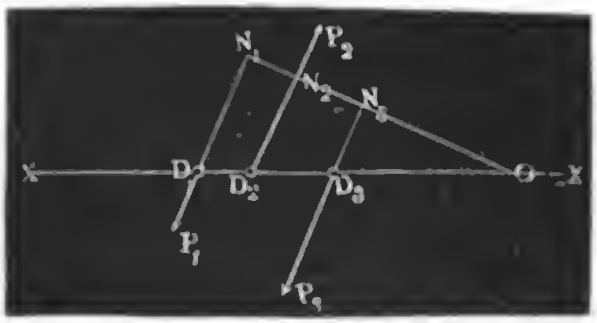
1) $P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$ und

2) $a = \dfrac{P_1a_1 + P_2a_2 + \ldots}{P_1 + P_2 + \ldots}$, oder auch

$$b = \frac{P_1b_1 + P_2b_2 + \ldots}{P_1 + P_2 + \ldots}.$$

Beiſpiel. Es ſeien die Kräfte $P_1 = 12$ Pf., $P_2 = -32$ Pf., $P_3 = 25$ Pf. und ihre Richtungen mögen eine gerade Linie in Punkten D_1, D_2 und D_3, Fig. 99., ſchneiden, deren Abſtände von einander folgende ſind: $D_1D_2 = 21$ Zoll, $D_2D_3 = 30$ Zoll. Man ſoll die Mittelkraft angeben. Die Größe dieſer Kraft iſt $P = 12 - 32 + 25 = 5$ Pf., ihre Entfernung D_1O vom Punkte D_1 aus aber

Fig. 99.



$$b = \frac{12 \cdot 0 - 32 \cdot 21 + 25 \cdot (21+30)}{5} = \frac{0 - 672 + 1275}{5} = 120{,}6 \text{ Zoll.}$$

Kräftepaare. §. 90. Zwei gleich große, zwar parallel, aber entgegengeſetzt gerichtete Kräfte P_1 und P_1, Fig. 100, haben die Mittelkraft

$P = P_1 + (-P_1) = P_1 - P_1 =$ Null, mit dem Hebelarme

Kräftepaare.

$$a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{0} = \infty \text{ (unendlich groß).}$$

Zur Herſtellung des Gleichgewichtes mit einem ſolchen Kräftepaare iſt dieſemnach eine einzige endliche und in endlicher Entfernung wirkende

Fig. 100.

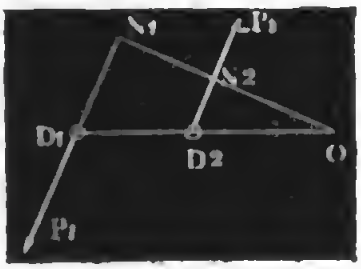
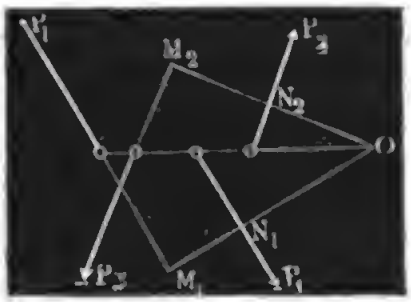


Fig. 101.



Kraft P nicht hinreichend, wohl aber können zwei ſolcher Kräftepaare einander das Gleichgewicht halten. Sind P_1 und $-P_1$ und $-P_2$ und P_2, Fig. 101, zwei ſolche Paare und $OM_1 = a_1$, $ON_1 = OM_1 - M_1N_1 = a_1 - b_1$, ferner $OM_2 = a_2$ und $ON_2 = OM_2 - M_2N_2 = a_2 - b_2$ die Hebelarme von einem gewiſſen Punkte O aus genommen, ſo hat man für das Gleichgewicht:

$$P_1 a_1 - P_1 (a_1 - b_1) - P_2 a_2 + P_2 (a_2 - b_2) = 0, \text{ d. i.}$$
$$P_1 b_1 = P_2 b_2.$$

Zwei ſolche Kräftepaare ſind alſo im Gleichgewichte, wenn das Product aus einer Kraft und ihrem Abſtande von der Gegenkraft bei einem Paare ſo groß iſt wie bei dem anderen.

Ein Paar von gleichen Gegenkräften nennt man ſchlechtweg ein Kräftepaar (franz. und engl. couple), und das Product aus einer Kraft deſſelben und dem Normalabſtande von der andern Kraft heißt das Moment des Kräftepaares. Nach dem Vorigen ſind zwei nach entgegengeſetzten Richtungen wirkende Kräftepaare im Gleichgewichte, wenn ſie gleiche Momente beſitzen.

Setzen wir in der Formel (§. 87) für den Hebelarm a der Mittelkraft:

$$a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + \ldots}{P}$$

$P = 0$, ohne die Summe der ſtatiſchen Momente Null zu haben, ſo bekommen wir ebenfalls $a = \infty$, ein Beweis, daß in dieſem Falle gleichfalls keine Mittelkraft, ſondern nur ein Kräftepaar möglich iſt.

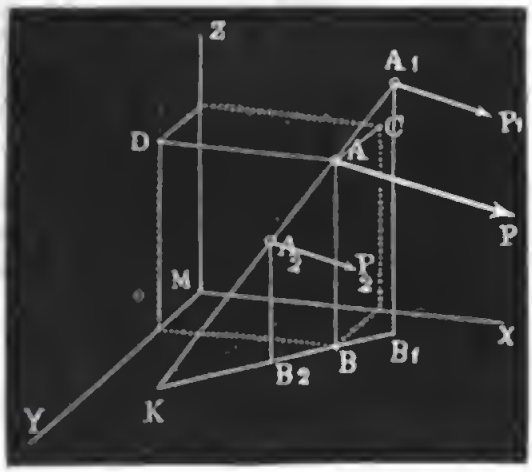
Beiſpiel. Beſteht ein Kräftepaar aus den Kräften $P_1 = 25$ Pf. und $-P_1 = -25$ Pf.; ein anderes aber aus den Kräften $-P_2 = -18$ Pf. und $P_2 = 18$ Pf., und iſt der Normalabſtand a_1 des erſteren Paares $= 3$ Fuß, ſo muß

für den Gleichgewichtszuſtand der Normalabſtand des zweiten, $a_2 = \frac{25 \times 3}{18} =$ $4\frac{1}{6}$ Fuß betragen.

Mittelpunkt paralleler Kräfte.

§. 91. Liegen die Parallelkräfte in verſchiedenen Ebenen, ſo iſt deren Vereinigung auf folgende Weiſe auszuführen. Verlängert man die Gerade $A_1 A_2$, Fig. 102, welche die Angriffspunkte zweier Parallelkräfte P_1 und P_2 verbindet, bis zur Ebene XY zwiſchen den rechtwinklig gegen einander ſtehenden Axen MX und MY, und nimmt man den Durchſchnittspunkt K als den Anfangspunkt an, ſo erhält man für den Angriffspunkt A der Mittelkraft $P_1 + P_2$ dieſer Kräfte:

Fig 102.



$$(P_1 + P_2) \cdot KA = P_1 \cdot KA_1 + P_2 \cdot KA_2.$$

Da nun B, B_1 und B_2 die Projectionen der Angriffspunkte A, A_1 und A_2 in der Ebene XY ſind, ſo hat man

$$AB : A_1 B_1 : A_2 B_2 = KA : KA_1 : KA_2, \text{ und daher auch}$$
$$(P_1 + P_2)\, AB = P_1 \cdot A_1 B_1 + P_2 \cdot A_2 B_2.$$

Bezeichnen wir die Normalabſtände $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ u. ſ. w. der Angriffspunkte von der Grundebene XY durch z_1, z_2, z_3 u. ſ. w., den Normalabſtand des Angriffspunktes A von eben dieſer Ebene aber durch w_1, ſo haben wir hiernach für zwei Kräfte:

$$(P_1 + P_2)\, w_1 = P_1 z_1 + P_2 z_2; \text{ für drei:}$$
$$(P_1 + P_2 + P_3)\, w_2 = (P_1 + P_2)\, w_1 + P_3 z_3 = P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3$$

u. ſ. w., es iſt alſo allgemein:

$$(P_1 + P_2 + P_3 + \ldots)\, w = P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3 \ldots, \text{ folglich:}$$
$$1)\quad w = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + \ldots}{P_1 + P_2 + \ldots}$$

Setzen wir ebenſo die Abſtände AC und AD des Angriffspunktes der Mittelkraft von den Ebenen XZ und $YZ = v$ und u, ſo wie die Abſtände der Angriffspunkte $A_1, A_2 \ldots$ von eben dieſen Ebenen durch $y_1, y_2 \ldots$ und $x_1, x_2 \ldots$, ſo erhalten wir

$$2)\quad v = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + \ldots}{P_1 + P_2 + \ldots} \text{ und}$$
$$3)\quad u = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots}{P_1 + P_2 + \ldots}.$$

Drei Abſtände, u, v, w, von drei Grundebenen, wie z. B. von dem Fußboden und zwei Seitenwänden eines Zimmers, beſtimmen aber den Punkt (A) vollſtändig, denn er iſt der achte Endpunkt des aus u, v, und w zu conſtruirenden Parallelepipedes; es giebt folglich nur einen einzigen Angriffspunkt der Mittelkraft eines ſolchen Kräfteſyſtems. Mittelpunkt paralleler Kräfte.

Da die drei Formeln für u, v und w die Winkel, welche die Kräfte mit den Grundebenen einſchließen, gar nicht enthalten, ſo iſt der Angriffspunkt von dieſen, und alſo auch von den Kraftrichtungen, gar nicht abhängig, es läßt ſich demnach auch das ganze Syſtem um dieſen Punkt drehen, ohne daß er aufhört, Angriffspunkt zu ſein, wenn nur bei dieſer Drehung der Parallelismus unter den Kräften nicht aufhört.

Man nennt bei einem Syſteme paralleler Kräfte das Product aus einer Kraft und dem Abſtande ihres Angriffspunktes von einer Ebene oder Linie das Moment dieſer Kraft hinſichtlich dieſer Ebene oder Linie, auch iſt es gewöhnlich, den Angriffspunkt der Mittelkraft ſelbſt den Mittelpunkt des ganzen Syſtems (franz. centre des forces parallèles, engl. centre of parallel forces) zu nennen. Man erhält alſo den Abſtand des Mittelpunktes eines Syſtems paralleler Kräfte von irgend einer Ebene oder Linie (letzteres, wenn die Kräfte in einer Ebene liegen), wenn man die Summe der (ſtatiſchen) Momente durch die Summe der Kräfte dividirt.

Beiſpiel. Sind die Kräfte	P_n	5	— 7	10	4	Pf.
die Abſtände	x_n	1	2	0	9	Fß.
„ „	y_n	2	4	5	3	„
„ „	z_n	8	3	7	10	„
ſo hat man die Momente	$P_n x_n$	5	— 14	0	36	Fßpf.
„ „	$P_n y_n$	10	— 28	50	12	„
„ „	$P_n z_n$	40	— 21	70	40	„

Nun iſt aber die Kraftſumme $= 19 - 7 = 12$ Pf.; es folgen daher die Abſtände des Mittelpunktes dieſes Syſtems von den drei Grundebenen:

$$u = \frac{5+36-14}{12} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4} = 2{,}25 \text{ Fuß};$$

$$v = \frac{10+50+12-28}{12} = \frac{44}{12} = \frac{11}{3} = 3{,}66 \text{ Fuß und}$$

$$w = \frac{40+70+40-21}{12} = \frac{129}{12} = \frac{43}{2} = 10{,}75 \text{ Fuß}.$$

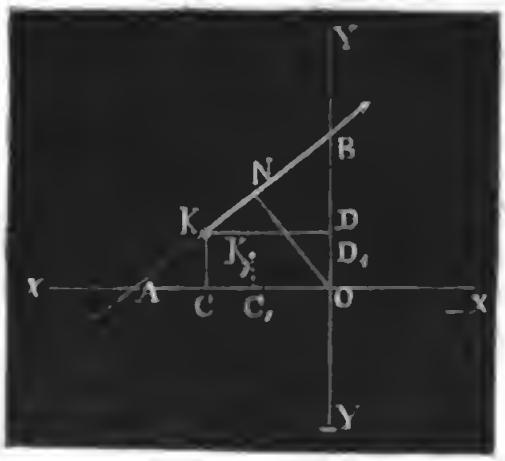
§. 92. Kommt es darauf an, ein aus verſchieden gerichteten Kräften beſtehendes Syſtem zu vereinigen, ſo lege man eine Ebene durch daſſelbe, verlege ſämmtliche Angriffspunkte in dieſe Ebene und zerlege jede Kraft in zwei Seitenkräfte, die eine winkelrecht auf dieſe Ebene und die zweite in die Ebene ſelbſt fallend. Sind β_1, β_2 ... die Winkel, unter welchen die Ebene von den Kraftrichtungen geſchnitten wird, ſo folgen die Normalkräfte: $P_1 \sin. \beta_1$, $P_2 \sin. \beta_2$, ..., dagegen die Kräfte in der Ebene Kräfte im Raume.

Digitized by Google

Kräfte im Raume.

$P_1 \cos. \beta_1$, $P_2 \cos. \beta_2$ u. ſ. w. Die letzteren laſſen ſich nach §. 88 und die erſteren aber nach dem letzten §. (91) zu einer Mittelkraft vereinigen. In der Regel werden ſich die Richtungen beider Mittelkräfte nirgends ſchneiden, und es wird demnach auch eine Vereinigung dieſer Kräfte nicht möglich ſein; geht aber die Mittelkraft aus den parallelen Kräften durch einen Punkt K, Fig. 103, in der Richtung AB der Mittelkraft aus den in der Ebene (der Papierebene) befindlichen Kräften, ſo iſt eine Zuſammſetzung möglich. Setzen wir die Abſtände $OC = DK = u$ und $OD = CK = v$ für den Angriffspunkt K der erſten Mittelkraft, dagegen den Hebelarm ON der zweiten $= a$ und den Winkel BAO, unter welchem dieſelbe die Axe $X\bar{X}$ ſchneidet, $= \alpha$, ſo iſt die Bedingung für die Möglichkeit der Zuſammenſetzung:

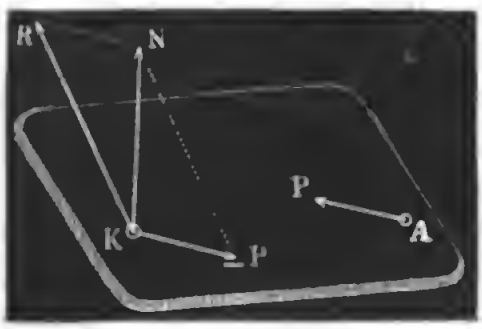
Fig. 103.



$$u \sin. \alpha + v \cos. \alpha = a.$$

Wird dieſer Gleichung nicht Genüge geleiſtet, geht z. B. die Mittelkraft aus den Normalkräften durch K_1, ſo iſt die Zurückführung des ganzen Kräfteſyſtems auf eine Mittelkraft gar nicht möglich, wohl aber läßt ſich daſſelbe auf eine Mittelkraft R, Fig. 104 und ein Kräftepaar P, $— P$ zurückführen, wenn man die Mittelkraft N der parallelen Seitenkräfte in die Kräfte $— P$ und R zerlegt, von denen die eine der Mittelkraft P von den Kräften in der Ebene gleich, parallel und entgegengeſetzt gerichtet iſt.

Fig. 104.

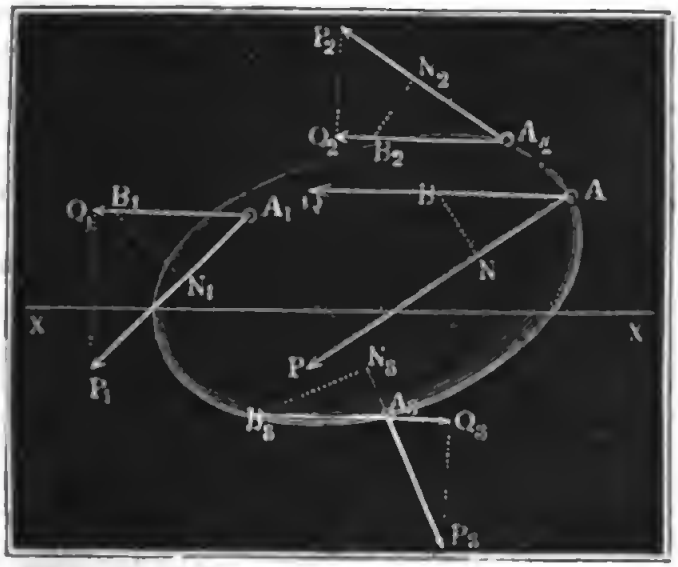


Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten.

§. 93 Wird ein Syſtem von in einer Ebene wirkenden Kräften P_1, P_2, P_3, Fig. 105, progreſſiv, d. h. ſo fortgerückt, daß alle Angriffspunkte A_1, A_2, A_3 . . . gleiche Parallelwege $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ $A_3 B_3$ durchlaufen, ſo iſt (in dem Sinne des Paragraphen 80) die Arbeit der Mittelkraft gleich der Summe aus den Arbeiten der Seitenkräfte, im Zuſtande des Gleichgewichts dieſelbe alſo = Null. Sind die in die Kraftrichtungen fallenden Projectionen $A_1 N_1, A_2 N_2$ u. ſ. w. des gemeinſchaftlichen Weges $A_1 B_1 = A_2 B_2$ u. ſ. w. $= s_1, s_2$ u. ſ w., ſo iſt alſo die mechaniſche Arbeit der Mittelkraft:

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \ldots.$$

Fig. 105.



Princip der virtuellen Geschwindigkeiten

Dieſes Geſetz folgt aus einer der Formeln des §. 88. Nach dieſer iſt der mit einer Axe XX paralell laufende Component Q der Mittelkraft gleich der Summe $Q_1+Q_2+Q_2+\ldots$ der gleichlaufenden Componenten der Seitenkräfte P_1, P_2 u. ſ. w.; nun folgt aber aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $A_1B_1N_1$ und $A_1P_1Q_1$ die Proportion:

$$\frac{Q_1}{P_1} = \frac{A_1N_1}{A_1B_1} = \frac{s_1}{AB}, \text{ und hieraus}$$

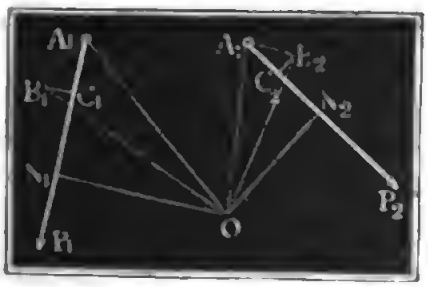
$$Q_1 = \frac{P_1 s_1}{AB}, \text{ ebenſo } Q_2 = \frac{P_2 s_2}{AB} \text{ u. ſ. w.,}$$

man kann daher ſtatt

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots$$
$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \ldots \text{ ſetzen.}$$

§. 94. Wird das Kräfteſyſtem P_1, P_2 u. ſ. w., Fig. 106, um einen Punkt O ſehr wenig gedreht, ſo gilt das in den Paragraphen 80 und 93 ausgeſprochene Geſetz des Princips der virtuellen Geſchwindigkeiten ebenfalls, wie ſich auf folgende Weiſe beweiſen läßt. Nach §. 86 iſt das Kraftmoment $P.ON$ der Mittelkraft gleich der Summe von den Momenten der Seitenkräfte, alſo:

Fig. 106.



$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + \ldots$$

Der der Drehung um den kleinen Winkel $A_1OB_1 = \varphi^0$ oder Bogen $\varphi = \frac{\varphi^0}{180^0} . \pi$ entſprechende Weg A_1B_1 iſt auf dem Halbmeſſer OA_1 winkelrecht, daher das Dreieck $A_1B_1C_1$, welches entſteht, wenn man ein

Digitized by Google

Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten.

Loth B_1C_1 gegen die Kraftrichtung fällt, dem durch den Hebelarm $ON_1 = a_1$ beſtimmten Dreiecke OA_1N_1 ähnlich und dieſemnach

$$\frac{ON_1}{OA_1} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}.$$

Setzt man die virtuelle Geſchwindigkeit $A_1C_1 = \sigma_1$ und den Bogen $A_1B_1 = OA_1 . \varphi$, ſo erhält man

$$a_1 = \frac{OA_1 . \sigma_1}{OA_1 . \varphi} = \frac{\sigma_1}{\varphi}, \text{ ebenſo } a_2 = \frac{\sigma_2}{\varphi} \text{ u. ſ. w.}$$

Wenn man nun dieſe Werthe für a_1, a_2 u. ſ. w. in der obigen Gleichung einſetzt, ſo erhält man

$$\frac{P\sigma}{\varphi} = \frac{P_1\sigma_1}{\varphi} + \frac{P_2\sigma_2}{\varphi} + \ldots \text{ u. ſ. w,}$$

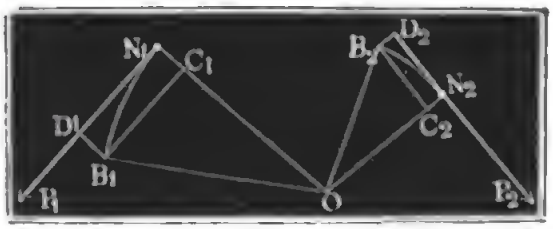
oder, da φ ein gemeinſchaftlicher Diviſor iſt,

$$P\sigma = P_1\sigma_1 + P_2\sigma_2 + \ldots, \text{ genau wie in §. 80.}$$

Es iſt alſo auch *für kleine Drehungen die mechaniſche Arbeit* ($P\sigma$) *der Mittelkraft gleich der Summe aus den mechaniſchen Arbeiten der Seitenkräfte.*

§. 95. Das Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten gilt ſogar bei beliebig großen Drehungen, wenn man ſtatt der virtuellen Geſchwindigkeiten der Angriffspunkte die Projectionen N_1D_1, N_2D_2 u. ſ. w, Fig. 107, der in den Lothpunkten N_1, N_2 u. ſ. w. anfangenden Wege einführt, denn multiplicirt man die bekannte Gleichung der ſtatiſchen Momente

Fig. 107.



$$Pa = P_1a_1 + P_2a_2 + \ldots, \text{ durch } sin.\ \varphi_1 \text{ und ſetzt in der neuen}$$

Gleichung

$$Pa\ sin.\ \varphi = P_1\ a_1\ sin.\ \varphi + P_2a_2\ sin.\ \varphi + \ldots,$$

ſtatt $a_1\ sin.\ \varphi$, $a_2\ sin.\ \varphi \ldots$ die Wege

$$OB_1\ sin.\ N_1OB_1 = B_1C_1 = s_1,$$

$$OB_2\ sin.\ N_2OB_2 = B_2C_2 = s_2 \text{ u. ſ. w., ſo folgt die Gleichung}$$

$$Ps = P_1s_1 + P_2s_2 + \ldots$$

Ebenſo behält dieſes Princip bei endlichen Drehungen ſeine Richtigkeit, wenn ſich die Kraftrichtungen mit dem Syſteme gleichzeitig und ſo drehen, oder wenn ſich der Angriffs- oder Lothpunkt N unaufhörlich und ſo verändert, daß die Hebelarme $ON_1 = OB_1$ u. ſ. w. unveränderlich bleiben, denn aus

$$Pa = P_1a_1 + P_2a_2,$$

folgt durch Multiplication mit φ:

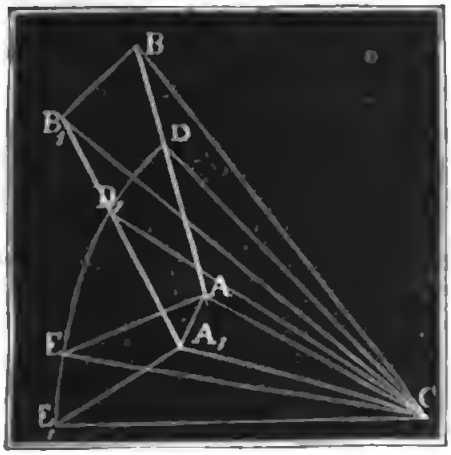
$$Pa\,\varphi = P_1 a_1 \varphi + P_2 a_2 \varphi + \ldots, \text{ d. i.}$$
$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \ldots,$$

Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten.

wenn s_1, s_2 u. ſ. w. die bogenförmigen Wege $N_1 B_1$, $N_2 B_2$ u. ſ. w. der Lothpunkte N_1, N_2 u. ſ. w. bezeichnen.

§. 96. Jede in einer Ebene vor ſich gehende kleine Bewegung oder Verrückung eines Körpers läßt ſich als eine kleine Drehung um einen beweglichen Mittelpunkt anſehen, wie in Folgendem bewieſen werden ſoll. Seien zwei Punkte A und B, Fig. 108, dieſes Körpers (dieſer Fläche oder Linie) bei einer kleinen Bewegung nach A_1 und B_1 fortgerückt, ſei alſo $A_1 B_1 = AB$. Errichten wir in dieſen Punkten Perpendikel auf die durchlaufenen kleinen Wege AA_1 und BB_1, ſo ſchneiden ſich dieſelben in einem Punkte C, aus dem man ſich dieſe als Kreisbogen anzuſehenden Wege AA_1 und BB_1 beſchrieben denken kann. Nun ſind aber wegen der Gleichheiten $AB = A_1 B_1$, $AC = A_1 C$ und $BC = B_1 C$ die Dreiecke ABC und $A_1 B_1 C$ einander gleich, es iſt daher auch der Winkel $B_1 C A_1$ gleich dem Winkel BCA und der Drehungswinkel ACA_1 gleich dem Drehungswinkel BCB_1. Macht man $A_1 D_1 = AD$, ſo bekommt man wegen der Gleichheit der Winkel $D_1 A_1 C$ und DAC und wegen der Gleichheit der Seiten CA_1 und CA in $CA_1 D_1$ und CAD wieder zwei congruente Dreiecke, in welchen $CD_1 = CD$ und $\angle A_1 C D_1 = \angle ACD$ iſt. Es geht folglich bei der kleinen Verrückung der Linie AB auch jeder beliebige Punkt D in ihr in einem kleinen Kreisbogen DD_1 fort. Iſt endlich E ein außerhalb der Linie AB liegender und mit ihr feſt verbundener Punkt, ſo iſt auch der kleine Weg EE_1 von dieſem als ein Kreisbogen aus C anzuſehen, denn macht man den Winkel $E_1 A_1 B_1 = EAB$ und die Entfernung $A_1 E_1 = AE$, ſo erhält man wieder zwei congruente Dreiecke $E_1 A_1 C$ uno EAC mit den gleichen Seiten CE_1 und CE und den gleichen Winkeln $A_1 C E_1$ und ACE, und daſſelbe läßt ſich auch für jeden andern mit AB feſt verbundenen Punkt beweiſen. Man kann folglich jede kleine Bewegung einer mit AB feſt verbundenen Fläche oder eines feſten Körpers als eine kleine Drehung um ein Centrum anſehen, das ſich ergiebt, wenn man den Durchſchnittspunkt C beſtimmt, in welchem ſich die Perpendikel zu den Wegen AA_1 und BB_1 zweier Punkte des Körpers ſchneiden.

Fig. 108.



§. 97. Nach einem vorhergehenden Paragraphen (94) iſt für eine kleine

Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten.

Drehung des Kräfteſyſtemes die mechaniſche Arbeit der Mittelkraft gleich der algebraiſchen Summe aus den Arbeiten ihrer Componenten, nach dem letzten Paragraphen (95) läßt ſich aber jede kleine Verrückung eines Körpers als eine kleine Drehung anſehen; es gilt daher das oben ausgeſprochene Geſetz von dem Principe der virtuellen Geſchwindigkeiten auch für jede beliebig kleine Bewegung eines feſten Körpers oder Kräfteſyſtemes.

Iſt alſo in einem Kräfteſyſteme Gleichgewicht vorhanden, d. h. die Mittelkraft ſelbſt gleich Null, ſo muß auch nach einer kleinen, übrigens beliebigen Bewegung die Summe der mechaniſchen Arbeiten gleich Null ſein. Wenn umgekehrt für eine kleine Bewegung des Körpers die Summe der mechaniſchen Arbeiten gleich Null iſt, ſo iſt deshalb noch nicht Gleichgewicht nothwendig, es muß vielmehr bei allen möglichen kleinen Verrückungen dieſe Summe gleich Null ausfallen, wenn Gleichgewicht vorhanden ſein ſoll. Da die das Geſetz der virtuellen Geſchwindigkeiten ausdrückende Formel nur eine Bedingung des Gleichgewichts erfüllt, ſo fordert das Gleichgewicht, daß dieſem Geſetze wenigſtens bei ebenſoviel Bewegungen entſprochen wird, als ſolcher Bedingungen gemacht werden können, z. B. für ein Kräfteſyſtem in der Ebene bei drei von einander unabhängigen Bewegungen.

Zweites Kapitel.

Die Lehre vom Schwerpunkte.

Schwerpunkt.

§. 98. Die Gewichte von den Theilen eines ſchweren Körpers bilden ein Syſtem von Parallelkräften, deſſen Mittelkraft das Gewicht des ganzen Körpers iſt und deſſen Mittelpunkt nach den drei Formeln des Paragraphen 91 beſtimmt werden kann. Man nennt dieſen Mittelpunkt der Schwerkräfte eines Körpers oder einer Körperverbindung den *Schwerpunkt* (franz. centre de gravité, engl. centre of gravity), auch wohl *Mittelpunkt der Maſſe* des Körpers oder der *Verbindung von Körpern*. Dreht man einen Körper um ſeinen Schwerpunkt, ſo hört dieſer Punkt nicht auf, Mittelpunkt der Schwere zu ſein, denn läßt man die drei Grundebenen, auf die man die Angriffspunkte der einzelnen Gewichte bezieht, mit dem Körper zugleich umdrehen, ſo ändert ſich bei dieſer Drehung nur die Lage der Kraftrichtungen gegen dieſe Ebenen, die Abſtände der Angriffspunkte von dieſen Ebenen hingegen bleiben unverändert. Der Schwerpunkt iſt hiernach derjenige Punkt eines Körpers, in welchem

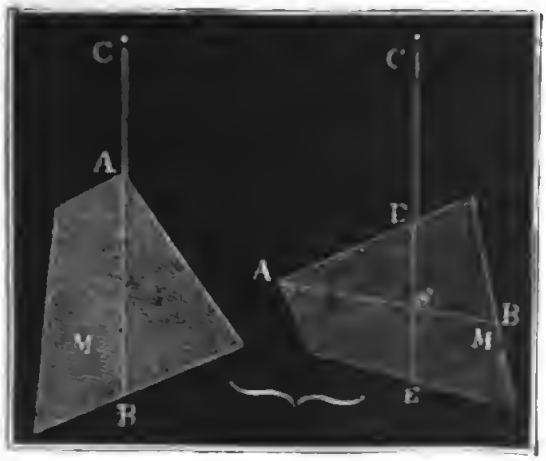
das Gewicht desselben als vertikal niederziehende Kraft wirkt, der also unterstützt oder festgehalten werden muß, um den Körper in jeder Lage in Ruhe zu erhalten. Schwerpunkt.

§. 99. Jede, den Schwerpunkt enthaltende gerade Linie heißt Schwerlinie, und jede durch den Schwerpunkt gehende Ebene Schwerebene. Der Schwerpunkt bestimmt sich durch den Durchschnitt zweier Schwerlinien, oder durch den Durchschnitt einer Schwerlinie mit einer Schwerebene, oder durch das Sichkreuzen dreier Schwerebenen.

Da sich der Angriffspunkt einer Kraft in der Kraftrichtung beliebig verlegen läßt, ohne die Wirkung der Kraft zu verändern, so ist ein Körper in einer Lage im Gleichgewichte, wenn irgend ein Punkt in der durch den Schwerpunkt gehenden Vertikallinie festgehalten wird.

Hängt man einen Körper *M*, Fig. 109, an einem Faden *CA* auf, so erhält man hiernach in der Verlängerung *AB* dieses Fadens eine Schwerlinie, und hängt man ihn noch auf eine zweite Weise auf, so stößt man auf eine zweite Schwerlinie *DE*. Der Durchschnittspunkt *S* beider Linien ist nun der Schwerpunkt des ganzen Körpers.

Fig. 109.



Hängt man den Körper an einer Axe auf, oder bringt man ihn über einer scharfen Kante (Schneide eines Messers) in's Gleichgewicht, so erhält man in der Vertikalebene durch die Axe oder scharfe Kante eine Schwerebene u. s. w. Empirische Bestimmungen des Schwerpunktes, wie sie eben angedeutet wurden, sind selten anwendbar, — meistens hat man von den im Folgenden gegebenen geometrischen Regeln Gebrauch zu machen, um den Schwerpunkt mit Sicherheit zu bestimmen.

Bei manchen Körpern, z. B. bei Ringen, fällt der Schwerpunkt außerhalb der Masse des Körpers. Soll ein solcher Körper in seinem Schwerpunkte festgehalten werden, so ist es nöthig, diesen durch einen zweiten Körper so mit dem ersten zu verbinden, daß die Schwerpunkte beider zusammenfallen.

§. 100. Sind x_1, x_2, x_3 u. s. w. die Abstände der Theile eines schweren Körpers von der einen Grundebene, y_1, y_2, y_3 . . . dieselben von der andern und z_1, z_2, z_3 . . . die von der dritten, sind endlich die Gewichte Schwerpunktsbestimmung.

Schwerpunkts-beſtimmung.

dieſer Theile P_1, P_2, P_3 u. ſ. w., ſo hat man nach §. 91 die Abſtände des Schwerpunktes dieſes Körpers von dieſen drei Ebenen:

$$x = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + \ldots}{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots},$$

$$y = \frac{P_1y_1 + P_2y_2 + P_3y_3 + \ldots}{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots},$$

$$z = \frac{P_1z_1 + P_2z_2 + P_3z_3 + \ldots}{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots},$$

Sind die Volumina der Körpertheile: V_1, V_2, V_3 u. ſ. w., und ihre Dichtigkeiten: γ_1, γ_2, γ_3 u. ſ. w., ſo läßt ſich auch ſetzen:

$$x = \frac{V_1\gamma_1x_1 + V_2\gamma_2x_2 + \ldots}{V_1\gamma_1 + V_2\gamma_2 + \ldots} \text{ u. ſ. w.}$$

Iſt endlich der Körper homogen, haben alſo alle Theile deſſelben einerlei Dichtigkeit γ, ſo läßt ſich ſetzen:

$$x = \frac{(V_1x_1 + V_2x_2 + \ldots)\gamma}{V_1 + V_2 + \ldots)\gamma},$$

oder, indem man den gemeinſchaftlichen Factor γ oben und unten hebt:

$$1)\ x = \frac{V_1x_1 + V_2x_2 + \ldots}{V_1 + V_2 + \ldots},$$

$$2)\ y = \frac{V_1y_1 + V_2y_2 + \ldots}{V_1 + V_2 + \ldots},$$

$$3)\ z = \frac{V_1z_1 + V_2z_2 + \ldots}{V_1 + V_2 + \ldots}.$$

Man kann alſo ſtatt der Gewichte die Volumina der einzelnen Theile eines Körpers einſetzen, und bringt dadurch die Beſtimmung des Schwerpunktes in das Gebiet der reinen Geometrie.

Wenn Körper nach einer oder nach zwei Raumdimenſionen wenig ausgedehnt ſind, wie z. B. dünne Bleche, feine Drähte u. ſ. w., ſo kann man ſie als Flächen oder Linien anſehen und nun mit Hülfe der letzteren drei Formeln ihre Schwerpunkte ebenfalls beſtimmen, wenn man ſtatt der Volumina V_1, V_2 u. ſ. w. Flächeninhalte oder Längen einführt.

§. 101. Bei regelmäßigen Räumen fällt der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkte zuſammen, z. B. bei dem Würfel, der Kugel, dem gleichſeitigen Dreiecke, Kreiſe u. ſ. w. Symmetriſche Räume haben ihren Schwerpunkt in der Ebene oder Axe der Symmetrie. Die Ebene der Symmetrie $ABCD$ theilt einen Körper $ADFE$, Fig. 110, in zwei congruente Hälften, es finden daher auf beiden Seiten dieſer Ebene gleiche Verhältniſſe Statt, es ſind alſo auch die Momente auf der einen

Seite so groß, wie auf der andern, und es fällt folglich der Schwerpunkt in diese Ebenen selbst. Weil ebenso die Axe EF der Symmetrie eine

Schwerpunktsbestimmung.

Fig 110

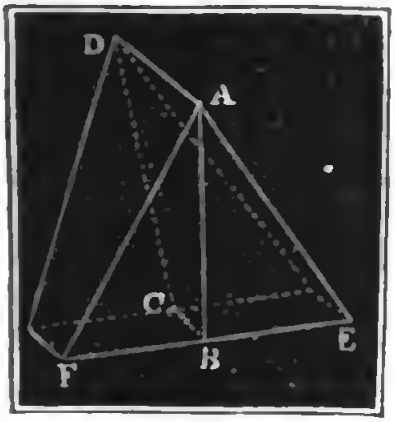
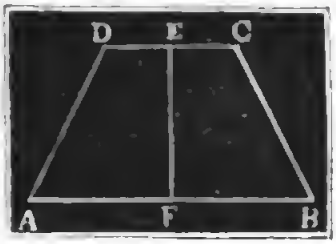


Fig. 111.



ebene Fläche $ABCD$, Fig. 111, in zwei congruente Theile zerschneidet, so sind auch hier die Verhältnisse auf der einen Seite dieselben wie auf der andern, es sind folglich auch die Momente auf beiden Seiten gleich, und es liegt der Schwerpunkt des Ganzen in dieser Linie selbst. Endlich ist auch die Symmetrieaxe KL eines Körpers $ABGH$, Fig. 112, Schwerlinie desselben, weil sie aus dem Durchschnitt von zwei Symmetrieebenen $ABCD$

Fig. 112.

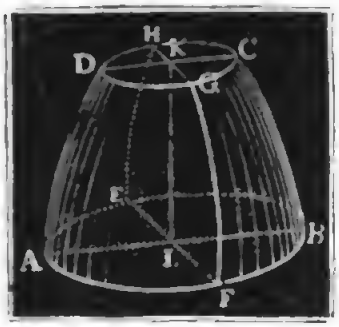
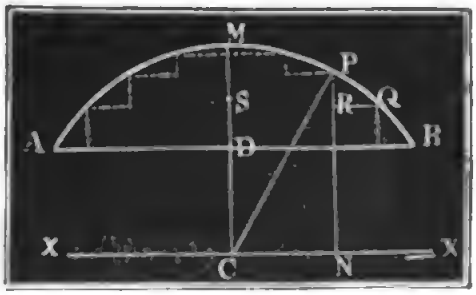


Fig 113.



und $EFGH$ hervorgeht. Aus diesem Grunde fällt der Schwerpunkt eines Cylinders, eines Kegels und eines durch Umdrehung einer Fläche, oder durch Abdrehung auf der Drehbank entstandenen Rotationskörpers überhaupt, in die Axe dieser Körper.

§. 102. Der Schwerpunkt einer geraden Linie liegt in der Mitte derselben.

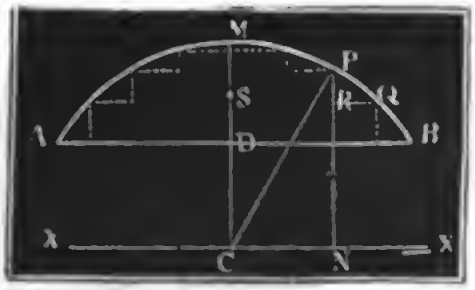
Schwerpunkte von Linien.

Der Schwerpunkt eines Kreisbogens $AB = b$, Fig. 113, befindet sich in dem Halbmesser CM, welcher in der Mitte M des Bogens ausläuft, denn dieser Halbmesser ist Axe der Symmetrie dieses Bogens. Um aber die Entfernung $CS = x$ des Schwerpunktes S vom Mittel-

Schwerpunkte von Linien

punkte zu finden, theile man den Bogen in ſehr viele Theile und beſtimme die ſtatiſchen Momente derſelben in Beziehung auf eine durch den Mittelpunkt C und mit der Sehne $AB = s$ parallel gehende Axe $X\overline{X}$. Iſt PQ ein Theil des Bogens, und PN deſſen Abſtand von $X\overline{X}$, ſo iſt das ſtatiſche Moment dieſes Bogentheiles $= PQ \,.\, PN$. Zieht man nun den Halbmeſſer $PC = MC = r$, und QR parallel zu AB, ſo erhält man zwei ähnliche Dreiecke

Fig. 114.



PQR und CPN, für welche gilt:

$$PQ : QR = CP : PN,$$

und woraus ſich das ſtatiſche Moment eines Bogenelementes $PQ \,.\, PN = QR \,.\, CP = QR \,.\, r$ beſtimmt.

Nun iſt aber für die ſtatiſchen Momente aller übrigen Elemente der Halbmeſſer r ein gemeinſchaftlicher Factor und die Summe aller Projectionen QR der Bogenelemente gleich der der Projection des ganzen Bogens entſprechenden Sehne; es folgt daher auch das Moment des ganzen Bogens $=$ Sehne s mal Halbmeſſer r. Setzt man dieſes Moment gleich Bogen b mal Abſtand x, ſetzt man alſo $bx = sr$, ſo erhält man

$$\frac{x}{r} = \frac{s}{b}, \text{ und } x = \frac{sr}{b}.$$

Es verhält ſich alſo der Abſtand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte zum Halbmeſſer, wie die Sehne zum Bogen.

Iſt der Centriwinkel ACB des Bogens $b = \beta^0$, alſo der dem Halbmeſſer 1 entſprechende Bogen $\beta = \frac{\beta^0}{180^0} \cdot \pi$, ſo hat man $b = \beta r$ und $s = 2r \sin. \frac{\beta}{2}$, weshalb auch folgt: $x = \frac{2 \sin. \frac{1}{2}\beta \,.\, r}{\beta}$.

Für den Halbkreis iſt $\beta = \pi$ und $\sin. \frac{\beta}{2} = 1$, daher

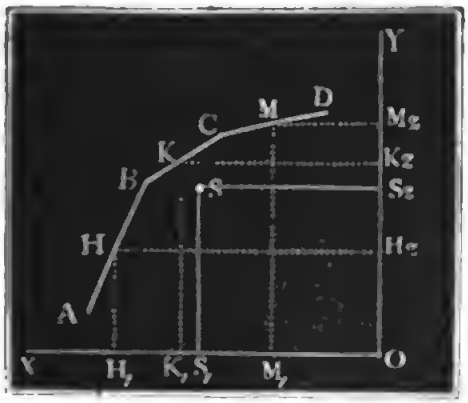
$$x = \frac{2}{\pi} r = 0{,}6366 \ldots r, \text{ ohngefähr} = \frac{7}{11} r.$$

§. 103. Um den Schwerpunkt eines Polygons oder einer Linienverbindung $ABCD$, Fig. 115, zu finden, ſuche man die Abſtände der Mittelpunkte H, K, M der Linien $AB = L_1$, $BC = L_2$, $CD = L_3$ u. ſ. w. von zwei Axen OX und OY, nämlich $HH_1 = y_1$, $HH_2 = x_1$,

$KK_1 = y_2$. $KK_2 = x_2$ u. ſ. w.; die Abſtände des geſuchten Schwerpunktes von eben dieſen Axen ſind dann:

Schwerpunkte von Linien

Fig. 115.



$$SS_2 = x = \frac{L_1x_1 + L_2x_2 + \ldots}{L_1 + L_2 + \ldots},$$

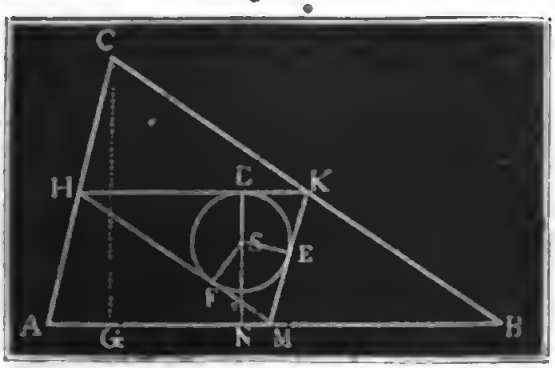
$$SS_1 = y = \frac{L_1y_1 + L_2y_2 + \ldots}{L_1 + L_2 + \ldots}.$$

Z. B. der Abſtand des Schwerpunktes S eines im Triangel gebogenen Drahtes ABC, Fig. 116, von der Grundlinie iſt:

$$NS = x = \frac{\frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh}{a+b+c} = \frac{a+b}{a+b+c} \cdot \frac{h}{2},$$

wenn die den Winkeln A, B, C gegenüberſtehenden Seiten durch a, b, c und die Höhe CG durch h bezeichnet werden.

Fig. 116.



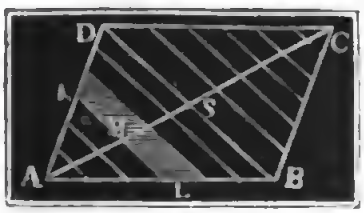
Verbindet man die Mittelpunkte H, K, M der Dreiecksſeiten unter einander, und conſtruirt man in das ſo erhaltene Dreieck einen Kreis, ſo fällt deſſen Mittelpunkt mit dem Schwerpunkte S zuſammen, denn der Abſtand SD von der einen Seite HK iſt $= DN - SN$

$$= \frac{h}{2} - \frac{a+b}{a+b+c} \cdot \frac{h}{2} = \frac{ch}{2(a+b+c)} = \frac{\triangle ABC}{a+b+c} =$$ den Abſtänden SE und SF von den anderen Seiten.

§. 104. Der Schwerpunkt eines Parallelogrammes $ABCD$, Fig. 117, liegt im Durchſchnittspunkte S ſeiner Diagonalen, denn alle Streifen, wie KL, welche durch Legung von zu einer Diagonale BD parallelen Linien ſich ergeben, werden durch die andere Diagonale AC halbirt, es iſt alſo jede von den Diagonalen eine Schwerlinie.

Schwerpunkte ebener Figuren.

Fig. 117.

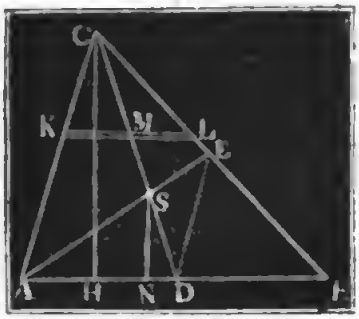


Bei einem Dreiecke ABC, Fig. 118 (ſ. f. S.), iſt jede Linie CD von einer Spitze nach der Mitte D der Ge-

Schwerpunkte ebener Figuren

genſeite AB eine Schwerlinie, denn es halbirt dieſelbe alle Elemente KL des Dreieckes, welche ſich ergeben, wenn man daſſelbe durch Parallellinien zu AB zerſchneidet. Zieht man von einem zweiten Ecke A nach der Mitte E der Gegenſeite BC eine zweite Schwerlinie, ſo giebt der Durchſchnitt S beider den Schwerpunkt des ganzen Dreieckes.

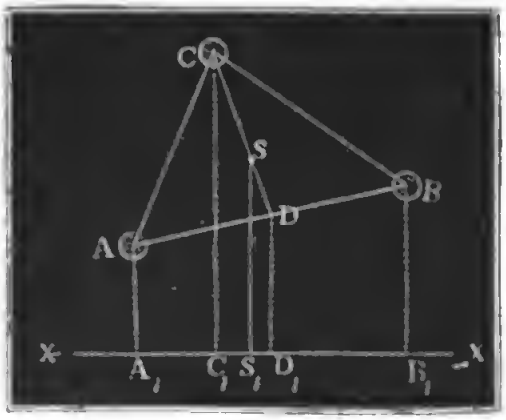
Fig. 118



Weil $BD = \frac{1}{2} BA$ und $BE = \frac{1}{2} BC$, ſo iſt DE parallel zu AC und gleich $\frac{1}{2} AC$, auch $\triangle DES$ ähnlich dem Dreiecke CAS und endlich $CS = 2\,SD$. Addirt man hierzu noch SD, ſo folgt $CS + SD$, d. i. $CD = 3\,DS$, und demnach umgekehrt $DS = \frac{1}{3} CD$. Es ſteht alſo der Schwerpunkt S um ein Drittel der Linie CD von dem Mittelpunkte D der Grundlinie und um zwei Drittel derſelben von der Spitze C ab. Zieht man CH und SN winkelrecht zur Baſis, ſo hat man auch $SN = \frac{1}{3} CH$; es ſteht alſo der Schwerpunkt S um ein Drittel der Höhe von der Baſis des Dreieckes ab.

Der Abſtand SS_1 des Schwerpunktes eines Dreieckes ABC Fig. 119, von einer Axe XX iſt $= DD_1 + \frac{1}{3}(CC_1 - DD_1)$, aber $DD_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1)$, folglich iſt $x = SS_1 = \frac{1}{3} CC_1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1)$ $= \dfrac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{3}$, d. i. das arithmetiſche Mittel aus den Abſtänden der drei Eckpunkte.

Fig. 119.

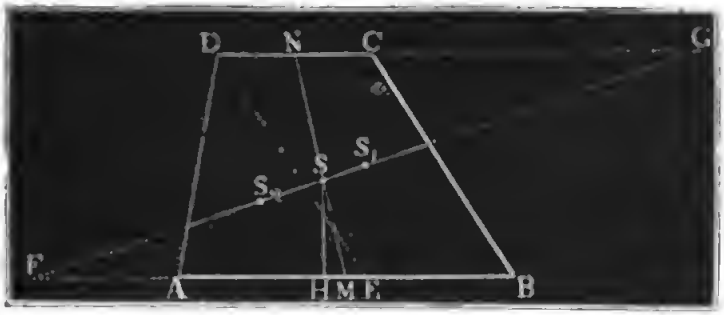


Da der Abſtand des Schwerpunktes von den gleichen, in den Eckpunkten eines Dreieckes angebrachten Gewichten auf dieſelbe Weiſe beſtimmt wird, ſo fällt der Schwerpunkt eines ebenen Dreieckes mit dem Schwerpunkte von dieſen drei gleichen Gewichten zuſammen.

§. 105. Die Beſtimmung des Schwerpunktes S eines Trapezes $ABCD$, Fig. 120 (ſ. f. S.), läßt ſich auf folgende Weiſe bewerkſtelligen. Die gerade Linie MN, welche die Mittelpunkte der beiden Grundlinien AB und CD mit einander verbindet, iſt Schwerlinie des Trapezes, denn viele gerade Linien parallel zu den Grundlinien gezogen, zerlegen das Trapez in ſchmale Streifen, deren Mittel- oder Schwerpunkte in MN fallen. Um

nun den Schwerpunkt S vollſtändig zu beſtimmen, hat man nur noch deſſen Abſtand SH von der einen Baſis AB zu finden. Schwerpunkte ebener Figuren.

Fig. 120.



Es bezeichne b die eine und b_1 die andere der parallelen Seiten AB und CD des Trapezes, h aber die Höhe oder den Normalabſtand dieſer Seiten. Zieht man nun DE parallel zur Seite BC, ſo erhält man ein Parallelogramm $BCDE$ mit dem Inhalte b_1h und dem Schwerpunkte S_1, deſſen Abſtand von $AB = \frac{h}{2}$, und ein Dreieck ADE mit dem Inhalte $\frac{(b-b_1)h}{2}$ und dem Schwerpunkte S_2, deſſen Abſtand von $AB = \frac{h}{3}$ iſt. Das ſtatiſche Moment des Trapezes hinſichtlich AB iſt deshalb

$$= b_1h \cdot \frac{h}{2} + \frac{(b-b_1)h}{2} \cdot \frac{h}{3} = (b+2b_1)\frac{h^2}{6},$$

aber der Inhalt des Trapezes iſt $= (b + b_1)\frac{h}{2}$; es folgt daher der Normalabſtand des Schwerpunktes S von der Baſis:

$$HS = \frac{\frac{1}{6}(b+2b_1)h^2}{\frac{1}{2}(b+b_1)h} = \frac{b+2b_1}{b+b_1} \cdot \frac{h}{3}.$$

Um den Schwerpunkt conſtruirend zu finden, verlängere man die beiden Grundlinien, mache die Verlängerung $CG = b$ und die Verlängerung $AF = b_1$, und verbinde die dadurch erhaltenen Endpunkte F und G durch eine Gerade; der Durchſchnittspunkt S mit der Mittellinie MN iſt der geſuchte Schwerpunkt, denn aus $HS = \frac{b+2b_1}{b+b_1} \cdot \frac{h}{3}$ folgt auch

$$MS = \frac{b+2b_1}{b+b_1} \cdot \frac{MN}{3} \text{ und } NS = \frac{2b+b_1}{b+b_1} \cdot \frac{MN}{3}; \text{ alſo}$$

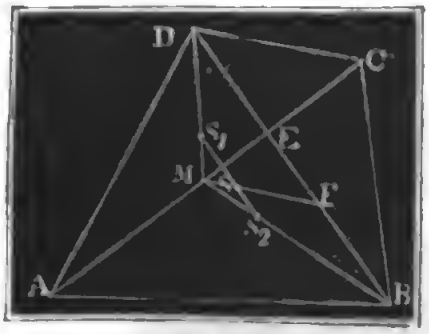
$$\frac{MS}{NS} = \frac{b+2b_1}{2b+b_1} = \frac{\frac{1}{2}b+b_1}{b+\frac{1}{2}b_1} = \frac{MA+AF}{CG+NC} = \frac{MF}{NG},$$

wie aus der Aehnlichkeit der Dreiecke MSF und NSG wirklich hervorgeht.

§. 106. Um den Schwerpunkt irgend eines andern Viereckes $ABCD$, Fig. 121 (ſ. f. S.) zu ermitteln, kann man daſſelbe durch eine Dia-

Schwerpunkte ebener Figuren.

Fig. 121.



gonale AC in zwei Dreiecke zerlegen, und nach dem Vorhergehenden die Schwerpunkte S_1 und S_2 derſelben und dadurch eine Schwerlinie $S_1 S_2$ beſtimmen. Zerlegt man nun noch das Viereck durch die Diagonale BD in zwei andere Dreiecke, und beſtimmt deren Schwerpunkte, ſo ſtößt man auf eine zweite Schwerlinie, deren Durchſchnitt mit der erſteren den Schwerpunkt des ganzes Viereckes giebt.

Einfacher geht man aber zu Werke, wenn man die Diagonale AC in M halbirt, das größere Stück BE der zweiten Diagonale über das kleinere trägt, ſo das $DF = BE$ wird, denn zieht man nun FM und theilt dieſe Linie in drei gleiche Theile, ſo liegt im erſten Theilpunkte S von M aus der Schwerpunkt, wie ſich auf folgende Weiſe beweiſen läßt. Es iſt $MS_1 = \frac{1}{3} MD$ und $MS_2 = \frac{1}{3} MB$, folglich $S_1 S_2$ parallel zu BD, aber SS_1 mal $\triangle ACD = SS_2$ mal $\triangle ACB$, oder $SS_1 . DE = SS_2 . BE$, daher $SS_1 : SS_2 = BE : DE$. Nun iſt noch $BE = DF$ und $DE = BF$, folglich auch $SS_1 : SS_2 = DF : BF$. Die Gerade MF ſchneidet demnach die Schwerlinie $S_1 S_2$ in dem Schwerpunkte des ganzes Viereckes.

§. 107. Kommt es darauf an, den Schwerpunkt S eines Polygons $ABCDE$, Fig. 122, zu finden, ſo zerlege man dieſes Polygon in Dreiecke und beſtimme die ſtatiſchen Momente dieſer in Hinſicht auf zwei rechtwinkelige Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$.

Sind die Coordinaten $OA_1 = x_1$, $OA_2 = y_1$, $OB_1 = x_2$, $OB_2 = y_2$ u. ſ. w. der Endpunkte gegeben, ſo laſſen ſich die ſtatiſchen Momente der einzelnen Dreiecke ABO, BCO, COD u. ſ. w. einfach auf folgende Weiſe ermitteln. Der Inhalt des Dreieckes ABO iſt nach der unten ſtehenden Anmerkung, $= D_1 = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$, der Inhalt des folgenden Dreieckes $BCO = D_2 = \frac{1}{2}(x_2 y_3 - x_3 y_2)$ u. ſ. w., die Abſtände des Schwerpunktes des Dreieckes ABO von $Y\overline{Y}$, nach §. 104, $= u_1 = \frac{x_1 + x_2 + 0}{3}$

$= \frac{x_1 + x_2}{3}$, von $X\overline{X} = v_1 = \frac{y_1 + y_2}{3}$, des Schwerpunktes des Dreieckes

BCO, $= u_2 = \frac{x_2 + x_3}{2}$ und $v_2 = \frac{y_2 + y_3}{3}$ u. ſ. w. Multiplicirt man dieſe Abſtände mit den Inhalten der Dreiecke, ſo erhält man die Momente der letzteren, und ſetzt man die ſo erhaltenen Werthe in die Formeln:

$$u = \frac{D_1 u_1 + D_2 u_2 + \ldots}{D_1 + D_2 + \ldots} \text{ und}$$

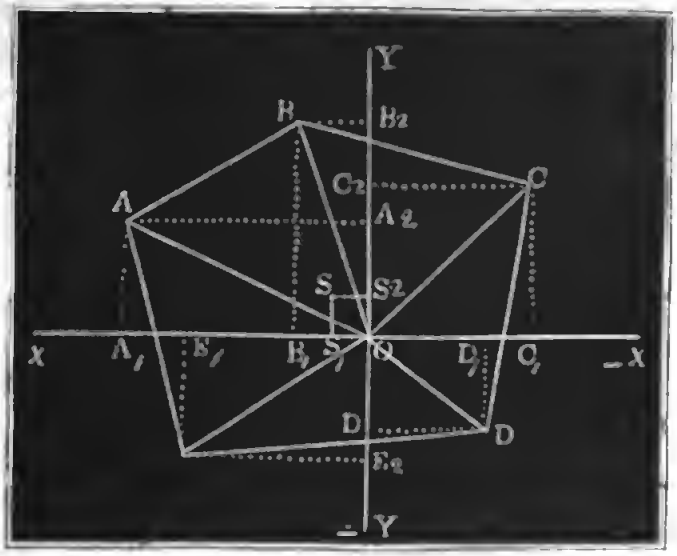
$$v = \frac{D_1 v_1 + D_2 v_2 + \dots}{D_1 + D_2 + \dots},$$

Schwerpunkte ebener Figuren.

so erhält man die Abstände u und v des gesuchten Schwerpunktes von den Axen $Y\overline{Y}$ und $X\overline{X}$.

Beispiel. Ein Fünfeck $ABCDE$, Fig. 122, ist durch die folgenden Coordi-

Fig. 122.



naten seiner Eckpunkte A, B, C u. s. w. gegeben, und man sucht die Coordinaten des Schwerpunktes:

Gegebene Coordinaten		Die zweifachen Inhalte der Dreiecke.	Die dreifachen Coordinaten der Schwerpunkte.		Sechsfache statischen Momente.	
x	y		$3u_n$	$3v_n$	$6D_n u_n$	$6D_n v_n$
24	11	$24 \cdot 21 - 7 \cdot 11 = 427$	31	32	13237	13664
7	21	$7 \cdot 15 + 21 \cdot 16 = 441$	− 9	36	− 3969	15876
− 16	15	$16 \cdot 9 + 12 \cdot 15 = 324$	− 28	6	− 9072	1944
− 12	− 9	$12 \cdot 12 + 18 \cdot 9 = 306$	+ 6	− 21	1836	− 6426
18	− 12	$18 \cdot 11 + 24 \cdot 12 = 486$	+ 42	− 1	20412	− 486
		Summe: 1984			22444	24572

Der Abstand des Schwerpunktes von der Axe YY ist nun:

$$SS_2 = u = \frac{1}{3} \cdot \frac{22444}{1984} = 3{,}771$$

und von der Axe XX:

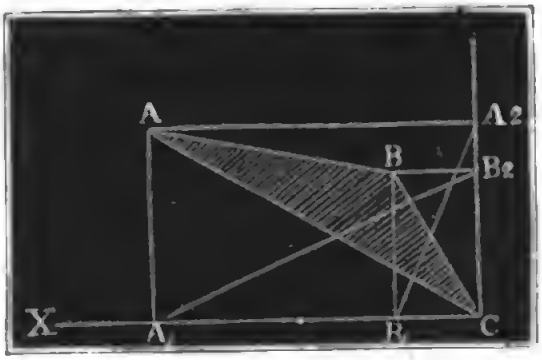
$$SS_1 = v = \frac{1}{3} \cdot \frac{24572}{1984} = 4{,}128.$$

Anmerkung. Sind $CA_1 = x_1$, $CB_1 = x_2$, $CA_2 = y_1$ und $CB_2 = y_2$

Schwerpunkte ebener Figuren.

die Coordinaten von zwei Eckpunkten eines Dreieckes ABC, Fig. 123, deren dritter Eckpunkt C mit dem Anfangspunkte des Coordinatensystemes zusammenfällt, so hat man den Inhalt desselben:

Fig. 123



$$D = \text{Trapez } ABB_1A_1 + \text{Dreieck } CBB_1 - \text{Dreieck } CAA_1$$

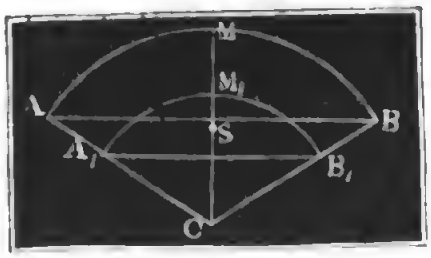
$$= \left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)(x_1-x_2)+\frac{x_2y_2}{2}-\frac{x_1y_1}{2}$$

$$= \frac{x_1y_2-x_2y_1}{2}.$$

Es ist also der Inhalt dieses Dreieckes die Differenz von zwei anderen Dreiecken, CB_2A_1 und CA_2B_1, und es ist die eine Coordinate eines Punktes Grundlinie des einen und die andere Coordinate Höhe des andern Dreieckes, ebenso die eine Coordinate des andern Punktes Höhe des einen und die andere Coordinate Grundlinie des andern Dreieckes.

§. 108. Der Schwerpunkt eines Kreisausschnittes ACB, Fig. 124, fällt mit dem Schwerpunkte S eines Kreisbogens A_1B_1 zusammen, der mit dem Ausschnitte einerlei Centriwinkel hat und dessen Halbmesser CA_1 zwei Drittel von dem Halbmesser CA des Ausschnittes ist, denn es läßt sich der Ausschnitt durch unendlich viele Halbmesser in lauter schmale Dreiecke zerlegen, deren Schwerpunkte um zwei Drittel des Halbmessers von dem Centro C abstehen und deshalb in ihrer stetigen Folge den Bogen $A_1M_1B_1$ bilden. Es liegt also der Schwerpunkt S des Ausschnittes in dem dieses Flächenstück halbirenden Radius CM und in der Entfernung

Fig. 124.



$$CS = x = \frac{\text{Sehne}}{\text{Bogen}} \cdot \frac{2}{3}\, CA = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sin.\frac{1}{2}\beta}{\beta} \cdot r,$$

insofern r den Halbmesser CA des Sectors und β den den Centriwinkel ACB desselben messenden Bogen bezeichnet.

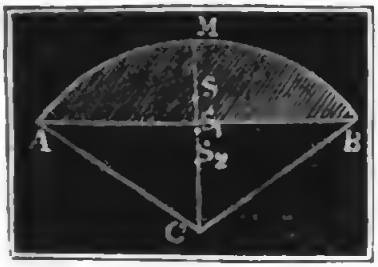
Für die halbe Kreisfläche ist $\beta = \pi$, $\sin.\frac{1}{2}\beta = \sin. 90^0 = 1$, daher $x = \frac{4}{3\pi} r = 0{,}4244\, r$ oder ungefähr $\frac{14}{33} r$. Für einen Quadranten folgt $x = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\pi} r = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} r = 0{,}6002\, r$ und für einen Sextanten $x = \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\pi} r = \frac{2}{\pi} r = 0{,}6366\, r$.

§. 109. Der Schwerpunkt eines Kreisabschnittes ABM, Fig. 125, ergiebt sich, wenn man das Moment des Ausschnittes $ACBM$

gleich setzt der Summe aus dem Momente des Abschnittes und dem Momente des Dreieckes ACB. Ist r der Halbmesser CA, s die Sehne AB und A der Flächeninhalt des Segmentes ABM, so hat man das Moment des Ausschnittes = Ausschnitt mal $CS_1 = \frac{r \,.\, \text{Bogen}}{2} \cdot \frac{\text{Sehne}}{\text{Bogen}} \cdot \frac{2}{3} r$ $= \frac{1}{3} sr^2$, ferner das Moment des Dreieckes = Dreieck mal $CS_2 = \frac{s}{2}\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{sr^2}{3} - \frac{s^3}{12}$ und demnach das Moment des Abschnittes

Schwerpunkte ebener Figuren.

Fig. 125



$$A \,.\, CS = Ax = \frac{1}{3} sr^2 - \left(\frac{sr^2}{3} - \frac{s^3}{12}\right) = \frac{s^3}{12}.$$

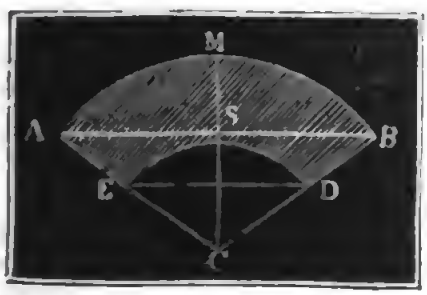
Es ist folglich der gesuchte Abstand $x = \frac{s^3}{12A}$.

Für den Halbkreis ist $s = 2r$ und $A = \frac{1}{2}\pi r^2$, daher

$$x = \frac{8r^3}{12 \,.\, \frac{\pi r^2}{2}} = \frac{4r}{3\pi}, \text{ wie oben gefunden wurde.}$$

Auf gleiche Weise bestimmt sich auch der Schwerpunkt S eines Ringstückes $ABDE$, Fig. 126, denn dieses ist die Differenz zweier Sectoren ACB und DCE. Sind die Halbmesser $CA = r$ und $CD = r_1$ und die Sehnen $AB = s$ und $DE = s_1$, so erhält man die statischen Momente der Sectoren: $\frac{sr^2}{3}$ und $\frac{s_1 r_1^2}{3}$, daher das statische Moment des Ringstückes: $= \frac{sr^2 - s_1 r_1^2}{3}$, oder, da $\frac{s_1}{s} = \frac{r_1}{r}$ ist, $= \frac{r^3 - r_1^3}{3} \cdot \frac{s}{r}$. Der Inhalt des Ringstückes ist aber $= \frac{\beta r^2}{2} - \frac{\beta r_1^2}{2}$ $= \beta\left(\frac{r^2 - r_1^2}{2}\right)$, wofern β den dem Centriwinkel ACB entsprechenden Bogen bezeichnet; es folgt demnach der Schwerpunkt S des Ringstückes durch den Abstand $CS = x = \frac{\text{Moment}}{\text{Fläche}} = \frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{s}{r\beta}$ $= \frac{2}{3}\left(\frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2}\right) \cdot \frac{\text{Sehne}}{\text{Bogen}} = \frac{4}{3} \frac{\sin.\frac{1}{2}\beta}{\beta} \cdot \frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2}$.

Fig. 126.



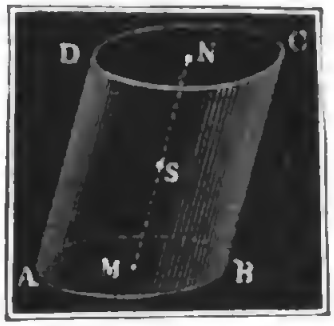
Beiſpiel. Sind die Halbmeſſer der Stirnfläche eines Gewölbes: $r = 5$ Fuß und $r_1 = 3\frac{1}{2}$ Fuß, und iſt der Centriwinkel dieſer Fläche: $\beta^0 = 130^0$, ſo iſt der Abſtand des Schwerpunktes dieſer Fläche vom Mittelpunkte:

$$x = \frac{4}{3}\,\frac{\sin.65^0}{arc.130^0}\cdot\frac{5^3-3{,}5^3}{5^2-3{,}5^2} = \frac{4\,.\,0.9063}{3\,.\,2{,}2689}\cdot\frac{125-42{,}875}{25-12.25} = \frac{3{,}6252\times 82{,}125}{6{,}8067\times 12{,}75}$$
$$= 3{,}430 \text{ Fuß}.$$

Schwerpunkte krummer Flächen.

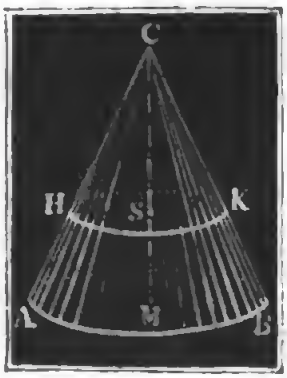
§. 110. Der Schwerpunkt von der krummen Oberfläche (dem Mantel) eines Cylinders *ABCD*, Fig. 127, liegt in der Mitte *S* der Axe *MN* dieſes Körpers, denn alle ringförmigen Elemente des Cylindermantels, welche man erhält, wenn man parallel zur Baſis Schnitte durch den Körper führt, ſind unter ſich gleich und haben ihre Schwer- und Mittelpunkte in der Axe; es bilden alſo dieſe Schwerpunkte eine gleichförmig ſchwere Linie. Aus denſelben Gründen liegt auch der Schwerpunkt von der Umfläche eines Prisma's im Mittelpunkte der die Schwerpunkte beider Grundflächen verbindenden Geraden.

Fig. 127.



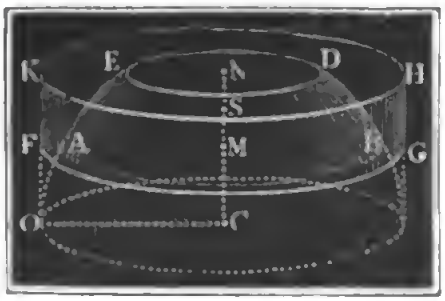
Der Schwerpunkt *S* des Mantels von einem geraden Kegel *ABC*, Fig. 128, liegt in der Axe des Kegels und iſt um ein Drittel dieſer Linie von der Baſis oder um zwei Drittel von der Spitze entfernt, denn dieſe krumme Fläche läßt ſich durch gerade Linien, welche man Seiten des Kegels nennt, in unendlich viele, unendlich ſchmale Dreiecke zerlegen, deren Schwerpunkte einen Kreis *HK* bilden, welcher um zwei Drittel der Axe von der Spitze abſteht, deſſen Schwer- oder Mittelpunkt *S* aber in die Axe *CM* fällt.

Fig. 128.



Der Schwerpunkt einer Kugelzone *ABDE*, Fig. 129, und ebenſo der Schwerpunkt einer Kugelſchaale (Calotte) liegt im Mittelpunkte *S* ihrer Höhe *MN*; denn es hat, den Lehren der Geometrie zufolge, die Zone mit einem Cylindermantel *FGHK* gleichen Inhalt, deſſen Höhe gleich iſt der Höhe *MN* und deſſen Halbmeſſer gleich iſt dem Kugelhalbmeſſer *CO* der Zone, und es findet dieſe Gleichheit auch unter den ringförmigen Elementen ſtatt, die man erhält, wenn man unendlich viele Ebenen

Fig. 129.



parallel zu den Grundkreiſen beider krummen Flächen durch dieſelben hindurchlegt; es fällt dieſemnach der Schwerpunkt der Zone mit dem des Cylindermantels zuſammen.

Anmerkung. Der Schwerpunkt von dem Mantel eines ſchiefen Kegels oder einer ſchiefen Pyramide ſteht zwar um ein Drittel der Höhe von der Baſis ab, befindet ſich aber nicht in der von der Spitze nach dem Schwerpunkte des Umfanges der Baſis gehenden Geraden, weil Schnitte parallel zur Baſis den Mantel in Ringe zerlegen, die an verſchiedenen Stellen ihres Umfanges verſchieden breit ſind.

§. 111. Der Schwerpunkt eines Prisma's AK, Fig. 130, iſt der Mittelpunkt S derjenigen geraden Linie, welche die Schwerpunkte M und N der beiden Grundflächen AD und GK verbindet, denn das Prisma läßt ſich durch Schnitte parallel zur Baſis in lauter congruente Scheiben zerlegen, deren Schwerpunkte in MN fallen, und in ihrer ſtetigen Folge die gleichförmig ſchwere gerade Linie MN ſelbſt bilden. Schwerpunkte von Körpern.

Fig. 130.

Aus demſelben Grunde befindet ſich auch der Schwerpunkt eines Cylinders in der Mitte der Axe deſſelben.

Der Schwerpunkt einer Pyramide ADF, Fig. 131., liegt in der geraden Linie MF von der Spitze F nach dem Schwerpunkte M der Baſis, denn alle Schnitte, wie $NOPQR$, haben wegen ihrer Aehnlichkeit mit der Baſis ihre Schwerpunkte in dieſer Linie.

Fig. 131.

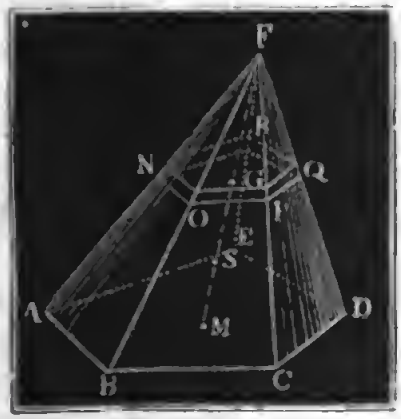
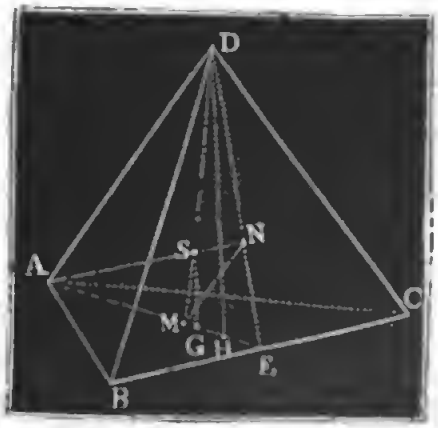


Fig. 132.



Iſt die Pyramide dreiſeitig, wie $ABCD$, Fig. 132, ſo läßt ſich jeder der vier Eckpunkte als Spitze und die gegenüberliegende Fläche als Baſis anſehen; es beſtimmt ſich daher der Schwerpunkt S in dem Durchſchnitte von zwei aus den Ecken D und A nach den Schwerpunkten M und N der gegenüberliegenden Flächen ABC und BCD gehenden geraden Linien.

Schwerpunkte von Körpern.

Giebt man noch die geraden Linien EA und ED an, ſo hat man (nach §. 104) $EM = \frac{1}{3} EA$ und $EN = \frac{1}{3} ED$; es iſt daher MN parallel AD und $= \frac{1}{3} AD$, und auch das Dreieck MNS ähnlich dem Dreiecke DAS. Dieſer Aehnlichkeit zufolge hat man wieder $MS = \frac{1}{3} DS$, oder $DS = 3\,MS$, alſo $MD = MS + SD = 4\,MS$, und umgekehrt $MS = \frac{1}{4} MD$. Der Schwerpunkt der dreiſeitigen Pyramide liegt alſo um ein Viertel derjenigen Linie von der Baſis ab, welche die Spitze D der Pyramide mit dem Schwerpunkte M ihrer Baſis verbindet.

Giebt man noch die Höhenlinien DH und SG an und zieht man die HM, ſo erhält man die ähnlichen Dreiecke DHM und SGM, in welchen nach dem Vorigen $SG = \frac{1}{4} DH$ iſt. Man kann alſo behaupten: der Abſtand des Schwerpunktes S einer dreiſeitigen Pyramide iſt von der Baſis gleich ein Viertel, und der von der Spitze gleich drei Viertel der Höhe von der ganzen Pyramide.

Da endlich jede Pyramide, und ebenſo jeder Kegel, aus lauter gleich hohen dreiſeitigen Pyramiden zuſammengeſetzt iſt, ſo ſteht auch der Schwerpunkt aller Pyramiden und Kegel um ein Viertel der Höhe von der Grundfläche und um drei Viertel derſelben von der Spitze ab.

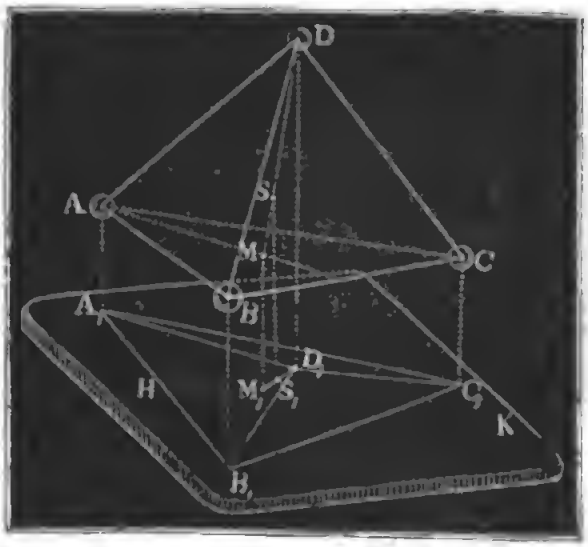
Man findet alſo den Schwerpunkt einer Pyramide oder den eines Kegels, wenn man in dem Abſtande ein Viertel der Höhe von der Baſis eine Ebene parallel zu dieſer legt und den Schwerpunkt des erhaltenen Querſchnittes oder den Durchſchnitt deſſelben mit der die Spitze und den Schwerpunkt der Baſis verbindenden Geraden aufſucht.

§. 112. Kennt man die Abſtände AA_1, BB_1 u. ſ. w. der vier Eckpunkte einer dreiſeitigen Pyramide $ABCD$, Fig. 133, von einer Ebene HK, ſo erhält man den Abſtand SS_1 des Schwerpunktes S von dieſer Ebene durch den Mittelwerth

$$SS_1 = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1}{4},$$

wie ſich folgendergeſtalt beweiſen läßt.

Fig. 133



Der Abſtand des Schwerpunktes M der Baſis ABC von eben dieſer Ebene iſt (§. 104)

$$MM_1 = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{3},$$

und der Abſtand des Schwerpunktes S der Pyramide läßt ſich ſetzen

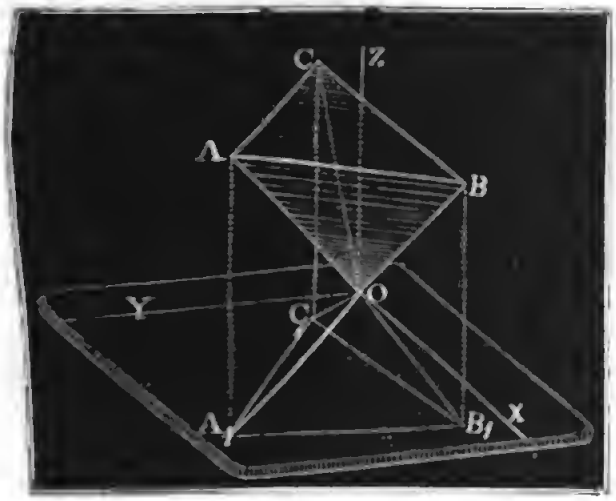
$$SS_1 = MM_1 + \tfrac{1}{4}(DD_1 - MM_1),$$

wofern DD_1 der Abstand der Spitze ist; es folgt daher aus der Verbindung der beiden letzten Gleichungen Schwerpunkte von Körpern.

$$SS_1 = \tfrac{3}{4}MM_1 + \tfrac{1}{4}DD_1 = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1}{4}.$$

Der Abstand des Schwerpunktes von vier gleichen, in den Eckpunkten der dreiseitigen Pyramide angebrachten Gewichten ist ebenfalls gleich dem arithmetischen Mittel $\frac{AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1}{4}$, folglich fällt der Schwerpunkt der Pyramide mit dem von diesem Gewichtssysteme zusammen.

Fig. 134.



Anmerkung. Auch die Volumenbestimmung einer dreiseitigen Pyramide aus den Coordinaten ihrer Eckpunkte ist eine sehr einfache. Legen wir durch die Spitze O einer solchen Pyramide $ABCO$, Fig. 134, drei Grundebenen, XY, XZ, YZ, und bezeichnen wir die Abstände der Eckpunkte A, B, C von diesen Ebenen durch z_1, z_2, z_3; y_1, y_2, y_3 und x_1, x_2, x_3, so ist das Volumen der Pyramide

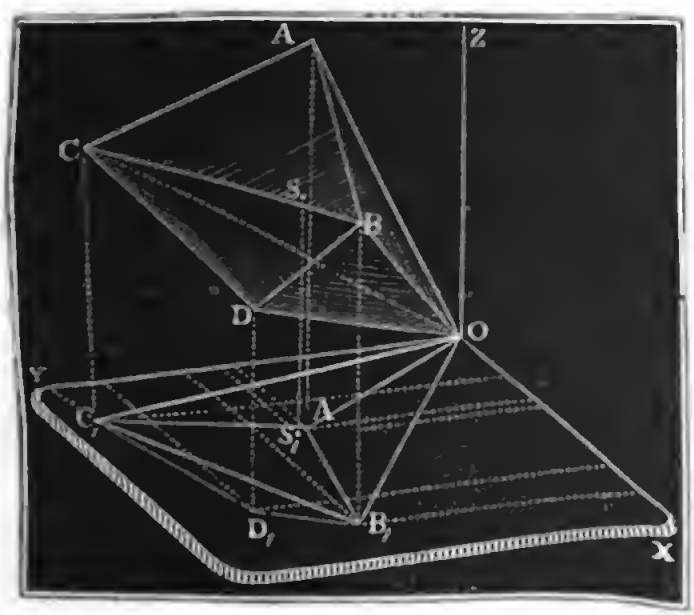
$$V = \pm \tfrac{1}{6}(x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1),$$

wie sich ergiebt, wenn man die Pyramide als das Aggregat von vier schief abgeschnittenen Prismen ansieht.

Die Abstände des Schwerpunktes dieser Pyramide von den drei Grundebenen sind:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4},\quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{4} \text{ und } z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{4}.$$

Fig. 135.



§. 113. Da sich jedes Polyeder, wie $ABCDO$, Fig. 135, in lauter dreiseitige Pyramiden, wie $ABCO$, $BCDO$ zerlegen läßt, so kann man auch den Schwerpunkt S desselben finden, wenn man die Volumina und statischen Momente der einzelnen Pyramiden berechnet.

Sind die Abstände der Eckpunkte A, B, C u. s. w.

Schwerpunkte von Körpern

von den durch die gemeinſchaftliche Spitze O aller Pyramiden gelegten Coordinatebenen: x_1, x_2, x_3 u. ſ. w, y_1, y_2, y_3 u. ſ. w., z_1, z_2, z_3 u. ſ. w., ſo hat man die Volumina der einzelnen Pyramiden

$$V_1 = \pm 1/6\,(x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1),$$
$$V_2 = \pm 1/6\,(x_2y_3z_4 + x_3y_4z_2 + x_4y_2z_3 - x_2y_4z_3 - x_3y_2z_4 - x_4y_3z_2)$$

u. ſ. w. und die Abſtände ihrer Schwerpunkte:

$$u_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4},\quad v_1 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{4},\quad w_1 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{4},$$

$$u_2 = \frac{x_2 + x_3 + x_4}{4},\quad v_2 = \frac{y_2 + y_3 + y_4}{4},\quad w_2 = \frac{z_2 + z_3 + z_4}{4}\ \text{u. ſ. w.}$$

Aus dieſen Werthen berechnen ſich endlich die Abſtände des Schwerpunktes des ganzen Körpers mittels der Formeln;

$$u = \frac{V_1u_1 + V_2u_2 + \dots}{V_1 + V_2 + \dots},\quad v = \frac{V_1v_1 + V_2v_2 + \dots}{V_1 + V_2 + \dots},$$

$$w = \frac{V_1w_1 + V_2w_2 + \dots}{V_1 + V_2 + \dots}.$$

Beiſpiel. Ein von ſechs Dreiecken begrenzter Körper ADO, Fig. 135, iſt durch folgende Coordinatenwerthe ſeiner Eckpunkte beſtimmt, und man ſucht die Coordinaten ſeines Schwerpunktes.

Gegebene Coordinaten.			Die ſechsfachen Inhalte der dreiſeitigen Pyramiden.	Vierfache Coordinaten der Schwerpunkte.			Vierundzwanzigfache ſtatiſche Momente.		
x	y	z		$4u_n$	$4v_n$	$4w_n$	$24\,V_nu_n$	$24\,V_nv_n$	$24\,V_nw_n$
20	23	41	$6\,V = \begin{Bmatrix}20.29.28\\23.30.12\\41.45.40\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}20.40.30\\23.28.45\\41.12.29\end{Bmatrix} = 31072$	77	92	99	2392544	2858624	3076128
45	29	30							
12	40	28	$6\,V = \begin{Bmatrix}45\ 35.28\\29.20.12\\30.38.40\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}45.40.20\\29.28\ 38\\30\ 12.35\end{Bmatrix} = 17204$	95	104	78	1634380	1789216	1341912
38	35	20							
			Summe: 48276				4026924	4647840	4418040

Aus den Ergebniſſen dieſer Rechnung folgen nun die Abſtände des Schwerpunktes des ganzen Körpers von den Ebenen YZ, XZ und XY,

$$u = \frac{1}{4}\cdot\frac{4026924}{48276} = 20{,}853,$$

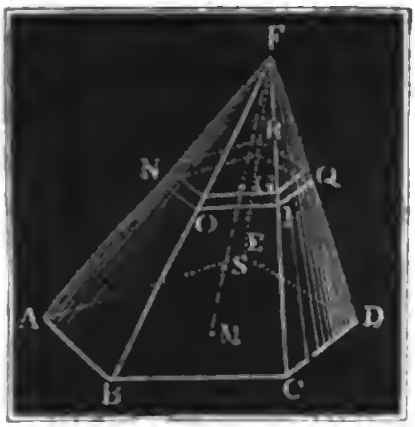
$$v = \frac{1}{4}\cdot\frac{4647840}{48267} = 24{,}069,$$

$$w = \frac{1}{4}\cdot\frac{4418040}{48276} = 22{,}879.$$

§. 114. Der Schwerpunkt einer abgestumpften Pyramide $ADQN$, Fig. 136, liegt in der Linie MG, welche die Schwerpunkte beider (parallelen) Grundflächen verbindet. Um aber den Abstand dieses Punktes von einer der Grundflächen zu bestimmen, hat man die Volumina und Momente der vollständigen Pyramide ADF und der Ergänzungspyramide NQF zu ermitteln. Sind die Inhalte der Grundflächen AD und $NQ = G$ und G_1 und ist der Normalabstand beider $= h$, so bestimmt sich die Höhe x der Ergänzungspyramide aus

Schwerpunkt von Körpern.

Fig. 136.



der Formel

$$\frac{G}{G_1} = \frac{(h+x)^2}{x^2}, \text{ welche } \frac{h}{x} + 1 = \sqrt{\frac{G}{G_1}}, \text{ also } x = \frac{h\sqrt{G_1}}{\sqrt{G}-\sqrt{G_1}},$$

so wie $h + x = \dfrac{h\sqrt{G}}{\sqrt{G}-\sqrt{G_1}}$ giebt.

Das Moment der ganzen Pyramide in Beziehung auf die Basis G ist nun

$$\frac{G(h+x)}{3} \cdot \frac{h+x}{4} = {}^1/_{12} \frac{h^2G^2}{(\sqrt{G}-\sqrt{G_1})^2}, \text{ das der Ergänzungspyramide}$$

$$= \frac{G_1 x}{3}\left(h + \frac{x}{4}\right) = {}^1/_3 \frac{h^2\sqrt{G_1}^3}{\sqrt{G}-\sqrt{G_1}} + {}^1/_{12} \cdot \frac{h^2 G_1{}^2}{(\sqrt{G}-\sqrt{G_1})^2}; \text{ es folgt da-}$$

her das Moment der abgekürzten Pyramide:

$$\frac{h^2}{12(\sqrt{G}-\sqrt{G_1})^2} \cdot (G^2 - 4(\sqrt{GG_1}^3 - G_1{}^2) - G_1{}^2)$$

$$= \frac{h^2(G^2 - 4G_1\sqrt{GG_1} + 3G_1{}^2)}{12(G - 2\sqrt{GG_1} + G_1)} = \frac{h^2}{12} \cdot (G + 2\sqrt{GG_1} + 3G_1).$$

Nun ist noch der Inhalt der abgekürzten Pyramide:

$$V = \frac{h}{3}(G + \sqrt{GG_1} + G_1);$$

es folgt daher endlich der Abstand ihres Schwerpunktes S von der Basis:

$$y = \frac{h}{4} \cdot \frac{G + 2\sqrt{GG_1} + 3G_1}{G + \sqrt{GG_1} + G_1}.$$

Sind die Halbmesser der Grundflächen eines abgekürzten Kegels: r und r_1, ist also $G = \pi r^2$ und $G_1 = \pi r_1{}^2$, so hat man für diesen

$$y = \frac{h}{4} \cdot \frac{r^2 + 2rr_1 + 3r_1{}^2}{r^2 + rr_1 + r_1{}^2}.$$

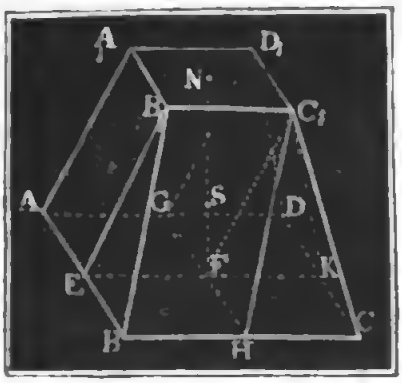
Schwerpunkte von Körpern.

Beiſpiel. Der Schwerpunkt eines abgekürzten Kegels von der Höhe $h = 20$ Zoll und den Halbmeſſern $r = 12$ und $r_1 = 8$ Zoll, liegt, wie alle Mal, in der die Mittelpunkte beider kreisförmigen Grundflächen verbindenden Linie und ſteht von der größeren um

$$y = {}^{20}/_{4} \cdot \frac{12^2+2.12\,8+3\,8^2}{12^2+12\,8+8} = \frac{5.528}{304} = \frac{2640}{304} = 8{,}684 \text{ Zoll ab.}$$

§. 115. Ein **Ponton**, d. i. ein von zwei unähnlichen rectangulären Grundflächen und von vier Trapezen umſchloſſener Körper ACC_1A_1 Fig. 137, läßt ſich in ein Parallelepiped AFC_1A_1, in zwei dreiſeitige Prismen EHC_1B_1 und GKC_1D_1 und in eine vierſeitige Pyramide HKC_1 zerlegen; man kann daher mit Hülfe der Momente dieſer Beſtandtheile den Schwerpunkt des Körpers finden.

Fig. 137.



Es läßt ſich ſehr leicht einſehen, daß die gerade Linie von der Mitte der einen Baſis nach der Mitte der andern Schwerlinie dieſes Körpers iſt; es bleibt alſo nur noch der Abſtand des Schwerpunktes von der einen Baſis zu beſtimmen übrig. Bezeichnen wir die Länge BC und Breite AB der einen Baſis durch l und b, die Länge B_1C_1 und Breite A_1B_1 der andern Baſis durch l_1 und b_1, und die Höhe des Körpers oder den Abſtand beider Grundflächen durch h. Dann iſt der Inhalt des Parallelepipedes $= b_1l_1h$ und deſſen Moment $b_1l_1h \cdot \frac{h}{2} = {}^1/_2\, b_1l_1h^2$, ferner der Inhalt der beiden dreiſeitigen Prismen $= ([b-b_1]\,l_1+[l-l_1]\,b_1)\,\frac{h}{2}$ und deren Moment

$= ([b-b_1]\,l_1+[l-l_1]\,b_1)\,\frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3}$, endlich der Inhalt der Pyramide

$= (b-b_1)(l-l_1)\,\frac{h}{3}$ und deren Moment

$= (b-b_1)\,(l-l_1)\,\frac{h}{3} \cdot \frac{h}{4}$. Das Volumen des ganzen Körpers iſt nun

$$V = (6b_1l_1+3bl_1+3lb_1-6\,b_1l_1+2bl+2b_1l_1-2bl_1-2b_1l) \cdot \frac{h}{6}$$

$$= (2bl+2b_1l_1+bl_1+lb_1)\,\frac{h}{6}, \text{ und deſſen Moment}$$

$$Vy = (6b_1l_1+2bl_1+2lb_1-4b_1l_1+bl+b_1l_1-bl_1-lb_1) \cdot \frac{h^2}{12}$$

$$= (3b_1l_1+bl+bl_1+b_1l)\,\frac{h^2}{12}.$$

Hieraus folgt endlich der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche bl: Schwerpunkte von Körpern.

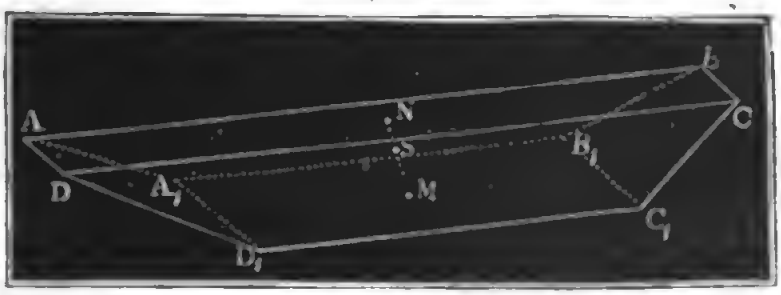
$$y = \frac{bl+3b_1l_1+bl_1+b_1l}{2bl+2b_1l_1+bl_1+b_1l} \cdot \frac{h}{2}.$$

Anmerkung. Diese Formel findet auch ihre Anwendung bei Körpern mit elliptischen Grundflächen. Sind die Axen der einen Grundfläche a und b und die der andern a_1 und b_1, so ist das Volumen eines solchen Körpers (Kübels): $V = \frac{nh}{24}(2ab+2a_1b_1+ab_1+a_1b)$, und der Abstand des Schwerpunktes:

$$y = \frac{ab+3a_1b+ab_1+a_1b}{2ab+2a_1b_1+ab_1+a_1b} \cdot \frac{h}{2}.$$

Beispiel. Ein Teichdamm ACC_1A_1, Fig. 138, von 20 Fuß Höhe ist

Fig. 138.



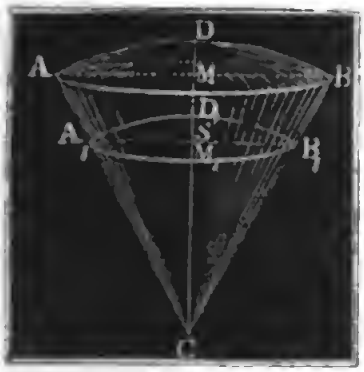
unten 250 Fuß lang und 40 Fuß breit, oben aber 400 Fuß lang und 15 Fuß breit, man sucht den Abstand seines Schwerpunktes von der Basis. Hier ist $b = 40$, $l = 250$, $b_1 = 15$, $l_1 = 400$, $h = 20$, daher der gesuchte Vertikalabstand:

$$y = \frac{40 \cdot 250+3 \cdot 15 \cdot 400+40 \cdot 400+15 \cdot 250}{2 \cdot 40 \cdot 250+2 \cdot 15 \cdot 400+40 \cdot 400+15 \cdot 250} \cdot \frac{20}{2}$$

$$= \frac{4775}{5175} \cdot 10 = \frac{1910}{207} = 9{,}227 \text{ Fuß}.$$

§. 116. Dreht sich ein Kreisausschnitt ACD, Fig. 139, um seinen Halbmesser CD, so entsteht ein Kugelausschnitt ACB, dessen Schwerpunkt wir bestimmen wollen. Man kann sich diesen Körper als einen Inbegriff von unendlich vielen und unendlich dünnen Pyramiden vorstellen, deren gemeinschaftliche Spitze der Mittelpunkt C ist und deren Grundflächen die Kugelmütze ADB bilden. Die Schwerpunkte aller dieser Pyramiden stehen um $\frac{3}{4}$ des Kugelhalbmessers vom Mittelpunkte C ab, es bilden daher dieselben eine zweite Kugelmütze $A_1D_1B_1$ vom Halbmesser $CA_1 = \frac{3}{4}CA$. Der Schwerpunkt S dieser krummen Fläche ist aber auch der Schwerpunkt des Kugelausschnittes, weil sich die

Fig. 139.



Schwerpunkte von Körpern.

Gewichte der Elementarpyramiden auf dieſe Fläche gleichförmig vertheilen, dieſe alſo gleichförmig ſchwer ausfällt.

Setzen wir nun den Halbmeſſer $CA = CD = r$ und die Höhe DM der äußeren Calotte $= h$, ſo erhalten wir für die innere Calotte $CD_1 = \frac{3}{4} r$, und $M_1D_1 = \frac{3}{4}h$, folglich (§. 110) $D_1S = \frac{1}{2} M_1D_1 = \frac{3}{8}h$ und den Abſtand des Schwerpunktes des Kugelausſchnittes vom Centro:

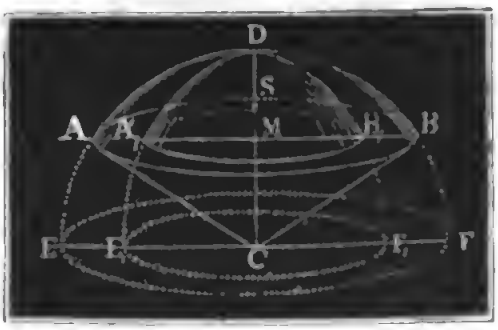
$$CS = CD_1 - SD_1 = \frac{3}{4}r - \frac{3}{8}h = \frac{3}{4}\left(r - \frac{h}{2}\right).$$

Für die Halbkugel iſt z. B. $h = r$, daher der Abſtand ihres Schwerpunktes S vom Mittelpunkte C:

$$CS = \frac{3}{4} \cdot \frac{r}{2} = \frac{3}{8} r.$$

§. 117. Den Schwerpunkt S von einem Kugelſegmente ABD, Fig. 140, erhält man, indem man das Moment deſſelben gleichſetzt der Differenz zwiſchen dem Momente des Ausſchnittes $ADBC$ und dem des Kegels ABC. Setzen wir wieder den Kugelhalbmeſſer $CD = r$ und die Höhe $DM = h$, ſo erhalten wir das Moment des Ausſchnittes $= \frac{2}{3}\pi r^2 h \cdot \frac{3}{8}(2r - h) = \frac{1}{4}\pi r^2 h\,(2r - h)$ und das des Kegels $= \frac{1}{3}\pi h\,(2r - h) \cdot (r - h) \cdot \frac{3}{4}(r - h) = \frac{1}{4}\pi h\,(2r - h)(r - h)^2$; es iſt alſo das Moment des Kugelſegmentes $= \frac{1}{4}\pi h\,(2r - h)(r^2 - [r - h]^2) = \frac{1}{4}\pi h^2 (2r - h)^2$. Der Inhalt des Segmentes iſt aber $= \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)$; es folgt daher der in Frage ſtehende Abſtand

Fig. 140.



$$CS = \frac{\frac{1}{4}\pi h^2 (2r - h)^2}{\frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h)^2}{3r - h}.$$

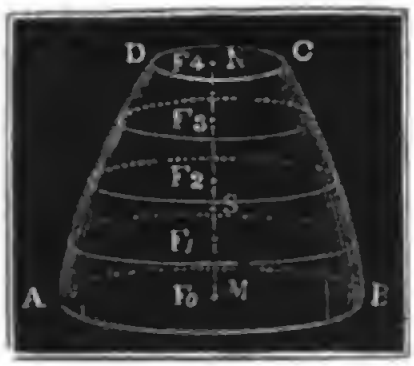
Setzt man wieder $h = r$, ſo geht das Segment in eine Halbkugel über, und es folgt wie oben, $CS = \frac{3}{8} r$.

Dieſe Formel gilt ſelbſt für das Segment eines Sphäroides A_1DB_1, welches entſteht, wenn ſich der elliptiſche Bogen DA_1 um die große Halbaxe $CD = r$ dreht; denn zerſchneidet man beide Segmente durch Ebenen parallel zur Baſis AB in lauter dünne Scheiben, ſo iſt das Verhältniß von je zwei derſelben unveränderlich $= \frac{\overline{MA_1}^2}{\overline{MA}^2} = \frac{\overline{CE_1}^2}{\overline{CE}^2} = \frac{b^2}{r^2}$, wenn b die kleine Halbaxe der Ellipſe bezeichnet. Man muß alſo ſowohl das Volumen, als auch das Moment des Kugelſegmentes durch $\frac{b^2}{r^2}$ multipliciren, um

das Volumen und das Moment des Segmentes vom Sphäroid zu erhalten, und verändert dadurch den Quotienten $CS = \frac{\text{Moment}}{\text{Volumen}}$ um Nichts. Schwerpunkte von Körpern.

§. 118. Um den Schwerpunkt eines ungesetzmäßigen Körpers $ABCD$, Fig. 141, zu finden, zerlege man denselben durch gleich viel von einander abstehende Ebenen in dünne Scheiben, bestimme die Inhalte der erhaltenen Durchschnitte und deren Momente in Hinsicht auf die als Basis dienende erste Parallelebenene AB, und vereinige endlich beide durch die Simpson'sche Regel.

Fig. 141.



Sind die Inhalte dieser Durchschnitte F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 und ist die ganze Höhe oder der Abstand zwischen den äußersten Parallelebenen $= h$. so ist das Volumen des Körpers nach der Simpson'schen Regel (annähernd)

$$V = (F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + F_4)\,\frac{h}{12}.$$

Multiplicirt man aber in dieser Formel jede dieser Flächen durch ihren Abstand von der Basis, so erhält man das Moment des Körpers, nämlich:

$$Vy = (0.F_0 + 1.4F_1 + 2.2F_2 + 3.4F_3 + 4F_4)\,\frac{h}{4}\cdot\frac{h}{12},$$

endlich giebt die Division beider Ausdrücke den gesuchten Abstand

$$MS = y = \frac{(0.F_0 + 1.4F_1 + 2.2F_2 + 3.4F_3 + 4.F_4)}{F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + F_4}\,\frac{h}{4}.$$

Ist die Zahl der plattenförmigen Elemente $= 6$, so hat man

$$y = \frac{0.F_0 + 1.4F_1 + 2.2F_2 + 3.4F_3 + 4.2F_4 + 5.4F_5 + 6.F_6}{F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + 2F_4 + 4F_5 + F_6}\cdot\frac{h}{6}.$$

Es ist leicht zu erachten, wie man diese Formel umzuändern hat, wenn die Zahl der Schnitte eine andere ist. Nur fordert diese Regel, daß die Zahl der abgeschnittenen Stücke eine gerade, die Flächenzahl also eine ungerade ist.

In den meisten Fällen der Anwendung genügt die Bestimmung eines Abstandes, weil außerdem noch eine Schwerlinie bekannt ist. Die in der Praxis gewöhnlich vorkommenden Körper sind auf der Drehbank erzeugte Rotationskörper, deren Rotationsaxe die Schwerlinie ist.

Endlich findet die Formel auch ihre Anwendung bei Bestimmung des

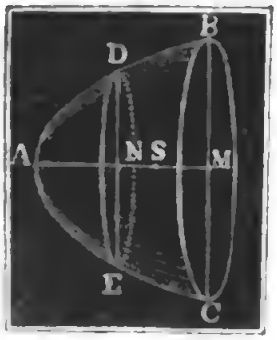
Digitized by Google

Schwerpunkte von Körpern.

Schwerpunktes einer Fläche, in welchem Falle die Durchſchnitte $F_0, F_1 F_2$, u. ſ. w. in Linien übergehen.

Beiſpiel 1. Für das paraboliſche Conoid ABC, Fig. 142, welches durch Umdrehung des Parabelſtückes ABM um ſeine Axe AM entſtanden iſt, erhält man, wenn man nur einen Schnitt DNE durchführt, Folgendes:

Fig. 142.

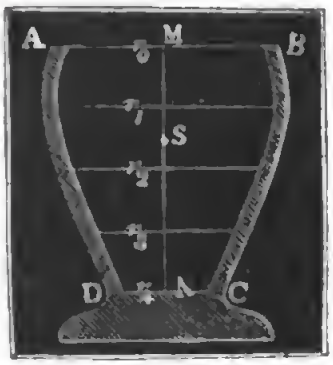


Es ſei die Höhe $AM=h$, der Halbmeſſer $BM=r$, $AN=NM=\frac{h}{2}$ und daher der Radius $DN=r\sqrt{\frac{1}{2}}$. Der Inhalt des Schnittes durch A iſt $F_0=0$, durch $N=F_1=\pi\overline{DN}^2=\frac{\pi r^2}{2}$ und durch $M=F_2=\pi r^2$. Hiernach iſt das Volumen dieſes Körpers:

$$V=\frac{h}{6}(0+4F_1+F_2)=\frac{h}{6}(2\pi r^2+\pi r^2)=\tfrac{1}{2}\pi r^2 h$$

$=\frac{1}{2}F_2 h$; dagegen das Moment $=\frac{h^2}{12}(1.2\pi r^2+2.\pi r^2)=\frac{1}{2}\pi r^2 h^2=\frac{1}{2}F_2 h^2$,

Fig. 143.



endlich der Abſtand des Schwerpunktes S vom Scheitel:

$$AS=\frac{\frac{1}{2}F_2 h^2}{\frac{1}{2}F_2 h}=\tfrac{2}{3}h.$$

Beiſpiel 2. Das Gefäß $ABCD$, Fig. 143, hat die mittleren halben Weiten $r_0=1$ Zoll, $r_1=1{,}1$ Zoll, $r_2=0{,}9$ Zoll, $r_3=0{,}7$ Zoll, $r_4=0{,}4$ Zoll bei einer Höhe $MN=2{,}5$ Zoll, man ſucht den Schwerpunkt S ſeines Faſſungsraumes. Die Querſchnitte ſind $F_0=1\,.\,\pi$, $F_1=1{,}21\,.\,\pi$, $F_2=0{,}81\,.\,\pi$, $F_3=0{,}49\,.\,\pi$, $F_4=0{,}16\,\pi$, es iſt daher der Abſtand des Schwerpunktes von der Horizontalebene AB:

$$MS=\frac{0.1\pi+1.4.1{,}21.\pi+2.2.0{,}81\pi+3.4.0{,}49\pi+4.0{,}16.\pi}{1\pi+4.1{,}21\pi+2.0{,}81\pi+4.0{,}49\pi+0{,}16\pi}\cdot\frac{2{,}5}{4}$$

$$=\frac{14{,}60}{9{,}58}\cdot\frac{2{,}5}{4}=\frac{36{,}50}{38{,}32}=0{,}9502\text{ Zoll.}$$

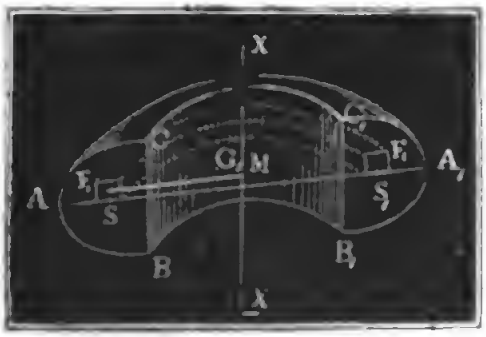
Der Faſſungsraum iſt $V=9{,}58\,\pi\,.\,\frac{2{,}5}{12}=6{,}270$ Cub.-Zoll.

§. 119. Eine intereſſante und zuweilen ſehr nützliche Anwendung der Lehre vom Schwerpunkte iſt die Guldiniſche Regel oder die baryzentriſche Methode (franz. méthode centrobarique, engl. the properties of Guldinus). Dieſer zufolge iſt der Inhalt eines Rotationskörpers (oder einer Rotationsfläche) gleich dem Producte aus der Erzeugungsfläche (oder Erzeugungslinie) und dem bei der Erzeugung des Rotationskörpers (oder der Rotationsfläche) durchlaufenen Wege ihres Schwerpunktes. Die Richtigkeit dieſes Satzes läßt ſich auf folgende Weiſe darthun.

Guldinische Regel.

Dreht ſich die ebene Fläche ABC, Fig. 144, um eine Axe $X\overline{X}$, ſo beſchreibt jedes Element F_1, F_2 u. ſ. w. derſelben einen Ring; ſind die Entfernungen F_1G_1, F_2G_2 u. ſ. w. dieſer Elemente von der Umdrehungsaxe $X\overline{X}_1 = r_1, r_2$ u. ſ. w. und iſt der Umdrehungswinkel $AMA_1 = \alpha^0$, alſo der entſprechende Bogen für den Halbmeſſer 1, $= \alpha$, ſo ſind die bogenförmigen Wege der Elemente $= r_1\alpha$, $r_2\alpha$ u. ſ. w. Die von den Elementen F_1, F_2 u. ſ. w. durchlaufenen Räume laſſen ſich als krummgebogene Prismen von den Grundflächen F_1, F_2 u. ſ. w. und von den Höhen $r_1\alpha$, $r_2\alpha$ u. ſ. w. anſehen, haben alſo die Inhalte: $F_1r_1\alpha$, $F_2r_2\alpha$ u. ſ w., und es iſt ſonach das Volumen des ganzen Körpers $ABCB_1A_1C_1$:

Fig. 144.

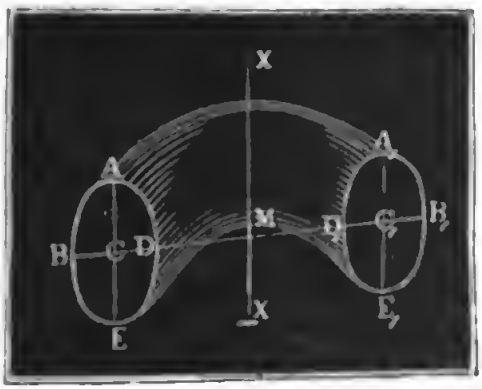


$V = F_1r_1\alpha + F_2r_2\alpha \ldots = (F_1r_1 + F_2r_2 + \ldots) \cdot \alpha$. Iſt $MS = x$ der Abſtand des Schwerpunktes S der Erzeugungsfläche von der Umdrehungsaxe, ſo hat man auch $(F_1 + F_2 + \ldots)\, x = F_1r_1 + F_2r_2 + \ldots$, es iſt folglich auch das Volumen des ganzen Körpers:

$V = (F_1 + F_2 + \ldots)\, x\alpha$. Aber $F_1 + F_2 + \ldots$ iſt der Inhalt der ganzen Fläche F und $x\alpha$ iſt der vom Schwerpunkte S durchlaufene Kreisbogen $w = SS_1$: es iſt daher $V = Fw$, wie oben behauptet wurde. Dieſe Formel gilt auch für die Rotation einer Linie, weil ſich dieſelbe als eine Fläche von unendlich kleiner Breite anſehen läßt, es iſt nämlich $F = Lw$, d. h. die Rotationsfläche iſt ein Product aus der Erzeugungslinie (L) und dem Wege (w) ihres Schwerpunktes.

Beiſpiel. Bei einem halben Ringe mit elliptiſchem Querſchnitte $ABED$, Fig. 145, ſeien die Halbaren des Querſchnittes $CA = a$ und $CB = b$, und ſei die Entfernung CM des Mittelpunktes C dieſes Schnittes von der Axe $X\overline{X} = r$. Dann iſt die elliptiſche Erzeugungsfläche $F = nab$, und der Weg des Schwerpunktes (C) $w = nr$: daher das Volumen dieſes halben Ringes: $V = n^2abr$ und das des ganzen Ringes $= 2n^2abr$. Sind die Dimenſionen folgende: $a = 5$ Zoll, $b = 3$ Zoll, $r = 6$ Zoll, ſo iſt das Volumen eines Viertelringes $= \frac{1}{2}\, n^2 . 5 . 3 . 6 = 9{,}8696 . 5 . 9 = 444{,}132$ Cubikzoll.

Fig. 145



Beiſpiel 2. Für einen Ring mit halbkreisförmigem Querſchnitte ABD, Fig. 146 (ſ. ſ. S.), iſt, wenn $CA = CB = a$ den Halbmeſſer dieſes Querſchnittes und $MC = r$

Guldinſche Regel.

den des hohlen Raumes oder Halſes bezeichnet, das Volumen:

$$V = \frac{n a^2}{2} \cdot 2\pi \left(r + \frac{4a}{3\pi} \right) = n a^2 \left(\pi r + \tfrac{4}{3} a \right).$$

Beiſpiel 3. Es ſei die Oberfläche und der Inhalt der Kuppel ADB,

Fig. 146.

Fig. 147.

Fig. 147, eines Kloſtergewölbes zu finden, und zu dieſem Zwecke die halbe Weite $MA = MB = a$ und die Höhe $MD = h$ gegeben. Aus beiden Dimenſionen folgt der Halbmeſſer $CA = CD$ des Erzeugungskreiſes $= r = \frac{a^2+h^2}{2a}$, und der Centriwinkel $ACD = \alpha^0$, wenn man ſetzt $\sin.\alpha = \frac{h}{r}$. Der Schwerpunkt S eines Bogens $DAD_1 = 2AD$ iſt beſtimmt durch die Entfernung $CS = r. \frac{\text{Sehne } MD}{\text{Bogen } AD} = \frac{r \sin.\alpha}{\alpha}$, ferner $CM = r \cos.\alpha$, es iſt folglich der Abſtand MS des Schwerpunktes S von der Are $MD = \frac{r \sin.\alpha}{\alpha} - r \cos.\alpha = r \left(\frac{\sin.\alpha}{\alpha} - \cos.\alpha \right)$, und der Weg des Schwerpunktes bei Erzeugung der Fläche ADB $w = 2\pi r. \left(\frac{\sin.\alpha}{\alpha} - \cos.\alpha \right)$. Die Erzeugungslinie DAD_1 iſt $2r\alpha$, da es ſich aber nur um die Beſtimmung der Hälfte ADB handelt, ſo iſt dieſelbe $= r\alpha$, und folglich die ganze Oberfläche

$$O = r\alpha . 2\pi r \left(\frac{\sin.\alpha}{\alpha} - \cos.\alpha \right) = 2\pi r^2 (\sin.\alpha - \alpha \cos.\alpha) \text{ zu ſetzen.}$$

Sehr gewöhnlich iſt $\alpha^0 = 60^0$, alſo $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\sin.\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, und $\cos.\alpha = \frac{1}{2}$, daher folgt dann $O = \pi r^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) = 2{,}1515 . r^2$.

Für das Segment $DAD_1 = A = r^2 (\alpha - \frac{1}{2} \sin.2\alpha)$ iſt der Abſtand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte C, $= \frac{(2.MD)^3}{12A} = \frac{2}{3} . \frac{r^3 \sin.\alpha^3}{A}$, daher Abſtand von der Are $MS = CS - CM = \frac{2}{3} \frac{r^3 \sin.\alpha^3}{A} - r \cos.\alpha$, endlich der Weg dieſes Schwerpunktes bei einer Umdrehung, $w = \frac{2\pi r}{A} (\frac{2}{3} r^2 \sin.\alpha^3 - A \cos.\alpha)$

$= \frac{2\pi r^3}{A}(\frac{2}{3}\sin.\alpha^3 - [\alpha - \frac{1}{2}\sin.2\alpha]\cos.\alpha)$. Das Volumen des ganzen durch das Segment DAD_1 erzeugten Körpers ergiebt sich, wenn man diesen Weg durch A multiplicirt und das Volumen der Kuppel wird gefunden, wenn man hiervon die Hälfte nimmt, also $V = \pi r^3(\frac{2}{3}\sin.\alpha^3 - [\alpha - \frac{1}{2}\sin.2\alpha]\cos.\alpha)$. Z. B. für $\alpha^0 = 60°$, also $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ist $\sin.\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\cos.\alpha = \frac{1}{2}$, daher Guldinische Regel.

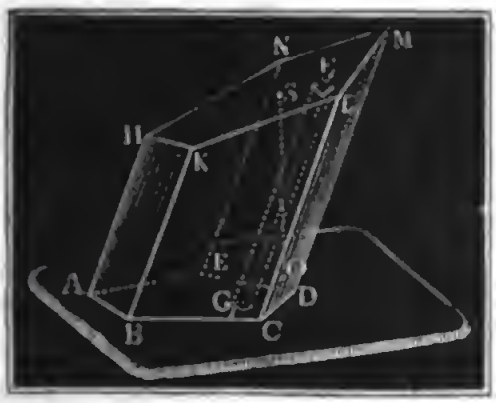
$$V = \pi r^3\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}3956.r^3.$$

Anmerkung. Die Guldinische Regel findet auch ihre Anwendung auf solche Körper, welche entstehen, wenn sich die Erzeugungsfläche so bewegt, daß sie an jeder Stelle rechtwinkelig auf dem Wege ihres Schwerpunktes steht, weil sich annehmen läßt, daß jeder kleine Theil irgend einer krummlinigen Bewegung kreisförmig ist. Man kann hiernach die Inhalte von Schraubengewinden, auch zuweilen die zum Zwecke für Kanäle, Straßen und Eisenbahnen ausgehobenen oder aufgetragenen Erdmassen u. s. w. berechnen.

§. 120. Eine andere, mit der letzten Regel in naher Verbindung stehende Anwendung der Lehre vom Schwerpunkte ist folgende.

Man kann annehmen, daß jeder schief abgeschnittene, übrigens prismatische Körper $ABCHKL$ Fig. 148, aus lauter unendlich dünnen Prismen wie F_1G_1 bestehe. Sind nun G_1, G_2 u. s. w. die Grundflächen und h_1, h_2 u. s. w. die Höhen dieser prismatischen Elemente, so hat man ihre Inhalte G_1h_1, G_2h_2 u. s. w., und sonach das Volumen des ganzen schief abgeschnittenen Prisma's

Fig. 148



$$V = G_1h_1 + G_2h_2 + \ldots$$

Nun verhält sich aber ein Element F_1 des schiefen Schnittes HKL zum Elemente G_1 der Basis ABC, wie die ganze schiefe Fläche F zur Basis G; es ist daher $G_1 = \frac{G}{F}F_1$, $G_2 = \frac{G}{F}F_2$ u. s. w., und $V = \frac{G}{F}(F_1h_1 + F_2h_2 + \ldots)$.

Da endlich $F_1h_1 + F_2h_2 + \ldots$ das statische Moment Fh des ganzen schiefen Schnittes ist, so folgt

$$V = \frac{G}{F}.Fh = Gh, \text{ d. i.}$$

der Inhalt des schief abgeschnittenen Prisma's ist gleich dem Inhalte eines vollständigen Prisma's, das mit demselben auf einerlei Grundfläche steht und dessen Höhe gleich ist dem Abstande SO des Schwerpunktes S des schiefen Schnittes von der Basis.

Guldiniſche Regel.

Bei einem geraden und ſchief abgeſchnittenen dreiſeitigen Prisma iſt, wenn h_1, h_2 und h_3 die Seitenkanten deſſelben ſind, der Abſtand des Schwerpunktes des ſchiefen Schnittes von der Baſis $h = \frac{h_1+h_2+h_3}{3}$, daher das Volumen dieſes Prisma's $V = G\,\frac{(h_1+h_2+h_3)}{3}$.

Drittes Kapitel.

Gleichgewicht feſtgehaltener und unterſtützter Körper.

Befeſtigungsarten.

§. 121. Die im erſten Kapitel dieſes Abſchnittes entwickelten Regeln über das Gleichgewicht feſter Kräfteſyſteme finden ihre Anwendung auch auf feſte, von Kräften ergriffene Körper, wenn man das Gewicht des Körpers als eine im Schwerpunkte deſſelben angreifende und vertikal abwärts wirkende Kraft behandelt.

Die durch Kräfte im Gleichgewichte erhaltenen Körper ſind entweder frei beweglich, d. h. ſie können der Einwirkung der Kräfte folgen, oder ſie ſind in einem oder mehreren Punkten feſtgehalten, oder ſie werden von anderen Körpern unterſtützt.

Wird ein Punkt eines feſten Körpers feſtgehalten, ſo kann jeder andere Punkt eine Bewegung annehmen, deren Weg in die Oberfläche einer Kugel fällt, die ſich aus dem feſtgehaltenen Punkte mit der Entfernung des andern Punktes, als Halbmeſſer, beſchreiben läßt. Hält man hingegen einen Körper in zwei Punkten feſt, ſo ſind bei jeder noch möglichen Bewegung die Wege von den übrigen Punkten Kreiſe, die ſich als die Durchſchnitte von je zweien, aus den feſtgehaltenen Punkten beſchriebenen Kugeloberflächen herausſtellen. Dieſe Kreiſe ſind unter ſich parallel und winkelrecht auf der geraden Linie, welche die feſten Punkte mit einander verbindet. Die Punkte dieſer Linie bleiben unbeweglich; es dreht ſich alſo der Körper um dieſe Linie, die man deshalb auch Umdrehungsaxe nennt.

Man findet den Halbmeſſer des Kreiſes, in welchem ſich jeder Punkt bewegt, wenn man von demſelben ein Perpendikel gegen die Umdrehungsaxe fällt. Je größer dieſes ausfällt, je größer iſt alſo auch der Kreis, in welchem der Punkt um die Axe herumgeht.

Werden von einem Körper drei nicht in eine gerade Linie fallende

Punkte festgehalten, so kann der Körper in keiner Beziehung eine Bewegung annehmen, weil sich die drei Kugeloberflächen, in welchen sich ein vierter Punkt bewegen müßte, nur in einem Punkte schneiden.

Gleichgewichtsarten.

§. 122. Soll ein in einem Punkte festgehaltener Körper durch eine oder durch die Mittelkraft mehrerer Kräfte im Gleichgewichte erhalten werden, so muß die Richtung dieser Kraft durch den festen Punkt selbst gehen, denn man hält einen Punkt fest, indem man jede durch ihn gerichtete Kraft aufhebt. Besteht diese Kraft nur in dem Gewichte des Körpers, so ist nöthig, daß der Schwerpunkt desselben in die vertikale Linie durch den festen Punkt falle. Fällt der Schwerpunkt mit dem festgehaltenen oder sogenannten Aufhängepunkte zusammen, so hat man ein indifferentes Gleichgewicht (franz. équilibre indifferent, engl. indifferent equilibrium), weil der Körper im Gleichgewichte bleibt, man mag ihn um den festen Punkt drehen wie man will. Wird ein Körper AB, Fig. 149, in einem über dem Schwerpunkte S liegenden Punkte C festgehalten oder unterstützt, so befindet sich der Körper in einem sichern oder stabilen Gleichgewichte (franz. u. engl. stable), weil, wenn man diesen Körper in eine andere Lage bringt, aus dem Gewichte G desselben eine Seitenkraft N hervorgeht, die den Körper in die erste Lage zurück-

Fig. 149.

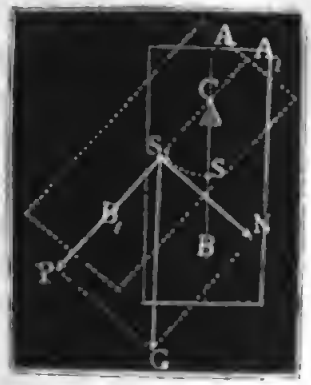
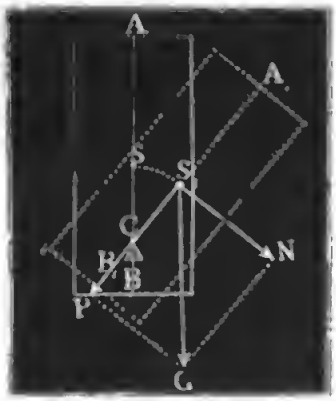


Fig. 150.



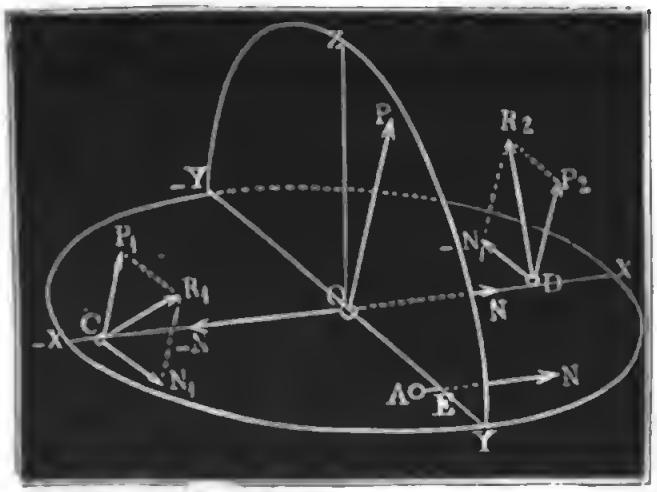
führt, während die andere Seitenkraft P der feste Punkt C aufnimmt. Wird hingegen der Körper AB, Fig. 150, in einem Punkte C festgehalten, der unter dem Schwerpunkte S liegt, so ist der Körper in einem unsicheren oder labilen Gleichgewichte (franz. eq. instable, engl. unstable), denn wenn man den Schwerpunkt von der Vertikalen durch C entfernt, so geht aus dem Gewichte G des Körpers eine Seitenkraft N hervor, die den Körper in seine erste Lage nicht nur nicht zurückführt, sondern denselben davon noch mehr abzieht, und ihn so weit umdreht, bis der Schwerpunkt unter den festen Punkt zu liegen kommt.

Dieselben Beziehungen finden auch bei einem in zwei Punkten oder

einer Axe feſtgehaltenen Körper ſtatt; derſelbe iſt im indifferenten, ſtabilen oder labilen Gleichgewichte, je nachdem der Schwerpunkt in, vertikal unter oder vertikal über der Axe befindlich iſt.

Axendruck. §. 123. Wird ein von Kräften im Raume ergriffener Körper in zwei Punkten oder einer Linie feſtgehalten, ſo treten Verhältniſſe ein, die wir im Folgenden unterſuchen wollen. Wir können nach §. 92 jedes Kräfteſyſtem auf zwei Kräfte zurückführen, nämlich auf eine parallel mit der feſten Axe gerichtete und auf eine in einer Normalebene zu dieſer Linie wirkende Kraft. Es ſei $AN = N$, Fig. 151, die erſtere, mit der durch die feſten Punkte C und D gehende Axe $X\overline{X}$ parallel und $OP = P$ die zweite, in der zur Axe $X\overline{X}$ winkelrecht ſtehenden Ebene $YZ\overline{Y}$ wirkende Kraft.

Fig. 151.



Denken wir uns noch zwei Kräfte N und $-N$ hinzu, welche in der Axe $X\overline{X}$ eingreifen und einander entgegenwirken, ſo ändern wir im Gleichgewichtszuſtand nichts, da ſich dieſe Kräfte ſelbſt wieder aufheben. Die Kraft $-N$ bildet mit der außerhalb der Axe $X\overline{X}$ eingreifenden Kraft ein Kräftepaar, das durch ein anderes Kräftepaar $(N_1, -N_1)$ erſetzt werden kann, deſſen Angriffspunkte mit den feſten Punkten C und D der Axe zuſammenfallen und deſſen Richtungen rechtwinkelig auf der Axe $X\overline{X}$ ſtehen. Es läßt ſich folglich die außerhalb der Axe angreifende Kraft $AN = N$ in eine gleichgroße Kraft N und in ein Kräftepaar $(N_1, -N_1)$ zerlegen, und, da alle dieſe drei Kräfte in der Axe $X\overline{X}$ ſelbſt angreifen, annehmen, daß dieſelben auch von dieſer Axe aufgenommen werden, und daher im Gleichgewichts- oder Bewegungszuſtand des Körpers nichts ändern. Iſt der Normalabſtand EO zwiſchen der Kraft N und der Axe $XX = y$, und die Entfernung CD der feſten Punkte $= x$, ſo hat man die Momente beider Kräftepaare (§. 90) $= Ny$ und $N_1 x$, und es ſind dieſelben unter ſich äquivalent, wenn $Ny = N_1 x$ iſt. Es ſind daher die in C und D angreifenden Kräfte

$$N_1 = \frac{y}{x} N \text{ und } -N_1 = -\frac{y}{x} N.$$

Soll nun der Körper im Gleichgewichtszuſtande ſein, ſo iſt nöthig, daß

auch die Richtung der in einer Normalebene YZ wirkenden Mittelkraft P Aremdruck (in O) durch die Axe gehe. Diese Kraft P läßt sich aber durch zwei in C und D angreifende Parallelkräfte P_1 und P_2 ersetzen, die sich bestimmen, wenn man $P_1 . CD = P . DO$ und $P_2 . CD = P . CO$ setzt; es hat daher außer den Kräften $O\overline{N} = N$, $CN_1 = N_1$ und $DN_1 = -N_1$, die Axe $X\overline{X}$ auch noch die Kräfte $P_1 = \frac{x_2}{x} . P$ und $P_2 = \frac{x_1}{x} . P$ aufzunehmen, die sich aus den Entfernungen $CD = x$, $OC = x_1$ und $OD = x_2$ berechnen lassen.

§. 124. Aus den Ergebnissen der Untersuchungen des vorigen Paragraphen kann man nun leicht die von der Axe oder von den festen Punkten C und D aufzunehmenden Kräfte berechnen. Erstens hat die Axe einen der Kraft N gleichen Druck in ihrer eigenen Richtung auszuhalten, der allerdings auch von einem oder auch von beiden festen Punkten C und D aufgenommen werden kann. Zweitens resultiren aus den in Normalebenen zu $X\overline{X}$ wirkenden und in C und D angreifenden Kräften $N_1 = \frac{y}{x} N$, $P_1 = \frac{x_2}{x} P$ und $-N_1 = -\frac{y}{x} N$ und $P_2 = \frac{x_1}{x} P$ Mittelkräfte R_1 und R_2, welche von den festen Punkten C und D noch besonders aufgenommen werden müssen.

Setzen wir den Winkel POY, unter welchem die die Axe $X\overline{X}$ und die Richtung der Kraft N enthaltende Grundebene XY von der Richtung der Kraft P geschnitten wird, $= \alpha$, so ist auch der Winkel $N_1CP_1 = \alpha$, dagegen $-N_1DP_2 = 180^0 - \alpha$, und es ergeben sich daher die resultirenden Drücke

$$R_1 = \sqrt{N_1^2 + P_1^2 + 2N_1P_1 \cos.\alpha} \text{ und}$$
$$R_2 = \sqrt{N_1^2 + P_2^2 - 2N_1P_2 \cos.\alpha.}$$

Beispiel. Es sei das ganze Kräftesystem eines in der Axe $X\overline{X}$ festgehaltenen Körpers auf die Normalkraft $P = 36$ Pf und auf die Parallelkraft $N = 20$ Pf zurückgeführt, es sei der Abstand der letzteren Kraft von der Axe, $y = 1\frac{1}{2}$ Fuß, und der Abstand CD zwischen den festgehaltenen Punkten $= x =$ 4 Fuß; man sucht die von der Axe oder von den festen Punkten in ihr aufzunehmenden Kräfte, vorausgesetzt, daß die Richtung der Kraft P um den Winkel $\alpha = 65$ Grad von der Grundebene XY abweiche und ihr Angriffspunkt O um $CO = x_1 = 1$ Fuß von dem festen Punkte C abstehe? Die Kraft $N = 20$ Pf. ertheilt der Axe in ihrer eigenen Richtung den Schub $N = 20$ Pf., außerdem erzeugt sie noch die Kräfte $N_1 = \frac{y}{x} N = \frac{1,5}{4} . 20 = 7,5$ Pf. und $-N_1 = -7,5$ Pf., welche die festen Punkte C und D aufnehmen. Aus der Kraft P entspringen die Kräfte $P_1 = \frac{x_2}{x} P = \frac{4-1}{4} . 36 = 27$ Pf. und $P_2 = \frac{x_1}{x} P = \frac{1}{4} . 36 = 9$ Pf., aus welchen endlich durch Vereinigung die Mittelkräfte

Armdruck

$$R_1 = \sqrt{7{,}5^2+27^2+2.7.5.27.\cos.65^\circ} = \sqrt{56{,}25+729+171{,}160}$$
$$= \sqrt{956{,}410} = 30{,}926 \text{ Pf. und}$$
$$R_2 = \sqrt{7{,}5^2+9^2-2.7{,}5.9.\cos.65^\circ} = \sqrt{56{,}25+81-57{,}054}$$
$$= \sqrt{80{,}196} = 8\,955 \text{ Pf. entſtehen.}$$

Gleichgewicht von Kräften um eine Axe.

§. 125. Die Mittelkraft P reſultirt aus allen denjenigen Seitenkräften, deren Richtungen in einer oder mehreren Normalebenen zur Axe liegen. Nun iſt aber in dieſem Falle nach §. 86 das ſtatiſche Moment Pa der Mittelkraft gleich der Summe $P_1a_1 + P_2a_2 + \ldots$ der ſtatiſchen Momente der Seitenkräfte und für den Gleichgewichtszuſtand des feſtgehaltenen Körpers der Hebelarm a der Mittelkraft = Null, weil dieſe durch die Axe ſelbſt geht; es iſt daher auch die Summe

$$P_1a_1 + P_2a_2 + \ldots = o,$$

d. h. ein in einer Axe feſtgehaltener Körper iſt im Zuſtande des Gleichgewichtes, bleibt alſo ohne Umdrehung, wenn die Summe der ſtatiſchen Momente ſeiner Kräfte hinſichtlich dieſer Axe = Null, oder die Summe der Momente der nach der einen Umdrehungsrichtung wirkenden Kräfte ebenſo groß iſt als die Summe der Momente von den nach der entgegengeſetzten Richtung wirkenden Kräften.

Mit Hülfe der letzen Formel läßt ſich ein Element des im Gleichgewicht befindlichen Kräfteſyſtemes, entweder eine Kraft, oder ein Hebelarm finden.

Beiſpiel. An einem um eine Axe drehbaren Körper wirken die Umdrehungskräfte $P_1 = 50$ Pf. und $P_2 = -35$ Pfund an den Armen $a_1 = 1\frac{1}{4}$ Fuß und $a_2 = 2\frac{1}{2}$ Fuß; man ſucht die Kraft P_3, welche an einem Hebelarme $a_3 = 4$ Fuß wirken ſoll, um Gleichgewicht herzuſtellen, d. i. Umdrehung um die Axe zu verhindern? Es iſt

$$50.1{,}25-35.2{,}5+4P_3 = 0, \text{ daher}$$
$$P_3 = \frac{87{,}5-62{,}5}{4} = 6{,}25 \text{ Pf.}$$

Hebel.

§. 126. Ein um eine feſte Axe drehbarer und von Kräften ergriffener Körper hat den Namen Hebel (franz. levier, engl. lever) erhalten. Denkt man ſich denſelben gewichtslos, ſo heißt er ein mathematiſcher Hebel, außerdem aber ein materieller oder phyſiſcher.

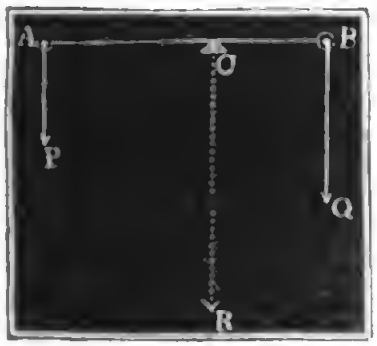
In der Regel nimmt man an, daß die Kräfte eines Hebels in einer winkelrecht zur Axe ſtehenden Ebene wirken, und erſetzt die Axe durch einen feſten Punkt, den man den Ruhe-, Dreh- oder Stützpunkt (fr. point d'appui, engl. fulcrum, hypomochlion) nennt. Die von dieſem Punkte nach den Richtungen der Kräfte gefällten Perpendikel heißen (§. 86) Hebelarme. Sind die Richtungen der Kräfte eines Hebels unter ſich

parallel, so bilden die Hebelarme eine einzige gerade Linie, und der Hebel heißt dann ein geradliniger oder gerader Hebel (franz. levier droit, engl. straight lever), stoßen aber die Hebelarme unter Winkeln zusammen, so heißt der Hebel ein Winkelhebel (franz. levier courbé, engl. bent lever). Der geradlinige von nur zwei Kräften ergriffene Hebel ist entweder einarmig oder doppelarmig, je nachdem die Angriffspunkte auf einerlei oder auf entgegengesetzten Seiten des Stützpunktes liegen. Man unterscheidet auch wohl Hebel der ersten, zweiten und dritten Art von einander, indem man den doppelarmigen Hebel, Hebel der ersten Art, den einarmigen Hebel aber entweder Hebel der zweiten oder Hebel der dritten Art nennt, je nachdem die vertikal abwärts wirkende Kraft (Last), oder die vertikal aufwärts wirkende Kraft (Kraft) dem Stützpunkte näher liegt. Hebel.

§. 127. Die Theorie des Gleichgewichtes am Hebel ist in dem Vorhergehenden vollständig begründet, wir haben daher nur noch ein Specialisiren derselben nöthig.

Bei dem doppelarmigen Hebel ACB, Fig. 152 ist, wenn man den Hebelarm CA der Kraft P durch a und den Hebelarm CB der andern Kraft Q, die man gewöhnlich Last nennt, mit b bezeichnet, nach der allgemeinen Theorie: $Pa = Qb$, d. i. Moment der Kraft gleich Moment der Last, oder auch $P : Q = b : a$, d. i. die Kraft verhält sich zur Last, wie der Hebelarm der letzteren zu dem Hebelarme der ersteren. Der Druck im Stützpunkte ist $R = P + Q$.

Fig. 152.



Bei den einarmigen Hebeln ABC, Fig. 153, und BAC, Fig. 154,

Fig. 153.

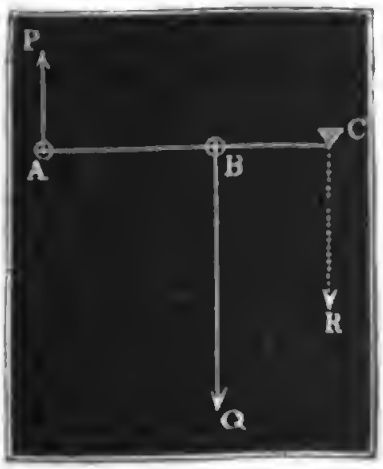
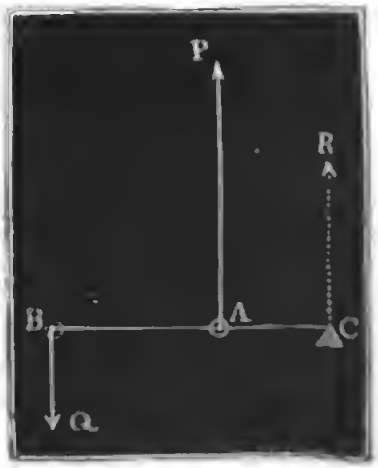


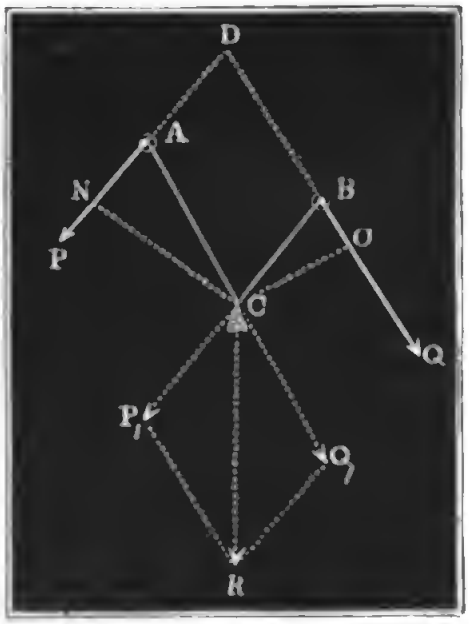
Fig. 154.



Hebel. findet dieſelbe Beziehung zwiſchen Kraft (P) und Laſt (Q) ſtatt, es iſt hier aber die Kraft der Laſt entgegengeſetzt gerichtet, und deshalb der Druck im Stützpunkte die Differenz beider, und zwar im erſten Falle

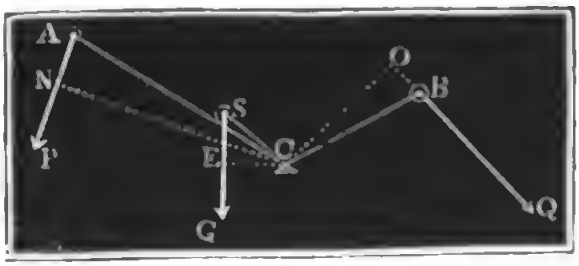
$$R = Q - P$$ und im zweiten $$R = P - Q.$$

Fig. 155.



Auch beim Winkelhebel ACB mit den Hebelarmen $CN = a$ und $CO = b$, Fig. 155, bleibt $P : Q = b : a$, nur iſt hier der Druck im Stützpunkte gleich der Diagonale R desjenigen Parallelogrammes CP_1RQ_1, welches ſich aus der Kraft P und Laſt Q und dem Winkel $P_1CQ_1 = PDQ = \alpha$, unter welchem die Richtungen derſelben zuſammenſtoßen, conſtruiren läßt.

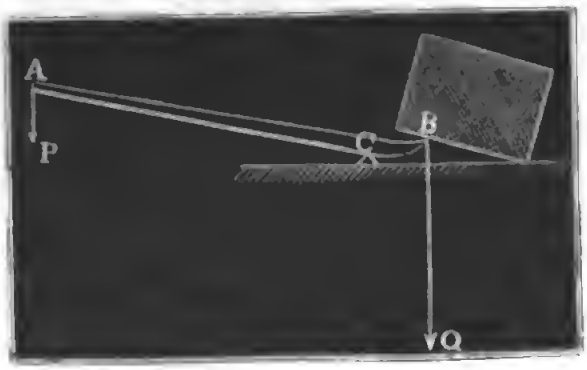
Fig. 156.



Iſt G das Gewicht des Hebels und $CE = e$, Fig. 156, der Abſtand des Drehpunktes C von der Vertikallinie SG durch den Schwerpunkt deſſelben, ſo hat man $Pa \pm Ge = Qb$ zu ſetzen und das Pluszeichen von G zu nehmen, wenn der Schwerpunkt auf der Seite der Kraft P liegt, das Minuszeichen aber, wenn er auf der Seite der Laſt Q ſich befindet.

Anmerkung. Die Theorie des Hebels findet bei vielen Werkzeugen und Maſchinen ihre Anwendung, namentlich bei den verſchiedenen Arten von Waagen, bei den Hebeladen, Pumpenſchwengeln, Schubkarren u. ſ. w. Ausführlich darüber handelt der zweite Theil.

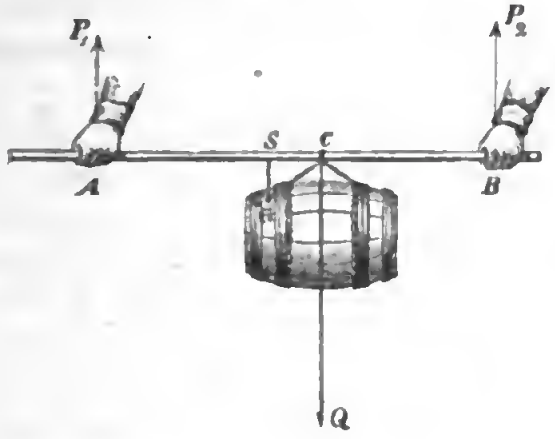
Fig. 157.



Beiſpiele. 1) Wenn man das Ende A einer Brechſtange ACB, Fig. 157, mit einer Kraft P von 60 Pf. niederdrückt, und es iſt der Hebelarm CA der Kraft 12mal ſo groß als der Hebelarm CB der Laſt, ſo wird dieſe, oder

vielmehr die in B ausgeübte Kraft Q. 12 mal so groß als P, also $Q = 12 \cdot 60$ Hebel.
$= 720$ Pf. betragen.

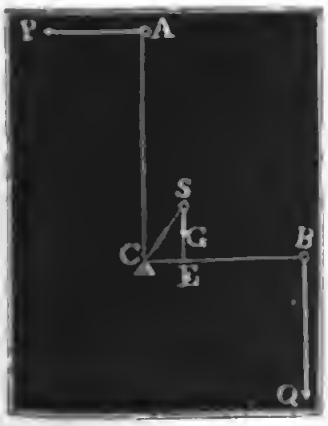
Fig. 158.



2) **Wird eine an einer Stange** hängende Last Q, Fig. 158, von zwei Arbeitern fortgetragen, von denen der eine in A und der andere in B angreift, so kann man ermitteln, wie viel Druck jeder der beiden Arbeiter auszuhalten hat. Es sei die Last $Q = 120$ Pf., das Gewicht der Stange $G = 12$ Pf., die Entfernung AB der beiden Angriffspunkte von einander $= 6$ Fuß, die Entfernung BC der Last von einem dieser Punkte $= 2\frac{1}{2}$ Fuß, die Entfernung des Schwerpunktes S der Stange von eben diesem Punkte, $BS = 3\frac{1}{2}$ Fuß. Sehen wir B als Stützpunkt an, so hat die Kraft P_1 in A den Lasten Q und G das Gleichgewicht zu halten; es ist also $P_1 \cdot BA = Q \cdot BC + G \cdot BS$, d. i. $6 P_1 = 2{,}5 \cdot 120 + 3{,}5 \cdot 12$ $= 300 + 42 = 342$, daher $P_1 = \frac{342}{6} = 57$ Pf. Wird hingegen A als Stützpunkt angesehen, so ist zu setzen: $P_2 \cdot AB = Q \cdot AC + G \cdot AS$, also in Zahlen, $6 P_2 = 3{,}5 \cdot 120 + 2{,}5 \cdot 12 = 420 + 30 = 450$, daher ist die Kraft des zweiten Arbeiters $P_2 = \frac{450}{6} = 75$ Pf.; auch ist, sehr richtig, die Summe der nach oben wirkenden Kräfte $P_1 + P_2 = 57 + 75 = 132$ Pf. so groß wie die Summe der nach unten wirkenden Kräfte $Q + G = 120 + 12 = 132$ Pf.

3) Bei einem 150 Pf. schweren Winkelhebel ACB, Fig. 159, ist die vertikal ziehende Last $Q = 650$ Pf. und ihr Hebelarm $CB = 4$ Fuß, der Hebelarm CA der Kraft P aber $= 6$ Fuß und der Hebelarm CE des Gewichtes $= 1$ Fuß. wie groß ist die zur Herstellung des Gleichgewichtes nöthige Kraft P und der Druck R im Zapfen? Es ist $CA \cdot P = CB \cdot Q + CE \cdot G$, d. i. $6 P = 4 \cdot 650 + 1 \cdot 150 = 2750$, folglich die Kraft $P = \frac{2750}{6} = 458\frac{1}{3}$ Pf.; der Zapfendruck aber besteht aus der Vertikalkraft $Q + G = 650 + 150 = 800$ Pf., und der Horizontalgewalt $P = 458\frac{1}{3}$ Pf., ist also

Fig. 159.



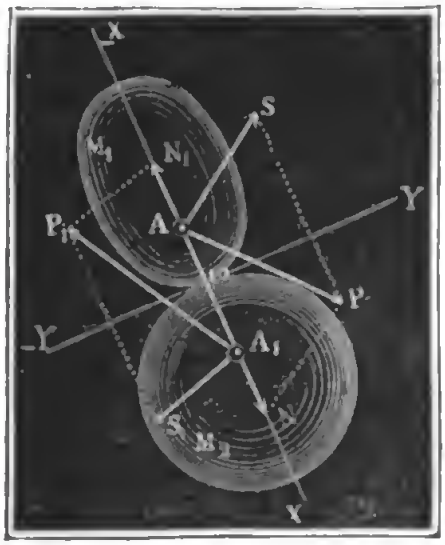
$$= R = \sqrt{(Q+G)^2 + P^2}$$
$$= \sqrt{(800)^2 + (458\frac{1}{3})^2}$$
$$= \sqrt{850070} = 922 \text{ Pf.}$$

§. 128. Das in §. 62 ausgesprochene Erfahrungsgesetz: »Wirkung und Gegenwirkung sind einander gleich,« ist die Basis der Druck der Körper auf einander.

Druck der Körper auf einander.

ganzen Maſchinenmechanik Es iſt an dieſem Orte nöthig, die Bedeutung deſſelben noch näher aus einander zu ſetzen. Wirken zwei Körper M_1 und M_2, Fig. 160, mit den Kräften P und P_1 auf einander, deren Richtungen von der gemeinſchaftlichen Normale $X\overline{X}$ zu den in Berührung befindlichen Oberflächentheilen beider Körper abweichen, ſo tritt ſtets eine Zerlegung der Kräfte ein; es geht nur diejenige Seitenkraft N oder N_1 von einem Körper auf den andern über, welche die Richtung der Normale hat, die andere Seitenkraft S oder S_1 hingegen bleibt im Körper zurück und muß durch eine andere Kraft oder ein anderes Hinderniß aufgenommen werden, um die Körper im Gleichgewichte zu erhalten. Zwiſchen den normalen Seitenkräften N und N_1 aber findet, dem angeführten Principe zufolge, vollkommene Gleichheit Statt.

Fig 160.



Weicht die Richtung der Kraft P um den Winkel $NAP = \alpha$ von der Normale AX und um den Winkel $SAP = \beta$ von der Richtung der zweiten Seitenkraft S ab, ſo hat man (§. 75)

$$N = \frac{P \sin.\beta}{\sin.(\alpha+\beta)}, \quad S = \frac{P \sin.\alpha}{\sin.(\alpha+\beta)}.$$

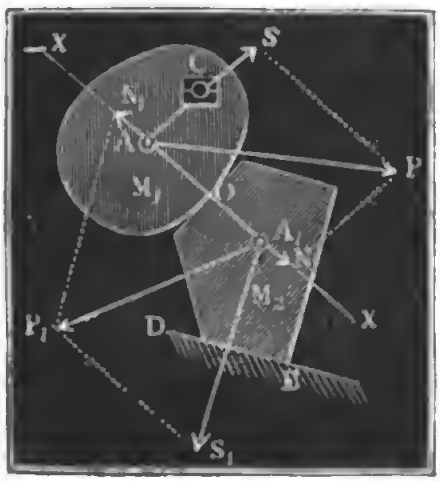
Bezeichnet man ebenſo $N_1A_1P_1$ durch α_1 und $S_1A_1P_1$ durch β_1, ſo hat man auch

$$N_1 = \frac{P_1 \sin.\beta_1}{\sin.(\alpha_1+\beta_1)} \text{ und } S_1 = \frac{P_1 \sin.\alpha_1}{\sin.(\alpha_1+\beta_1)};$$

endlich wegen der Gleichheit $N = N_1$,

$$\frac{P \sin.\beta}{\sin.(\alpha+\beta)} = \frac{P_1 \sin.\beta_1}{\sin.(\alpha_1+\beta_1)}.$$

Fig. 161.



Beiſpiel. Welche Kraftzerlegungen treten ein, wenn der durch ein Hinderniß DE aufgehaltene Körper M_2, Fig. 161, durch einen andern, um eine Axe C drehbaren Körper mit einer Kraft $P = 250$ Pf. gedrückt wird, die Richtungswinkel aber folgende ſind: $PAN = \alpha = 35°$, $PAS = \beta = 48°$, $P_1A_1N_1 = \alpha_1 = 65°$, $P_1A_1S_1 = \beta_1 = 50°$. Aus der erſten Formel beſtimmt ſich der Normaldruck zwiſchen beiden Körpern:

$$N = N_1 = \frac{P \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{250 \sin. 48^\circ}{\sin. 83^\circ} = 187{,}18 \text{ Pf.};$$

Druck der Körper auf einander.

aus der zweiten folgt der Druck gegen die Axe oder den Zapfen C:

$$S = \frac{P \sin \alpha}{\sin.(\alpha+\beta)} = \frac{250 \sin. 35^\circ}{\sin. 83^\circ} = 144{,}47 \text{ Pf.};$$

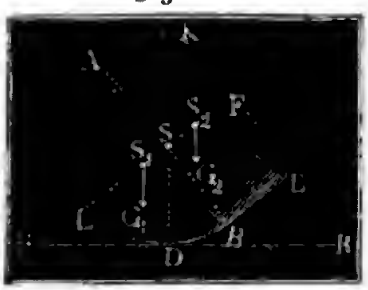
aus der Verbindung der dritten und vierten Gleichung folgt endlich der Seitendruck gegen das Hinderniß DE:

$$S_1 = \frac{N_1 \sin \alpha_1}{\sin. \beta_1} = \frac{187.18 \sin. 65^\circ}{\sin. 50^\circ} = 221{,}46 \text{ Pf.}$$

Stabilität.

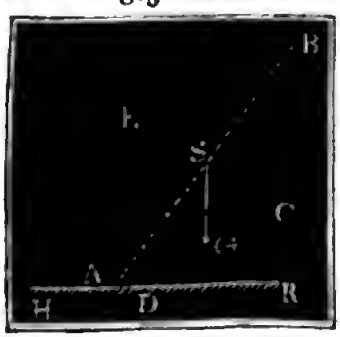
§. 129. Wenn ein sich auf eine Horizontalebene stützender Körper außer der Schwerkraft von keiner andern Kraft getrieben wird, so besitzt derselbe kein Bestreben zur fortschreitenden Bewegung, weil das vertikal abwärts wirkende Gewicht von dieser Ebene vollständig aufgenommen wird; wohl aber ist eine Drehung des Körpers möglich. Ruht der Körper $ADBF$, Fig. 162, mit einem Punkte D auf der Horizontalebene HR, so bleibt derselbe in Ruhe, wenn sein Schwerpunkt S unterstützt ist, d. h. in der durch den Stützpunkt D gehenden Vertikallinie liegt. Stützt sich aber ein Körper in zwei Punkten gegen die horizontale Oberfläche eines anderen, so erfordert das Gleichgewicht desselben, daß die vertikale Schwerlinie die die beiden Stützpunkte verbindende Gerade durchschneide. Ruht endlich ein Körper in drei oder mehreren Punkten auf einer Horizontalebene, so besteht Gleichgewicht, wenn die den Schwerpunkt enthaltende Vertikallinie durch das Dreieck oder Polygon hindurchgeht, welches entsteht, wenn man die Stützpunkte durch gerade Linien mit einander verbindet.

Fig. 162.



Uebrigens sind auch bei den unterstützten Körpern stabiles und labiles Gleichgewicht von einander zu unterscheiden. Das Gewicht G eines Körpers AB, Fig. 163, zieht den Schwerpunkt S desselben abwärts; stellt sich nun dieser Kraft kein Hinderniß entgegen, so bringt sie in dem Körper eine Drehung hervor, die so weit fortgeht, bis der Schwerpunkt seinen tiefsten Ort einnimmt und der Körper in's Gleichgewicht kommt. Es läßt sich aber behaupten, daß das Gleichgewicht stabil ist, wenn der Schwerpunkt die möglich tiefste Lage (Fig. 164 s. f. S.), daß es nur labil ist, wenn er die höchste Lage ein-

Fig. 163.



Stabilität. nimmt (Fig. 165), und daß es endlich ein indifferentes Gleichgewicht iſt,

Fig. 164.

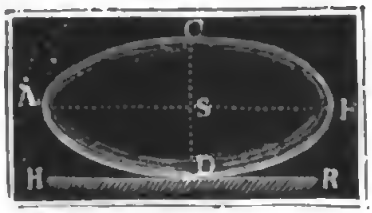


Fig. 165.

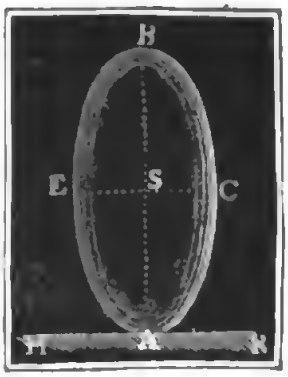
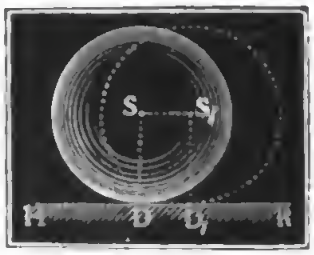


Fig. 166.



wenn der Schwerpunkt bei jeder Stellung des Körpers auf einerlei Höhe bleibt (Fig. 166).

Beiſpiele: 1) Der homogene, aus einer Halbkugel und einem Cylinder beſtehende Körper *ADBF*, Fig. 167, ruht auf einer Horizontalebene *HR*. Welche Höhe $SF = h$ muß der cylindriſche Theil deſſelben haben, damit dieſer Körper Gleichgewicht annehme? Der Halbmeſſer einer Kugel ſteht auf der entſprechenden Berührungsebene winkelrecht; nun iſt aber die Horizontalebene eine ſolche Ebene, folglich muß auch der Halbmeſſer *SD* auf der Horizontalebene rechtwinklig ſtehen und in ihm auch der Schwerpunkt des Körpers liegen. Die durch den Kugelmittelpunkt gehende Axe *FSL* des Körpers iſt eine zweite Schwerlinie deſſelben, es iſt daher der Mittelpunkt *S*, als Durchſchnitt beider Schwerlinien, Schwerpunkt des Körpers. Setzen wir nun den Kugel- und Cylinderhalbmeſſer $SA = SB = r$ und die Cylinderhöhe $SF = BE = h$, ſo haben wir für das Volumen der Halbkugel: $V_1 = \frac{2}{3}\pi r^3$, für das Volumen des Cylinders $V_2 = \pi r^2 h$, für den Abſtand des Kugelſchwerpunktes $S_1 : SS_1 = \frac{3}{8} r$ und für den des Cylinderſchwerpunktes $S_2 : SS_2 = \frac{1}{2} h$. Damit nun der Schwerpunkt des ganzen Körpers nach *S* falle, iſt das Moment $\frac{2}{3}\pi r^3 . \frac{3}{8} r$ der Halbkugel gleichzuſetzen dem Momente $\pi r^2 h . \frac{1}{2} h$ des Cylinders; hieraus aber ergiebt ſich $h^2 = \frac{1}{2} r^2$, d. i. $h = r\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}7071 . r$.

Fig. 167.

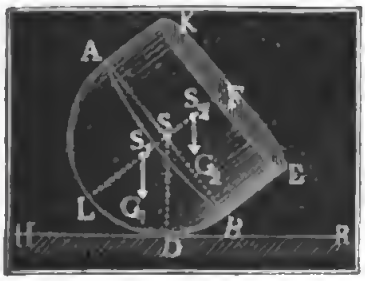
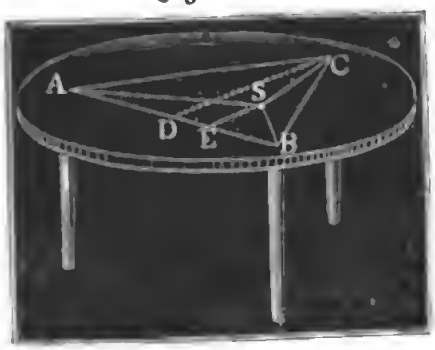


Fig. 168.



2) Der Druck, welchen jedes der drei Beine *A*, *B*, *C*, Fig. 168, eines beliebig belaſteten Tiſches auszuhalten hat, beſtimmt ſich auf folgende Weiſe. Es ſei *S* Schwerpunkt des belaſteten Tiſches, und es ſeien *SE*, *CD* Perpendikel auf *AB*. Bezeichnen wir nun das Gewicht des ganzen Tiſches durch *G* und den Druck in *C* durch *R*, ſo können wir, *AB* als Axe behandelnd, ſetzen: Moment von *R* = Moment von *G*,

d. i. $R \,.\, CD = G \,.\, SE$, und erhalten nun $R = \frac{SE}{CD} \cdot G = \frac{\triangle ABS}{\triangle ABC} \cdot G$; ebenso auch den Druck in $B = Q = \frac{\triangle ACS}{\triangle ABC} \cdot G$, und den in $A = P = \frac{\triangle BCS}{\triangle ABC} \cdot G$. Stabilität.

§. 130. Beschäftigen wir uns mit dem Falle, wenn ein Körper mit einer ebenen Basis auf einer horizontalen Ebene ruht, etwas specieller. Ein solcher Körper besitzt Stabilität oder ist im stabilen Gleichgewichte, wenn sein Schwerpunkt unterstützt ist, d. h. wenn das den Schwerpunkt enthaltende Loth durch die Basis des Körpers hindurchgeht, weil in diesem Falle die durch das Gewicht des Körpers angeregte Drehung durch die Festigkeit desselben verhindert wird. Geht das Loth durch den Umfang der Basis, so befindet sich der Körper im labilen Gleichgewichte, und geht endlich dasselbe gar nicht durch die Basis, so findet gar kein Gleichgewicht Statt, der Körper dreht sich um eine Seite seines Umfanges und stürzt um. Das dreiseitige Prisma $ABCDE$, Fig. 169, ist

Fig. 169.

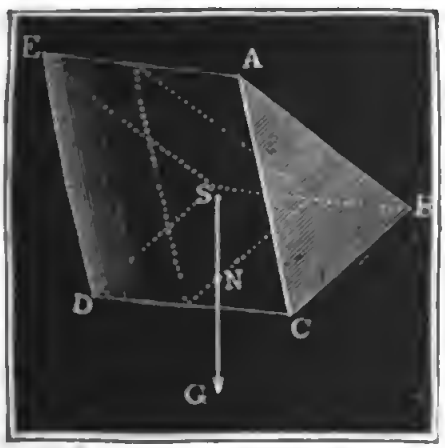
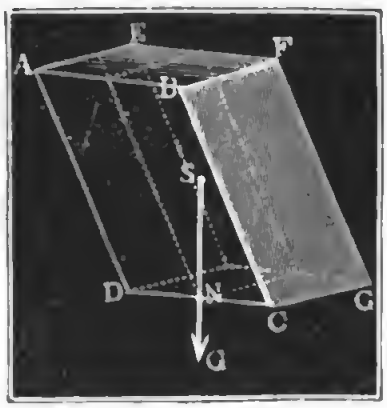
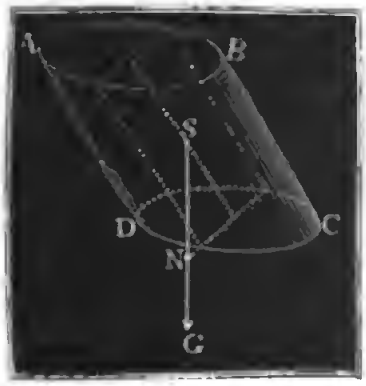


Fig. 170.



hiernach stabil, weil das Loth SG durch einen Punkt N der Basis hindurchgeht, das Parallelepiped $ABCG$, Fig. 170, ist im labilen Gleichgewichte, weil das Loth SG eine Seite CD der Basis durchschneidet, der Cylinder $ABCD$, Fig. 171, ist endlich ohne Stabilität, weil das Loth SG dessen Basis CD nicht durchschneidet.

Fig. 171.



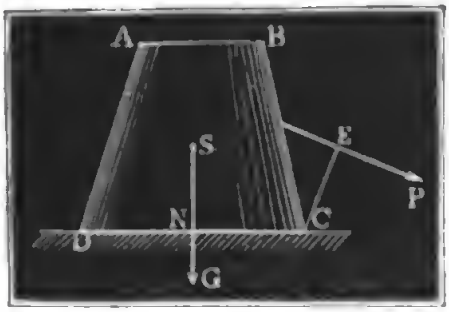
Stabilität oder Standfähigkeit (franz. stabilité, engl. stability) ist das Vermögen eines Körpers, durch sein Gewicht allein seine Stellung zu behaupten und einer Umdrehungsursache Widerstand

entgegenzuſetzen. Kommt es darauf an, ein Maaß für die Stabilität eines Körpers auszuwählen, ſo muß unterſchieden werden, ob nur auf eine Verrückung oder auf ein wirkliches Umſtürzen Rückſicht genommen werden ſoll. Nehmen wir zunächſt nur auf das erſte Verhältniß Rückſicht.

Stabilitäts-formeln.

§. 131. Eine nicht vertikal gerichtete Kraft P ſucht einen Körper $ABCD$, Fig. 172, nicht allein umzuſtürzen, ſondern auch fortzuſchieben; nehmen wir indeſſen an, daß dieſem Fortſchieben, oder nach Befinden Fortziehen, ein Hinderniß entgegengeſetzt ſei, berückſichtigen wir alſo nur das Umdrehen um eine der Kanten C. Fällen wir von dieſer Kante ein Perpendikel $CE = a$ gegen die Kraftrichtung und ein anderes Perpendikel $CN = x$ gegen das Loth SG durch den Schwerpunkt, ſo haben wir es mit einem Winkelhebel ECN zu thun, für welchen gilt $Pa = Gx$, alſo $P = \frac{x}{a} G$; iſt alſo die äußere Kraft P wenig größer als $\frac{xG}{a}$, ſo nimmt der Körper eine Drehung um C an und verliert alſo ſeine Stabilität. Es hängt hiernach ſeine Stabilität von dem Producte (Gx) aus dem Gewichte des Körpers und aus dem kürzeſten Abſtande zwiſchen einer Seite des Umfanges der Baſis und dem Lothe durch den Schwerpunkt ab, es läßt ſich alſo Gx als Maaß der Stabilität anſehen und deshalb auch ſchlechtweg Stabilität ſelbſt nennen.

Fig. 172



Man erſieht hieraus, daß die Stabilität mit dem Gewichte G und dem Abſtande x gleichmäßig wächſt, und ſchließt hiernach, daß unter übrigens gleichen Umſtänden eine doppelte, dreimal ſo ſchwere Mauer u. ſ. w. nicht mehr Standfähigkeit beſitzt, als eine Mauer vom einfachen Gewichte und dem doppelten, dreifachen Abſtande oder Hebelarme x u. ſ. w.

§. 132. 1) Von einem Parallelepipede $ABCF$, Fig. 173, von der Länge $AE = l$, Breite $AB = CD = b$ und Höhe $AD = BC = h$ iſt das Gewicht $G = V\gamma = bhl\gamma$ und die Stabilität $S = G \,.\, KN = G \,.\, \frac{1}{2} CD = \frac{Gb}{2} = \frac{1}{2} b^2 hl\gamma$, inſofern γ die Dichtigkeit der Maſſe des Parallelepipedes bezeichnet.

2) Bei einem aus zwei Parallelepipeden beſtehenden Körper $ACFH$, Fig. 174, ſind die Stabilitäten in Hinſicht auf die beiden Baſiskanten C und E verſchieden von einander. Sind die Höhen BC und $EF = h$

und h_1 und die Breiten CD und $DE = b$ und b_1, ſo hat man die Ge- Stabilitäts-formeln.

Fig. 173.

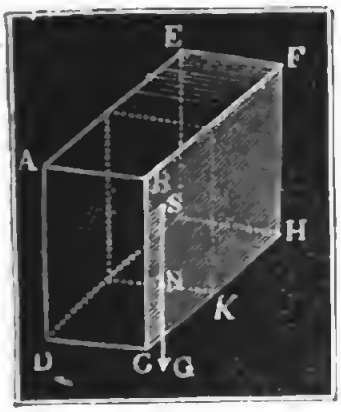
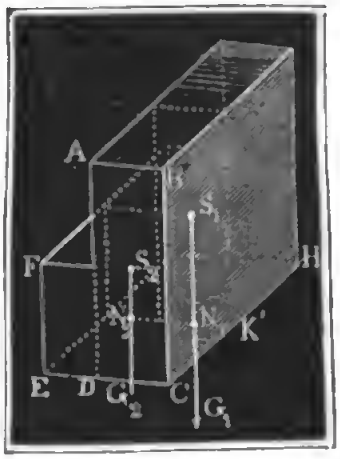


Fig. 174.



wichte der Theile G_1 und $G_2 = bhl\gamma$ und $b_1\ h_1\ l\gamma$; die Hebelarme in Beziehung auf C, $KN_1 = \frac{1}{2}b$ und $KN_2 = b + \frac{1}{2}b_1$, und in Beziehung auf E, $= b_1 + \frac{1}{2}b$ und $\frac{1}{2}b_1$; es ſind demnach die Stabilitäten: erſtens für eine Umdrehung um C,

$$S = \tfrac{1}{2}\,G_1 b + G_2(b + \tfrac{1}{2}b_1), = (\tfrac{1}{2}\,b^2h + bb_1h_1 + \tfrac{1}{2}\,b_1{}^2h_1)\,l\gamma,$$

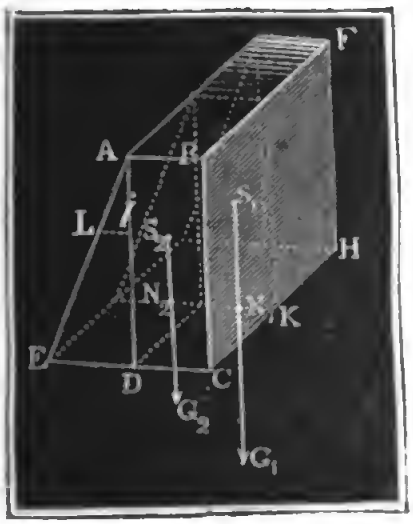
dagegen zweitens, in Beziehung auf E,

$$S_1 = G_1\,(b_1 + \tfrac{1}{2}b) + \tfrac{1}{2}G_2b_1 = (\tfrac{1}{2}b_1{}^2h_1 + bb_1h + \tfrac{1}{2}b^2h)\,l\gamma.$$

Die letztere Stabilität iſt um $S_1 - S = (h - h_1)\ bb_1l\gamma$ größer als die erſtere; will man die Stabilität einer Mauer AC durch Banquets DF vergrößern, ſo ſind dieſe demnach auf derjenigen Seite der Mauer anzubringen, wohin die Umdrehungskraft (Wind-, Waſſer-, Erddruck u. ſ. w.) wirkt.

Von einer auf einer Seite geböſchten Mauer $ABCEF$, Fig. 175, ergiebt ſich folgende Stabilität. Es ſei die obere Breite $AB = b$, die Höhe $BC = h$ und die Länge $CH = l$, die Böſchung aber $= n$, d. h. auf $AI = 1$ Fuß Höhe; $IL = n$ Ausladung, alſo auf h Fuß: $ED = nh$. Das Gewicht des Parallelepipedes ACF iſt $G_1 = bhl\gamma$, das des dreiſeitigen Prisma's $ADE = G_2 = \frac{1}{2}nh.hl\gamma$, die Hebelarme für eine Umdrehung um E ſind $= DE + \frac{1}{2}b = nh + \frac{1}{2}b$ und $\frac{2}{3}\,DE = \frac{2}{3}\,nh$; es iſt folglich die Stabilität:

Fig. 175.



$$S = G_1\,(nh + \tfrac{1}{2}b) + \tfrac{2}{3}\,G_2nh$$
$$= (\tfrac{1}{2}b^2 + nhb + \tfrac{1}{3}n^2h^2)\ hl\gamma.$$

Stabilitäts-formeln.

Eine parallelepipediſche Mauer von gleichem Volumen hat die Breite $b + \frac{1}{2}nh$, daher die Stabilität:

$$S_1 = \frac{1}{2}(b + \frac{1}{2}nh)^2 hl\gamma = (\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}nhb + \frac{1}{8}n^2h^2)\, hl\gamma;$$

ihre Stabilität iſt daher um $S - S_1 = (b + \frac{5}{12}nh) \cdot \frac{1}{2}nh^2 l\gamma$ kleiner als die der geböſchten Mauer.

Für eine auf der entgegengeſetzten Seite geböſchte Mauer iſt die Stabilität $S_2 = (b^2 + nhb + \frac{1}{3}n^2h^2) \cdot \frac{1}{2}hl\gamma$, demnach auch kleiner als S, und zwar um $S - S_2 = (b + \frac{1}{3}nh) \cdot \frac{1}{2}nh^2 l\gamma$; wiewohl um $S_2 - S_1 = \frac{1}{24}n^2h^3 l\gamma$ größer als die Stabilität der parallelepipediſchen Mauer.

Beiſpiel. Wie groß iſt die Stabilität einer Bruchſteinmauer von 10 Fuß Höhe und 1¼ Fuß oberer Breite für jeden Fuß Länge bei ⅕ füßiger Böſchung an der Rückenſeite? Das ſpecifiſche Gewicht dieſer Mauer (§. 58) = 2,4 angenommen, folgt die Dichtigkeit derſelben $\gamma = 66 \cdot 2{,}4 = 158{,}4$ Pf., nun iſt $l = 1$, $h = 10$, $b = 1{,}25$ und $n = \frac{1}{5} = 0{,}2$; es folgt daher die geſuchte Stabilität $S = (\frac{1}{2} \cdot [1{,}25]^2 + 0{,}2 \cdot 1{,}25 \cdot 10 + \frac{1}{3} \cdot [0{,}2]^2 \cdot 10^2)\ 10 \cdot 1 \cdot 158{,}4$
$= (0{,}78125 + 2{,}5 + 1{,}3333)\ 1584 = 4{,}6146 \cdot 1584 = 7309{,}5$ Fßpf.

Bei derſelben Menge an Material und unter übrigens gleichen Umſtänden wäre die Stabilität einer parallelepipediſchen Mauer:

$S_1 = (\frac{1}{2} \cdot [1{,}25]^2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}25 \cdot 10 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}2^2 \cdot 10^2) \cdot 1584$
$= (0{,}78125 + 1{,}25 + 0{,}5) \cdot 1584 = 2{,}531 \cdot 1584 = 4010$ Fßpf.

Endlich dieſelbe Mauer mit geböſchter Vorderſeite hätte die Stabilität:

$S_2 = (\frac{1}{2} \cdot [1{,}25]^2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}25 \cdot 10 + \frac{1}{6} \cdot [0{,}2]^2 \cdot 10)^2 \cdot 1584$
$= (0{,}78125 + 1{,}25 + 0{,}666\ldots) \cdot 1584 = 2{,}6979 \cdot 1584 = 4273$ Fßpf.

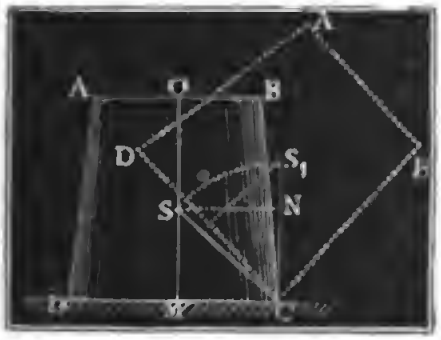
Anmerkung. Man erſieht aus dem Vorhergehenden, daß es eine Erſparung an Material gewährt, die Mauern zu böſchen, oder ſie mit Pfeilern zu verſehen, ihnen Banquets zu geben, ſie auf Plinten zu ſetzen u. ſ. w. Eine weitere Ausführung dieſes Gegenſtandes giebt der zweite Theil, wo vom Erddruck, von den Gewölben, Kettenbrücken u. ſ. w. gehandelt wird.

Dynamiſche Stabilität.

§. 133. Wir können von dem im letzten Paragraphen abgehandelten Maaße der Stabilität noch ein anderes, gewiſſermaßen dynamiſches Maaß der Stabilität unterſcheiden, indem wir die Wirkung berückſichtigen, welche zum Umſtürzen des Körpers aufzuwenden iſt. Nun iſt die Leiſtung oder Arbeit einer Kraft gleich dem Producte aus Kraft und Weg, die Kraft eines ſchweren Körpers iſt aber ſein Gewicht G und der Weg gleich der Vertikalprojection des vom Schwerpunkte durchlaufenen Weges: wir können folglich als dynamiſches Maaß der Stabilität eines Körpers das Product Gs annehmen, wenn s die Höhe iſt, auf welche der Schwerpunkt des Körpers ſteigen muß, um den Körper aus ſeinem ſtabilen Zuſtande in einen labilen zu bringen.

Es ſei C die Drehungsaxe und S der Schwerpunkt eines Körpers $ABCD$, Fig. 176, deſſen dynamiſche Stabilität wir angeben wollen. Dre-

Fig. 176.



Dynamische Stabilität.

hen wir den Körper, so daß sein Schwerpunkt nach S_1, d h. senkrecht über C kommt, so ist der Körper im labilen Gleichgewichte, denn wenn er nur noch wenig weiter gedreht wird, so gelangt er zum Umsturz. Ziehen wir die Horizontale SN, so schneidet diese die Höhe $NS_1 = s$ ab, auf welche der Schwerpunkt gestiegen ist, und aus welcher sich die Stabilität Gs ergiebt. Ist nun $CS = CS_1 = z$, $CM = SN = x$ und die Höhe $CN = MS = y$, so folgt der Weg $S_1N = s = z - y = \sqrt{x^2+y^2} - y$, und die Stabilität im letzteren Sinne:

$$S = G\,(\sqrt{x^2+y^2} - y).$$

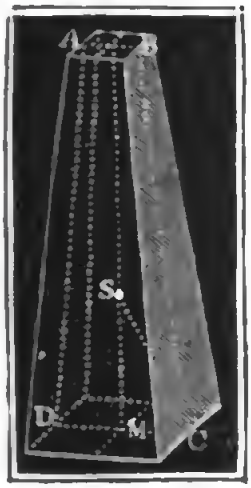
Ist der Körper ein Prisma mit symmetrisch trapezoidalem Querschnitt, wie Fig. 176 im Durchschnitt vorstellt, und sind die Dimensionen folgende: Länge $= l$, Höhe $MO = h$, untere Breite $CD = b_1$, obere Breite $AB = b_2$, so hat man $MS = y = \frac{b_1+2b_2}{b_1+b_2} \cdot \frac{h}{3}$ (§. 105) und

$CM = x = \frac{1}{2} b_1$, daher $CS = \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_1+2b_2}{b_1+b_2} \cdot \frac{h}{3}\right)^2}$,

und die dynamische Stabilität oder die zum Umstürzen dieses Körpers nöthige mechanische Arbeit:

$$S = G\left[\sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_1+2b_2}{b_1+b_2} \cdot \frac{h}{3}\right)^2} - \frac{b_1+2b_2}{b_1+b_2} \cdot \frac{h}{3}\right]$$

Fig. 177.



Beispiel. Wie groß ist die dynamische Stabilität oder die mechanische Arbeit zum Umstürzen des Obelisken $ABCD$, Fig. 177, aus Granit, wenn dessen Höhe $h =$ 30 Fuß, obere Länge und Breite $l_1 = 1\frac{1}{2}$ und $b_1 =$ 1 Fuß und untere Länge und Breite $l_2 = 4$ Fuß und $b_2 = 3\frac{1}{2}$ Fuß betragen? Das Volumen dieses Körpers ist (§. 115) $V = (2b_1 l_1 + 2b_2 l_2 + b_1 l_2 + b_2 l_1)\,\frac{h}{6}$

$= (2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot \frac{7}{2} + 1 \cdot 4 + \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2}) \cdot \frac{30}{6}$

$= 40{,}25 \cdot 5 = 201{,}25$ Cubikfuß; wiegt nun ein Cubikfuß Granit $= 3 \cdot 66 = 198$ Pf, so ist das ganze Gewicht dieses Körpers: $G = 201{,}25 \cdot 198 = 39847{,}5$ Pf. Die Höhe des Schwerpunktes über der Basis ist

$$y = \frac{b_2 l_2 + 3b_1 l_1 + b_2 l_1 + b_1 l_2}{2b_2 l_2 + 2b_1 l_1 + b_2 l_1 + b_1 l_2} \cdot \frac{h}{2}$$

Dynamiſche Stabilität.

$= \frac{4 . {}^7/_2 + 3 . {}^3/_2 . 1 + 1 . 4 + {}^3/_2 . {}^7/_2}{40{,}25} . {}^{30}/_2 = \frac{27{,}75 \; . \; 15}{40{,}25} = 10{,}342$ Fuß. Eine Umdrehung um die längere Baſiskante vorausgeſetzt, iſt der Horizontalabſtand des Schwerpunktes von dieſer Kante: $x = {}^1/_2 \, b_2 = {}^1/_2 . {}^7/_2 = {}^7/_4$ Fuß, daher die Entfernung des Schwerpunktes von der Are:

$CS = s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1{,}75)^2 + (10{,}342)^2} = \sqrt{110{,}002} = 10{,}489$;

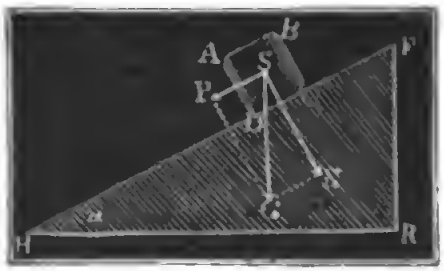
und die Höhe, auf welche der Schwerpunkt zu heben iſt, um ein Umſtürzen herbeizuführen: $s = z - y = 10{,}489 - 10\,342 = 0{,}147$ Fuß, endlich die entſprechende Arbeit oder Stabilität: $Gs = 39847 . 0{,}147 = 5858$ Fßpf.

Anmerkung. Der Factor $s = \sqrt{x^2 + y^2} - y$ giebt für $y = o$, $s = x$, für $y = x$, $s = x \, (\sqrt{2} - 1) = 0{,}414 \, x$, für $y = nx$ aber $s = (\sqrt{n^2 + 1} - n) x$ annähernd $= (n + \frac{1}{2n} - n) \, x = \frac{x}{2n}$, alſo für $y = 10x$, $s = \frac{x}{20}$, und für $y = \infty$, $s = \frac{x}{\infty} = o$; es iſt alſo die dynamiſche Stabilität um ſo größer, je tiefer der Schwerpunkt liegt, und ſie nähert ſich immer mehr und mehr der Null, je höher der Schwerpunkt über der Baſis liegt. Schlitten, Wagen und Schiffe u. ſ. w. ſind deshalb ſo zu beladen, daß der Schwerpunkt des Ganzen möglichſt tief, übrigens auch über die Mitte der Baſis zu liegen kommt.

Theorie der ſchiefen Ebene.

§. 134. Ein Körper AC, Fig. 178 auf einer ſchiefen, d. h. gegen den Horizont geneigten Ebene (franz. plan incliné, engl. inclined plane) kann zwei Bewegungen annehmen, er kann von der ſchiefen Ebene herabgleiten, er kann ſich auch um eine ſeiner Baſiskanten umdrehen und umſtürzen. Iſt der Körper ſich ſelbſt überlaſſen, ſo zerlegt ſich das Gewicht G des Körpers in eine Kraft N normal und eine Kraft P parallel zur Baſis; die erſtere nimmt die ſchiefe Ebene vollkommen auf, die letztere aber treibt den Körper auf der Ebene abwärts. Setzen wir den Neigungswinkel FHR der ſchiefen Ebene gegen den Horizont $= \alpha$, ſo haben wir auch den Winkel $GSN = \alpha$, und daher den Normaldruck:

Fig. 178.



$$N = G \; cos. \; \alpha,$$

ſowie die Kraft zum Herabgleiten:

$$P = G \; sin. \; \alpha.$$

Geht die vertikale Schwerlinie SG durch die Baſis CD, wie Fig. 178, ſo kann nur eine gleitende Bewegung entſtehen, geht aber, wie in Fig. 179, dieſe Schwerlinie außerhalb der Baſis vorbei, ſo tritt auch noch ein Umſtürzen ein, es iſt alſo der Körper ohne Stabilität. Uebrigens hat ein

Körper AC auf der ſchiefen Ebene FH, Fig. 180, eine andere Stabilität

Theorie der ſchiefen Ebene.

Fig. 179.

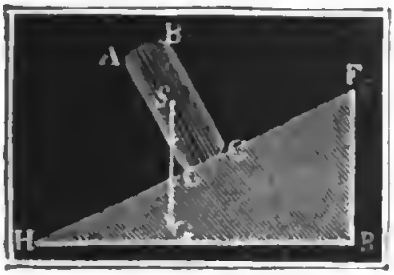
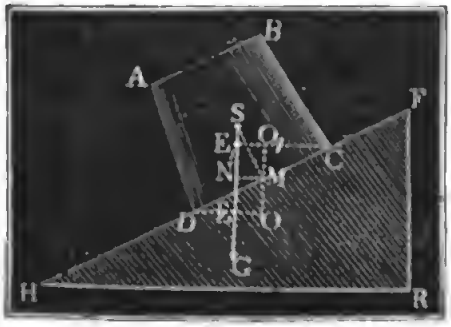


Fig. 180.



als auf der Horizontalebene. Sind $DM = x$ und $MS = y$ die rechtwinkeligen Coordinaten des Schwerpunktes S, ſo hat man den Hebelarm der Stabilität: $DE = DO - MN = x \cos. \alpha - y \sin. \alpha$, während er $= x$ iſt, wenn der Körper auf der Horizontalebene ſteht. Da $x > x \cos. \alpha - y \sin. \alpha$ iſt, ſo fällt die Stabilität in Beziehung auf die untere Kante D auf der ſchiefen Ebene kleiner aus, als auf der horizontalen Ebene; ſie iſt ſogar Null für $x \cos. \alpha = y \sin. \alpha$, d. i. für $tang.\ a = \frac{x}{y}$. Wenn alſo der auf einer Horizontalebene mit der Stabilität Gx ſtehende Körper auf eine ſchiefe Ebene zu ſtehen kommt, deren Neigungswinkel α dem Ausdrucke $tang.\ \alpha = \frac{x}{y}$ entſpricht, ſo verliert derſelbe ſeine Stabilität. Auf der andern Seite kann aber auch ein Körper auf der ſchiefen Ebene zur Stabilität gelangen, die ihm mangelt, wenn er auf der Horizontalebene ſteht. Für eine Drehung um die obere Kante C iſt der Hebelarm $CE_1 = CO_1 + MN = x_1 \cos. \alpha + y \sin. \alpha$, während er beim Stande auf der Horizontalebene $= CM = x_1$ iſt. Iſt nun x_1 negativ, ſo hat der Körper keine Stabilität, ſo lange er auf der Horizontalebene ſteht, ruht er aber auf einer geneigten Ebene, für deren Neigungswinkel $tang.\ \alpha > \frac{x_1}{y}$ iſt, ſo wird der Körper ſtabil.

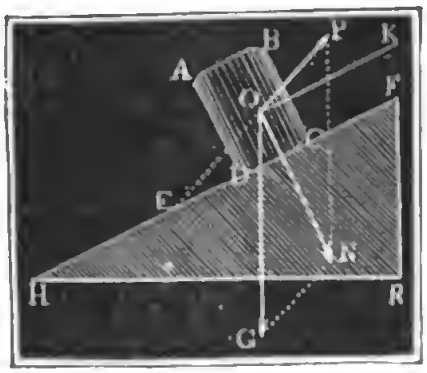
Wirkt außer der Schwerkraft noch eine andere Kraft P auf den Körper $ABCD$, Fig. 181 ſ. f. S., ſo behält derſelbe ſeine Stabilität, wenn die Mittelkraft N aus dem Gewichte G des Körpers und aus der Kraft P eine Richtung hat, welche die Baſis CD des Körpers durchſchneidet.

Beiſpiel. Bei den Obelisken im Beiſpiele des vorigen Paragraphen iſt $x = 7/4$ Fuß und $y = 10{,}342$ Fuß, es verliert folglich derſelbe ſeine Stabilität, wenn er auf eine ſchiefe Ebene zu ſtehen kommt, für deren Neigungswinkel iſt: $tang.\ \alpha = \frac{7}{4 . 10{,}342} = \frac{7000}{41368} = 0{,}16922$, deren Neigung folglich $\alpha = 9°{,}36'$ beträgt.

Theorie der ſchiefen Ebene.

§. 135. Da die ſchiefe Ebene nur denjenigen Druck in ſich aufnimmt, welcher winkelrecht gegen ſie gerichtet iſt, ſo beſtimmt ſich die Kraft P, welche nöthig iſt, um einen übrigens vor dem Umſtürzen geſchützten Körper auf der ſchiefen Ebene zu erhalten, indem man die Bedingung feſtſetzt, daß die aus P und G hervorgehende Mittelkraft N, Fig. 181, winkelrecht zur ſchiefen Ebene ſtehe. Der Theorie des Parallelogrammes der Kräfte zufolge hat man $\frac{P}{G} = \frac{sin.\ ONP}{sin.\ PON}$, nun iſt aber der Winkel PNO = Winkel GON = $FHR = \alpha$ und der Winkel $PON = POK + KON = \beta + 90^0$, inſofern man den Winkel $PEF = POK$, unter welchem die Kraftrichtung von der ſchiefen Ebene abweicht, mit β bezeichnet; man erhält daher

Fig. 181.



$$\frac{P}{G} = \frac{sin.\ \alpha}{sin.\ (90+\beta)}, \text{ d. i. } \frac{P}{G} = \frac{sin.\ \alpha}{cos.\ \beta},$$

alſo die Kraft, welche den Körper auf der ſchiefen Ebene erhält:

$$P = \frac{G\ sin.\ \alpha}{cos.\ \beta}.$$

Für den Normaldruck N iſt

$\frac{N}{G} = \frac{sin.\ OGN}{sin.\ ONG}$, aber Winkel $OGN = 90^0 - (\alpha+\beta)$ und $ONG = PON = 90+\beta$, daher folgt

$$\frac{N}{G} = \frac{sin.\ [90^0 - (\alpha+\beta)]}{sin.\ (90^0+\beta)} = \frac{cos.\ (\alpha+\beta)}{cos.\ \beta},$$

und der Normaldruck gegen die ſchiefe Ebene

$$N = \frac{G\ cos\ (\alpha+\beta)}{cos.\ \beta}.$$

Geht die Kraft P mit der ſchiefen Ebene parallel, ſo iſt $\beta = 0$ und $cos.\ \beta = 1$, daher

$$P = G\ sin.\ \alpha \text{ und } N = G\ cos.\ \alpha.$$

Wirkt die Kraft P vertikal, ſo iſt $\alpha+\beta = 90^0$, daher

$$cos.\ \beta = sin.\ \alpha,\ cos.\ (\alpha+\beta) = 0 \text{ und}$$

$P = G$ und $N = 0$, dann hat alſo die ſchiefe Ebene keinen Einfluß auf den Körper.

Wirkt endlich die Kraft horizontal, ſo iſt $\beta = -\alpha$ und $cos.\ \beta = cos.\ \alpha$, daher

$$P = \frac{G\ sin.\ \alpha}{cos.\ \alpha} = G\ tang.\ \alpha;\ N = \frac{G\ cos.\ 0}{cos.\ \alpha} = \frac{G}{cos.\ \alpha}.$$

Beispiel. Um einen Körper von 500 Pf. auf einer schiefen Ebene von 50° Neigung gegen den Horizont zu erhalten, wird eine Kraft aufgewendet, deren Richtung 75° mit dem Horizonte einschließt, wie groß ist diese Kraft und wie stark drückt der Körper gegen die schiefe Ebene? Die Kraft ist

$$P = \frac{500\,sin\ 50^\circ}{cos.(75-50)} = \frac{500\ sin.\ 50}{cos.\ 25} = 422.6 \text{ Pf.},$$

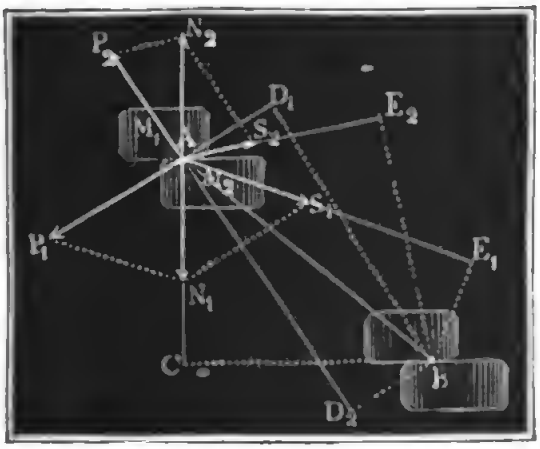
der Druck gegen die Ebene:

$$N = \frac{500\,.\,cos.\,.\,75^\circ}{cos.\ 25} = 142{,}8 \text{ Pf.}$$

§. 136. Bringt man das in §. 128 näher auseinandergesetzte Princip von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung mit dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten (§. 80 und §. 93) in Verbindung, so stellt sich folgende Regel heraus: Halten zwei Körper, M_1 und M_2, Fig. 182, einander Gleichgewicht, so ist für eine endliche geradlinige und auch für eine unendlich kleine krummlinige Bewegung des Druck- oder Berührungspunktes A die Summe der mechanischen Arbeiten von den Kräften des einen Körpers gleich der Summe der mechanischen Arbeiten von den Kräften des andern Körpers. Sind P_1 und S_1 die Kräfte des einen Körpers, P_2 und S_2 die des andern, so entsprechen denselben bei einer Verrückung des Berührungspunktes von A nach B die Wege AD_1, AE_1, AD_2 und AE_2, und es ist nach dem oben ausgesprochenen Gesetze:

Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Fig. 182.



$$P_1\,.\,AD_1 + S_1\,.\,AE_1 = P_2\,.\,AD_2 + S_2\,.\,AE_2.$$

Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich auf folgende Weise darthun. Da die Normaldrücke N_1 und N_2 einander gleich sind, so findet auch Gleichheit zwischen ihren Arbeiten $N_1\,.\,AC$ und $N_2\,.\,AC$ Statt, nur mit dem Unterschiede, daß die Arbeit der einen Kraft positiv und die der andern negativ ist. Nun hat man aber nach dem Früheren die Arbeit $N_1\,.\,AC$ der Mittelkraft N_1 gleich der Summe $P_1\,.\,AD_1 + S_1\,.\,AE_1$ der Arbeiten ihrer Componenten P_1 und S_1, und ebenso $N_2\,.\,AC = P_2\,.\,AD_2 + S_2\,.\,AE_2$; es ist daher auch $P_1\,.\,AD_1 + S_1\,.\,AE_1 = P_2\,.\,AD_2 + S_2\,.\,AE_2$.

Die Anwendung des so allgemeiner gemachten Principes der virtuellen Geschwindigkeiten gewährt bei statischen Untersuchungen oft große Vortheile, indem durch sie die Entwickelung algebraischer Ausdrücke sehr vereinfacht wird. Verrückt man z. B. einen Körper A auf der schiefen

Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten.

Ebene FH, Fig. 183, um den Weg AB, ſo iſt der entſprechende Weg ſeines Gewichtes G, $= AC = AB \sin. ABC = AB . \sin. FHR = AB . \sin. \alpha$, dagegen der Weg der Kraft P, $= AD = AB . \cos. BAD = AB . \cos. \beta$ und endlich der Weg der Normalkraft $N = o$; nun iſt aber die Arbeit von N gleich der Arbeit von G plus Arbeit von P, man hat daher zu ſetzen:

$$N . o = - G . AC + P . AD,$$

und findet ſo

$$P = \frac{AC}{AD} . G = \frac{G \sin. \alpha}{\cos. \beta},$$

ganz in Uebereinſtimmung mit dem vorigen Paragraphen.

Fig. 183.

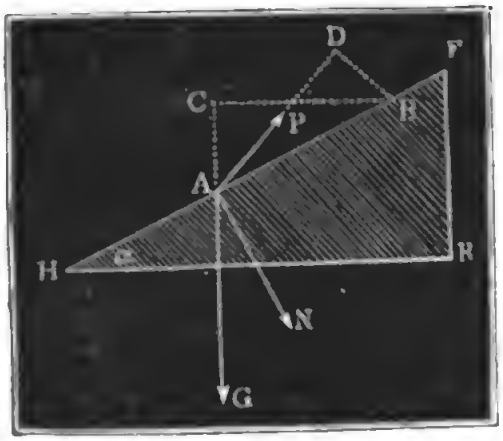
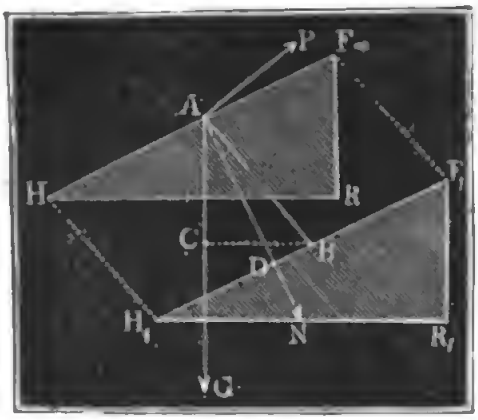


Fig. 184.



Um dagegen den Normaldruck N zu finden, rücken wir die ſchiefe Ebene HF, Fig. 184, um einen beliebigen Weg AB rechtwinklig gegen die Kraftrichtung AP fort, beſtimmen die entſprechenden Wege der Kräfte und ſetzen wieder: Arbeit von N gleich Arbeit von G plus Arbeit von P. Der Weg von N iſt $AD = AB \cos. BAD = AB \cos. \beta$, der Weg von G iſt $AC = AB \cos. BAC = AB \cos. (\alpha + \beta)$ und der Weg von P iſt $= o$, daher Arbeit

$$N . AD = G . AC + P . o, \text{ und daher } N = \frac{G . AC}{AD} = G . \frac{\cos. (\alpha + \beta)}{\cos. \beta},$$

wie im vorigen Paragraphen ebenfalls gefunden wurde.

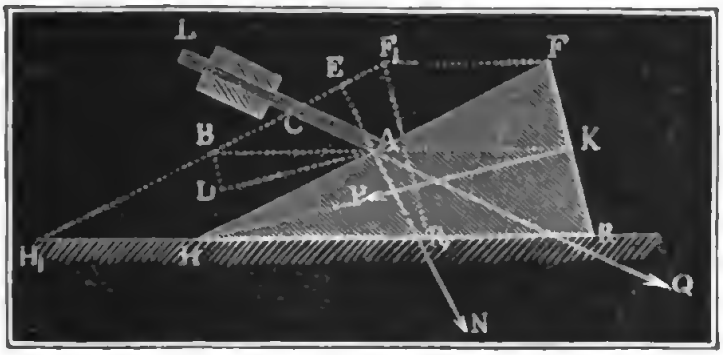
Theorie des Keiles.

§. 137. Sehr einfach entwickelt ſich hiernach die Theorie des Keiles. Der Keil (franz. coin, engl. wedge) iſt eine durch ein dreiſeitiges Prisma FHR, Fig. 185, gebildete, bewegliche ſchiefe Ebene. In der Regel wirkt die Kraft $KP = P$ rechtwinklig auf den Rücken FR des Keiles und hält einer andern Kraft oder Laſt $AQ = Q$, welche gegen die eine Seitenfläche FH deſſelben drückt, das Gleichgewicht. Iſt der die Schärfe des Keiles meſſende Winkel $FHR = \alpha$, ferner der Winkel, um welchen die Kraftrichtung KP oder AD von der Seitenfläche FH abweicht, alſo $FHK = HAD$, $= \delta$, und endlich der Winkel LAH, um den die Richtung der Laſt Q von eben dieſer Seitenfläche abweicht, $= \beta$,

so ergeben sich die Wege, die beim Verrücken des Keiles aus der Lage *FHR* in die Lage $F_1H_1R_1$ zurückgelegt werden, auf folgende Weise. Der

Theorie des Keiles.

Fig. 185.



Weg des Keiles ist $AB = FF_1 = HH_1$ und der Weg der Kraft ist $= AD = AB\cos. BAD = AB\cos.(BAH - DAH) = AB\cos.(\alpha - \delta)$, ferner der Weg der Stange AL oder Last ist $AC = \frac{AB\sin.ABC}{\sin.ACB} = \frac{AB\sin.\alpha}{\sin.HAC}$ $= \frac{AB\sin.\alpha}{\sin.\beta}$ und der gleichzeitige Weg des Normaldruckes N zwischen dem Keile und dem Stangenfuße $= AE = AB\sin.\alpha$.

Bei dem Fortrücken des Keiles um den Weg AB verrichtet der Normaldruck N die Arbeit $N \,.\, AE = N \,.\, AB\sin.\alpha$, die Kraft aber die Arbeit $P \,.\, AD = P \,.\, AB\cos.(\alpha - \delta)$ und die Last die Arbeit $Q \,.\, AC$ $= Q \,.\, AB\,\frac{\sin.\alpha}{\sin.\beta}$; es ist daher

$N \,.\, AB\sin.\alpha = P \,.\, AB\cos.(\alpha - \delta)$, d. i. $N\sin.\alpha = P\cos.(\alpha - \delta)$,

so wie auch $N \,.\, AB\sin.\alpha = Q \,.\, AB\,\frac{\sin.\alpha}{\sin.\beta}$, d. i. $N\sin.\alpha = Q\,\frac{\sin.\alpha}{\sin.\beta}$, und es ergiebt sich aus diesen Gleichungen die gesuchte Gleichung zwischen Kraft und Last:

$$P\cos.(\alpha - \delta) = \frac{Q\sin.\alpha}{\sin.\beta}, \quad \text{oder}$$

$$P = \frac{Q\sin.\alpha}{\sin.\beta\cos.(\alpha - \delta)},$$

wie sich allerdings auf dem Wege der Kraftzerlegung ebenfalls finden läßt.

Geht die Kraftrichtung parallel zur Basis oder Seitenfläche HR, so ist $\delta = \alpha$, daher $P = \frac{Q\sin.\alpha}{\sin.\beta}$, und ist noch die Lastrichtung winkelrecht zur Seitenfläche FH, also $\beta = 90^0$, so folgt $P = Q\sin.\alpha$.

Theorie des Keiles.

Beiſpiel. Die Schärfe $FHR = \alpha$ eines Keiles betrage 25°, die Kraft ſei parallel zur Baſis HR gerichtet, es ſei alſo $\delta = \alpha$, und die Laſt Q wirke winkelrecht zur Seitenfläche FH, alſo β ſei $= 90°$, in welchem Verhältniſſe ſtehen Kraft und Laſt zu einander? Es iſt $P = Q \sin. \alpha$, alſo $\frac{P}{Q} = \sin. 25° = 0{,}4226$. Für eine Laſt Q von 130 Pf. ſtellt ſich hiernach die Kraft $P = 130.0{,}4226. = 54{,}938$ Pf. heraus. Um die Laſt oder Stange einen Fuß fortzuſchieben, muß der Keil den Weg $AB = \frac{AC}{\sin. \alpha} = \frac{1}{0{,}4226} = 2{,}3662$ Fuß zurücklegen.

Anmerkung. Die Theorien des Hebels, der ſchiefen Ebene und des Keiles finden eine weitere Entwicklung im fünften Kapitel, wo der Einfluß der Reibung in Betracht gezogen wird.

Viertes Kapitel.

Gleichgewicht an den Seilmaſchinen.

Seilmaſchine.

§. 138. Wir haben ſeither angenommen, daß die Körper, auf welche Kräfte wirken, in Folge dieſer Einwirkung ihre Form nicht verändern, beſchäftigen wir uns dagegen jetzt mit dem Gleichgewichte ſolcher Körper, welche durch die kleinſten Kräfte Formveränderungen erleiden. Jene Körper heißen ſtarre, ſteife Körper (franz. corps rigides, engl. rigid bodies), dieſe hingegen biegſame (franz. corps flexibles, engl. flexible bodies). Es giebt zwar keine vollkommen biegſamen Körper, allein viele von ihnen, wie z. B. Schnüre, Seile, Riemen u. ſ. w., und in gewiſſer Beziehung auch Ketten, erfordern zum Umbiegen ſo wenig Kraft, daß man ſie in manchen Fällen als vollkommen biegſam anſehen kann. Solche, übrigens auch noch ausdehnbare Körper ſind der Gegenſtand der folgenden Unterſuchung.

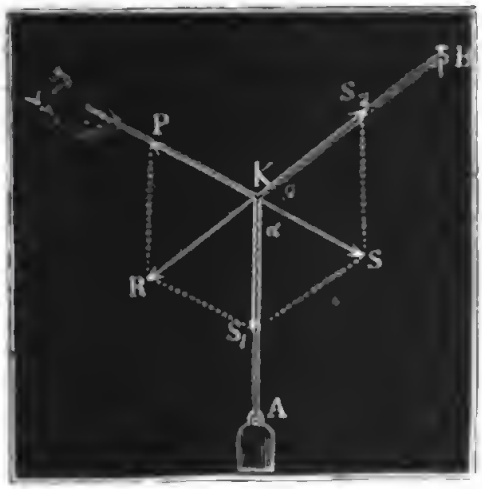
Wir verſtehen in der Folge unter einer Seilmaſchine (franz. machine funiculaire, engl. machine of strings) ein Seil oder eine Verbindung von Seilen (das Wort Seil im allgemeinen Sinne genommen), welche von Kräften angeſpannt wird, und beſchäftigen uns in dieſem Kapitel mit der Theorie des Gleichgewichtes dieſer Maſchinen. Derjenige Punkt einer Seilmaſchine, wo eine Kraft angreift und deshalb das Seil einen Winkel bildet oder eine Richtungsveränderung erleidet, heißt ein Knoten (franz. noeud, engl. knot). Derſelbe iſt entweder feſt (franz. fixe, engl. fixed), oder beweglich (franz. coulant, engl. moveable). Spannung (franz. und engl. tension) iſt die Kraft, welche ein geſpanntes Seil in der Richtung ſeiner Axe fortpflanzt. Die Spannungen an

den Enden eines geraden Seiles oder Seilſtückes ſind gleich und entgegengeſetzt (§. 83); auch kann das gerade Seil andere Kräfte als die in der Axenrichtung wirkende Spannung nicht fortpflanzen, weil es ſich ſonſt biegen müßte, alſo nicht gerade bleiben könnte.

§ 139. Gleichgewicht einer Seilmaſchine findet Statt, wenn in jedem Knoten derſelben Gleichgewicht vorhanden iſt. Lernen wir daher zunächſt die Verhältniſſe des Gleichgewichts an einem Knoten kennen. Knoten.

In einem Knoten K, welchen ein Seilſtück AKB, Fig. 186, bildet, findet Gleichgewicht Statt, wenn die ſich aus den Seilſpannungen $KS_1 = S_1$ und $KS_2 = S_2$ ergebende Mittelkraft $KS = S$ gleich und entgegengeſetzt gerichtet iſt der im Knoten angreifenden Kraft P, denn die Seilſpannungen S_1 und S_2 bringen im Knoten K dieſelben Wirkungen hervor wie ihnen gleiche und gleichgerichtete Kräfte, und drei Kräfte halten ſich das Gleichgewicht, wenn die eine von ihnen gleich iſt und entgegengeſetzt wirkt der Mittelkraft aus den beiden anderen (§. 75).

Fig. 186.



Ebenſo iſt aber auch die Mittelkraft R aus der Kraft P und der einen Spannung S_1 gleich und entgegengeſetzt gerichtet der zweiten Seilſpannung S_2 u. ſ. w. Jedenfalls läßt ſich dieſe Gleichung dazu benutzen, zwei Beſtimmungsſtücke, z. B. eine Seilſpannung oder Seilrichtung, zu ermitteln. Iſt z. B. die Kraft P, die Spannung S_1 und der Winkel $AKP = 180 - AKS = 180^0 - \alpha$ zwiſchen beiden gegeben, ſo hat man für die zweite Spannung:

$$S_2 = \sqrt{P^2 + S_1^2 - 2PS_1 \cos.\alpha}$$

und für ihre Richtung oder Abweichung $BKS = \beta$ von KS:

$$\sin.\beta = \frac{S_1 \sin.\alpha}{S_2}.$$

Beiſpiel. Wenn das Seil AKB, Fig. 186, am Ende B aufgehangen, am Ende A aber durch ein Gewicht $G = 135$ Pf. und in der Mitte K durch eine Kraft $P = 109$ Pf., welche unter einem Neigungswinkel von 25 Grad aufwärts zieht, angeſpannt wird, ſo iſt die Frage nach der Richtung und Spannung des Seilſtückes KB. Die Größe der geſuchten Spannung iſt:

$$S_2 = \sqrt{109^2 + 135^2 - 2.109.135 \cos.(90^0 - 25^0)}$$
$$= \sqrt{11881 + 18225 - 29430.\cos.65^0} = \sqrt{17618.3} = 132{,}92 \text{ Pf.}$$

Für den Winkel β iſt $\sin.\beta = \frac{S_1 \sin.\alpha}{S_2} = \frac{135.\sin.65^0}{132{,}92}$, $Log.\sin.\beta = 0{,}964017 - 1$,

Knoten. daher $\beta = 67°, 0'$, und die Neigung des Seilſtückes KB gegen den Horizont $= \alpha + \beta - 90° = 65° + 67° - 90° = 42°$.

§. 140. Iſt der Knoten K ein loſer oder beweglicher, wirkt z. B. die Kraft P mittels eines Ringes auf das durchgezogene Seil AKB, Fig. 187, ſo iſt zwar wieder die Mittelkraft S aus den Seilſpannungen S_1 und S_2 gleich und entgegengeſetzt gerichtet der Kraft P am Ringe; außerdem ſind aber noch die Seilſpannungen unter ſich gleich, denn zieht man das Seil um einen gewiſſen Weg s in dem Ringe fort, ſo legt jede der Spannungen S_1 und S_2 den Weg s, die Kraft P aber den Weg Null zurück; es iſt folglich, vollkommene Biegſamkeit vorausgeſetzt, die Arbeit $P.0 = S_1.s - S_2.s$, d. i. $S_1 s = S_2 s$ und $S_1 = S_2$.

Fig. 187.

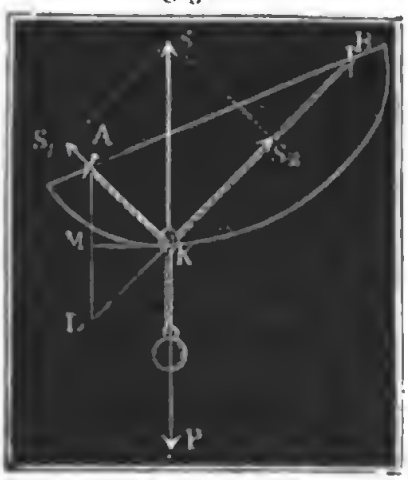
Aus dieſer Gleichheit der Spannungen folgt wieder die Gleichheit der Winkel AKS und BKS, unter welchen die Richtung der Mittelkraft S von den Seilrichtungen abweicht; ſetzen wir dieſe Winkel $= \alpha$, ſo giebt die Auflöſung des Rhombus KS_1SS_2:

$$S = P = 2S_1 \cos.\alpha, \text{ und umgekehrt}$$

$$S_1 = S_2 = \frac{P}{2\cos.\alpha}.$$

Sind A und B, Fig. 188, feſte Punkte eines Seiles AKB von gegebener Länge $(2a)$ mit einem beweglichen Knoten K, ſo findet man den Ort dieſes Knotens, wenn man eine Ellipſe conſtruirt, deren Brennpunkt A und B ſind und deren große Axe der Seillänge $2a$ gleich iſt, und hierauf eine Tangente an dieſe Curve winkelrecht zur gegebenen Kraftrichtung legt: der ſich ergebende Berührungspunkt iſt der Ort des Knotens, weil bei der Ellipſe die Normale KS mit den Fahrſtrahlen KA und KB gleiche Winkel einſchließt, gerade ſo wie die Mittelkraft S mit den Seilſpannungen S_1 und S_2.

Fig. 188.

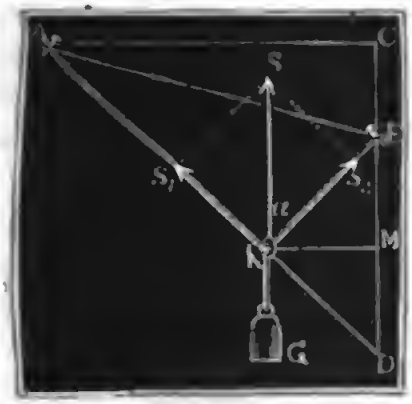


Zieht man AD parallel zur gegebenen Kraftrichtung, macht BD gleich der gegebenen Seillänge, halbirt AD in M und errichtet hierauf das Perpendikel MK, ſo erhält man ohne Ellipſenconſtruction den Ort des Knotens K ebenfalls, denn da dann Winkel AKM = Winkel DKM

und $AK = DK$ iſt, ſo folgt auch Winkel AKS = Winkel BKS und $AK + KB = DK + KB = DB$. Knotenp.

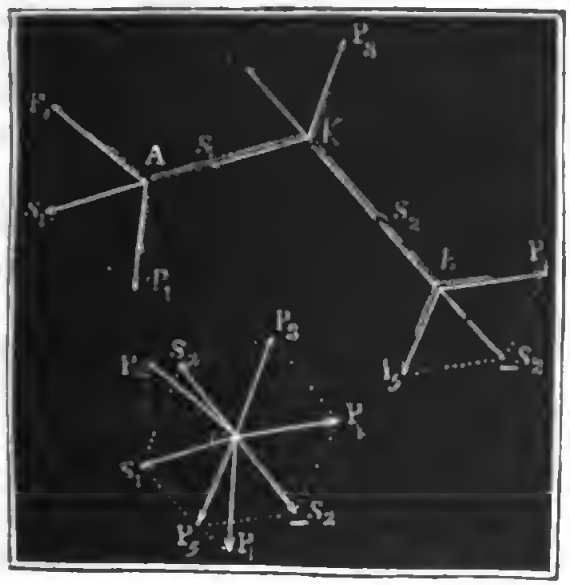
Beiſpiel. Zwiſchen den Punkten A und B, Fig. 189, iſt ein Seil von 9 Fuß Länge durch ein mittels eines Ringes angehängtes Gewicht G von 170 Pf. ausgeſpannt; die Horizontalentfernung AC beider Punkte iſt $6\frac{1}{4}$ Fuß und der Vertikalabſtand $CB = 2$ Fuß; man ſucht den Ort des Knotens und die Seilſpannungen und Seilrichtungen. Aus der Länge $AD = 9$ Fuß als Hypotenuſe und der Horizontalen $AC = 6\frac{1}{4}$ Fuß folgt die Vertikale $CD = \sqrt{9^2 - 6{,}5^2}$ $= \sqrt{81 - 42{,}25} = \sqrt{38{,}75} = 6{,}225$ Fß.; und hieraus die Baſis BD des gleichſchenkligen Dreieckes BDK, $= CD - CB = 6{,}225 - 2$ $= 4{,}225$ Fß. Die Aehnlichkeit der Dreiecke DKM und DAC giebt nun $DK = BK$ $= \frac{DM}{DC} \cdot DA = \frac{4{,}225 \cdot 9}{2 \cdot 6{,}225} = 3{,}054$ Fß.; hieraus folgt $AK = 9 - 3{,}054$ $= 5{,}946$ Fß. und für den Winkel α, um welchen die Seilſtücke von der Vertikalen abweichen: $\cos.\alpha = \frac{BM}{BK} = \frac{2{,}1125}{3{,}054} = 0{,}6917$, daher $\alpha = 46°, 14'$, und endlich die Spannung der Seile $S_1 = S_2 = \frac{G}{2 \cos.\alpha} = \frac{170}{2\,0{,}6917} = 122{,}9$ Pf.

Fig. 189.



§. 141. Die Verhältniſſe des Gleichgewichtes an einem Seilpolygone, d. i. an einem angeſpannten Seile, welches an verſchiedenen Punkten von Kräften ergriffen wird, ſind in Uebereinſtimmung mit den Verhältniſſen des Gleichgewichtes von Kräften, welche in einem Punkte angreifen. Es ſei AKB, Fig. 190, ein von den Kräften P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 angeſpanntes Seil, P_1 und P_2 greifen in A, P_3 in K und P_4 und P_5 in B an. Setzen wir die Spannung des Seilſtückes $AK = S_1$ und die des Stückes $BK = S_2$, ſo erhalten wir S_1 als Mittelkraft von den in A angreifenden Kräften P_1 und P_2, und tragen wir den Angriffspunkt A dieſer Spannung von A auf K, ſo erhalten wir wieder S_2 als Mittelkraft von S_1 und P_3 oder von P_1, P_2 und P_3; Seilpolygon.

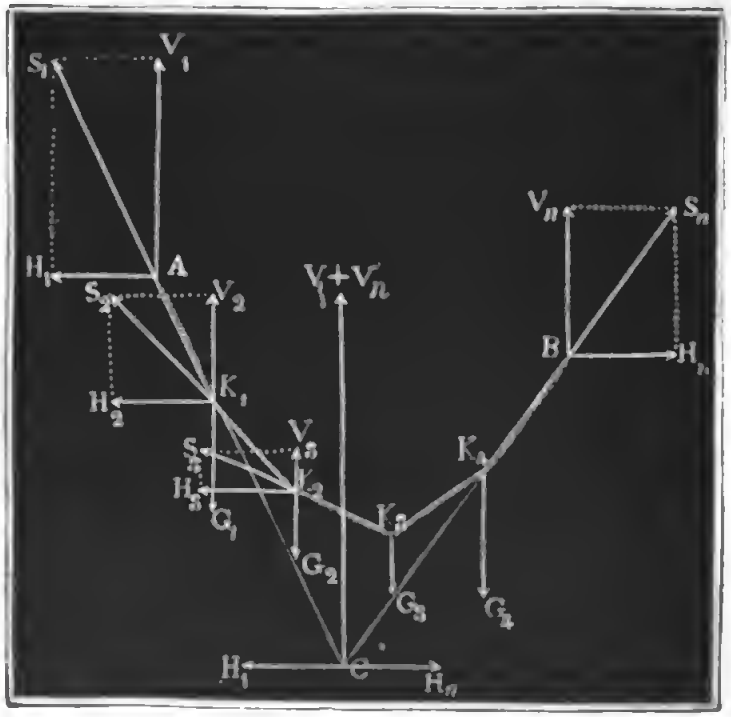
Fig. 190.



Seilpolygon. transportiren wir endlich den Angriffspunkt der Kraft S_2 von K nach B, ſo erhalten wir in S_2, P_4 und P_5, oder, da S_2 Mittelkraft von P_1, P_2 und P_3 iſt, auch in P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 ein ſich das Gleichgewicht haltendes Kräfteſyſtem. Wir können hiernach behaupten: wenn gewiſſe Kräfte P_1, P_2, P_3 u. ſ. w. ein Seilpolygon im Gleichgewichte erhalten, ſo werden ſie ſich auch ſelbſt das Gleichgewicht halten, wenn man ſie bei unveränderter Richtung und Größe in einem einzigen Punkte, z. B. in C, angreifen läßt.

Wird das Seil $AK_1K_2 \ldots B$, Fig. 191, in den Knoten K_1, K_2 durch Gewichte G_1, G_2 . . . angeſpannt, und werden die Endpunkte A und B

Fig. 191



durch die Vertikalkräfte V_1 und V_n und die Horizontalkräfte H_1 und H_n geſpannt, ſo iſt die Summe der Vertikalkräfte: $V_1 + V_n - (G_1 + G_2 + G_3 + \ldots)$ und die Summe der Horizontalkräfte: $H_1 - H_n$. Der Gleichgewichtszuſtand fordert aber beide Summen = Null; es iſt daher

1) $V_1 + V_n = G_1 + G_2 + G_3 + \ldots$ und

2) $H_1 = H_n$; d. h.

bei einem durch Gewichte angeſpannten Seilpolygone iſt die Summe der Vertikalkräfte oder Vertikalſpannungen in den End- oder Aufhängepunkten gleich der Summe der angehängten Gewichte, und es iſt die Horizontalſpan-

nung des einen Endes gleich und entgegengeſetzt gerichtet der Horizontalſpannung im andern Endpunkte. Seilpolygon.

Verlängert man die Richtungen der Spannungen S_1 und S_n in den Endpunkten A und B bis zu ihrem Durchſchnitte C und verlegt man die Angriffspunkte dieſer Spannungen nach dieſem Punkte, ſo erhält man eine einzige Kraft $P = V_1 + V_n$, weil ſich die Horizontalkräfte H_1 und H_n aufheben. Da dieſe Kraft der Summe $G_1 + G_2 + G_3 + \ldots$ von den angehängten Gewichten das Gleichgewicht hält, ſo muß der Angriffs- oder Schwerpunkt dieſer Gewichte in der Richtung derſelben, d. i. in der durch C gehenden Vertikallinie, enthalten ſein.

§. 142. Aus der Spannung S_1 des erſten Seilſtückes AK_1 und deſſen Neigungs- oder Fallwinkel $S_1AH_1 = \alpha_1$ folgt die Vertikalſpannung $V_1 = S_1 \sin. \alpha_1$ und die Horizontalſpannung $H_1 = S_1 \cos. \alpha_1$. Transportirt man nun den Angriffspunkt dieſer Kräfte von A nach dem erſten Knoten K_1, ſo kommt zu dieſen Spannungen das vertikal abwärts ziehende Gewicht G_1, und es wird nun für das folgende Seilſtück K_1K_2 die Vertikalſpannung $V_2 = V_1 - G_1 = S_1 \sin. \alpha_1 - G_1$, wogegen die Horizontalſpannung unverändert $H_2 = H_1 = H$ bleibt. Beide Kräfte geben vereinigt die Arenſpannung des zweiten Seilſtückes: $S_2 = \sqrt{V_2^2 + H^2}$ und die Neigung α_2 deſſelben durch die Formel

$$tang. \alpha_2 = \frac{V_2}{H} = \frac{S_1 \sin. \alpha_1 - G_1}{S_1 \cos. \alpha_1}, \text{ d. i.}$$

$$tang. \alpha_2 = tang. \alpha_1 - \frac{G_1}{H}.$$

Trägt man den Angriffspunkt der Kräfte V_2 und H_2 von K_1 nach K_2, ſo erhält man in dem hinzukommenden Gewichte G_2 noch eine neue Vertikalkraft, und es entſteht ſo die Vertikalkraft des dritten Seilſtückes:

$$V_3 = V_2 - G_2 = V_1 - (G_1 + G_2) = S_1 \sin. \alpha_1 - (G_1 + G_2),$$

während die Horizontalkraft $H_3 = H$ bleibt. Die Geſammtſpannung dieſes dritten Seilſtückes iſt mithin

$S_3 = \sqrt{V_3^2 + H^2}$, und für den Neigungswinkel α_3 deſſelben hat man

$$tang. \alpha_3 = \frac{V_3}{H} = \frac{S_1 \sin. \alpha_1 - (G_1 + G_2)}{S_1 \cos. \alpha_1}, \text{ d. i.}$$

$$tang. \alpha_3 = tang. \alpha_1 - \frac{G_1 + G_2}{H}.$$

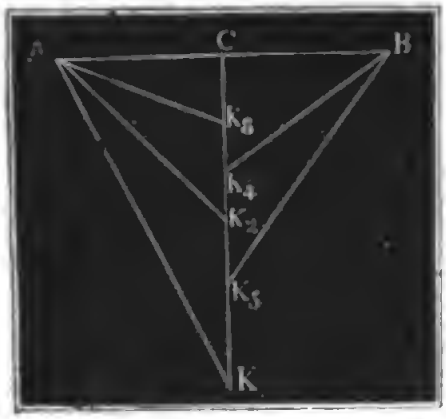
Für den Neigungswinkel des vierten Seilſtückes iſt

$$tang. \alpha_4 = tang. \alpha_1 - \frac{G_1 + G_2 + G_3}{H} \text{ u. ſ. w.}$$

Uebrigens laſſen ſich die Spannungen S_1, S_2, S_3 u. ſ. w., ſowie die Neigungswinkel α_1, α_2, α_3 u. ſ. w. der einzelnen Seiltrümmer leicht geometriſch darſtellen. Machen wir die Horizontale $CA = CB$,

Seilpolygon. Fig. 192, = der Horizontalſpannung H und die Vertikale CK_1 = der Vertikalſpannung V_1 im Aufhängepunkte A, ſo giebt die Hypotenuſe AK_1 die Totalſpannung S_1 und der Winkel CAK_1 auch ihre Neigung gegen den Horizont an; tragen wir nun noch die Gewichte G_1, G_2, G_3 u. ſ. w. als Theile K_1K_2, K_2K_3 u. ſ. w. auf CK auf und ziehen die Transverſalen AK_2, AK_3 u. ſ. w., ſo erhalten wir in ihnen die Spannungen der folgenden Seilſtücke und durch die Winkel K_2AC, K_3AC u. ſ. w. auch die Neigungswinkel α_2, α_3 u. ſ. w. dieſer Seilſtücke.

Fig. 192.



§. 143. Aus den Unterſuchungen im vorigen Paragraphen ſtellt ſich als Geſetz für das Gleichgewicht durch Gewichte geſpannter Seile heraus:

1) die Horizontalſpannung iſt an allen Stellen des Seiles eine und dieſelbe, nämlich

$$H = S_1 \cos.\alpha_1 = S_n \cos.\alpha_n;$$

2) Die Vertikalſpannung an irgend einer Stelle iſt gleich der Vertikalſpannung am darüber befindlichen Ende minus der Summe der darüberhängenden Gewichte, alſo

$$V_m = V_1 - (G_1 + G_2 + \ldots G_{m-1}).$$

Kennt man den Winkel α_1 und die Horizontalſpannung H, ſo erhält man die Vertikalſpannung am Ende A: $V_1 = H.tang.\alpha_1$ und demnach die am Ende B: $V_n = (G_1 + G_2 + \ldots + G_n) - V_1$.

Sind hingegen die Neigungswinkel α_1 und α_n an beiden Aufhängepunkten A und B bekannt, ſo ergeben ſich die Horizontal- und Vertikalſpannungen zugleich; es iſt nämlich $\frac{V_n}{V_1} = \frac{tang.\alpha_n}{tang.\alpha_1}$ und daher

$$V_n = \frac{V_1 tang.\alpha_n}{tang.\alpha_1}.$$

Da man noch $V_1 + V_n = G_1 + G_2 + \ldots$, d. i.

$$\left(\frac{tang.\alpha_1 + tang.\alpha_n}{tang.\alpha_1}\right) V_1 = G_1 + G_2 \ldots \text{ hat, ſo folgt:}$$

$$V_1 = \frac{(G_1 + G_2 + \ldots) tang.\alpha_1}{tang.\alpha_1 + tang.\alpha_n} = (G_1 + G_2 + \ldots) \frac{sin.\alpha_1 \cos.\alpha_n}{sin.(\alpha_1 + \alpha_n)}$$

$$V_n = \frac{(G_1 + G_2 + \ldots) tang.\alpha_n}{tang.\alpha_1 + tang.\alpha_n} = (G_1 + G_2 + \ldots) \frac{sin.\alpha_n \cos.\alpha_1}{sin.(\alpha_1 + \alpha_n)},$$

und hieraus $H = V_1 colg.\alpha_1 = V_n colg.\alpha_n = (G_1 + G_2 + \ldots) \frac{\cos.\alpha_1 \cos.\alpha_n}{sin.(\alpha_1 + \alpha_n)}$.

Haben die beiden Seilenden einerlei Neigung, iſt alſo $\alpha_n = \alpha_1$, ſo hat Seilpolygon.
man $V_1 = V_n = \frac{G_1 + G_2 + \ldots + G_n}{2}$; dann trägt alſo das eine Ende A eben ſoviel wie das andere Ende B.

Aus dem unterſten Gewichte G_m und den Neigungswinkeln α_m und α_{m+1} der unterſten Seilſtücke ergiebt ſich die Horizontalſpannung durch die Formel:

$$H = \frac{G_m \cos. \alpha_m \cdot \cos. \alpha_{m+1}}{\sin. (\alpha_m + \alpha_{m+1})},$$

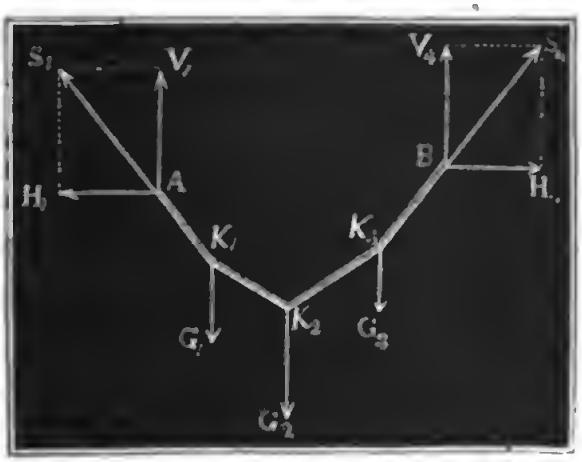
und hiernach folgen die Vertikalſpannungen dieſer Seilſtücke:

$$V_m = H \tang. \alpha_m, \text{ und}$$
$$V_{m+1} = H \tang. \alpha_{m+1}.$$

Uebrigens gelten dieſe Geſetze auch für durch Parallelkräfte angeſpannte Seilpolygone überhaupt, wenn man ſtatt der Vertikalen die Kraftrichtungen einführt.

Beiſpiel. Das Seilpolygon $AK_1K_2K_3B$, Fig. 193, iſt durch drei Gewichte $G_1 = 20$, $G_2 = 30$ und $G_3 = 16$ Pf., ſowie durch die Horizontalkraft $H_1 = 25$ Pf. geſpannt, man ſucht die Arenſpannungen und Neigungswinkel der Seiten unter der Vorausſetzung, daß die Seilenden in A und B einerlei Neigung haben. Die Vertikalſpannungen in beiden Enden ſind hier gleich, nämlich $V_1 = V_4 = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{2} = \frac{20 + 30 + 16}{2}$ = 33 Pf., die Vertikalſpannung des zweiten Seilſtückes iſt dagegen: $V_2 = V_1 - G_1 = 33 - 20 = 13$ Pf., und die des dritten $V_3 = V_4 - G_3$ (oder $G_1 + G_2 - V_1$) $= 33 - 16 = 17$ Pf.; die Neigungswinkel α_1 und α_4 der Seilenden ſind beſtimmt durch $\tang. \alpha_1 = \tang. \alpha_4 = \frac{V_1}{H} = \frac{33}{25} = 1{,}32$, die der zweiten und dritten Seilſtücke aber durch $\tang. \alpha_2 = \tang. \alpha_1 - \frac{G_1}{H} = 1{,}32 - \frac{20}{25} = 0{,}52$ und $\tang. \alpha_3 = \tang. \alpha_1 - \frac{G_3}{H} = 1{,}32 - \frac{16}{25} = 0{,}68$; es iſt hiernach $\alpha_1 = \alpha_4 = 52°,51'$; $\alpha_2 = 27° 28'$, $\alpha_3 = 34°,13'$; endlich die Arenſpannungen ſind $S_1 = S_4 = \sqrt{V_1^2 + H^2} = \sqrt{33^2 + 25^2} = \sqrt{1711} = 41{,}40$ Pf., $S_2 = \sqrt{V_2^2 + H^2} = \sqrt{13^2 + 25^2} = \sqrt{794} = 28{,}18$ Pf. und $S_3 = \sqrt{V_3^2 + H^2} = \sqrt{17^2 + 25^2} = 30{,}23$ Pf.

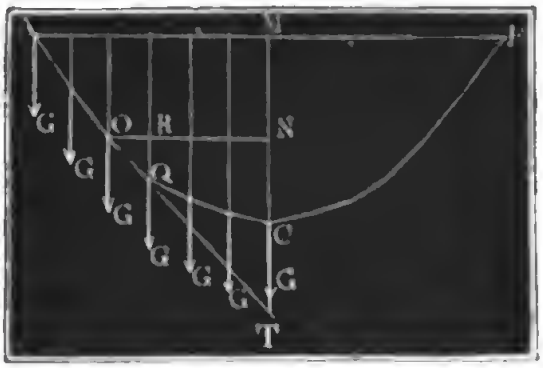
Fig. 193.



Parabel als Kettenlinie.

§. 144. Setzen wir jetzt voraus, daß das Seil ACB, Fig. 194, durch lauter gleiche, in gleichen Horizontalabſtänden aufgehängte Gewichte G_1, G_2 u. ſ. w. geſpannt ſei. Bezeichnen wir den Horizontalabſtand AM zwiſchen dem Aufhängepunkte A und dem tiefſten Punkte C durch b, den Vertikalabſtand CM aber durch a; ſetzen wir ferner für einen andern Punkt O des Seilpolygones die gleichliegenden Coordinaten $ON = y$ und $CN = x$. Iſt nun die

Fig. 194.



Vertikalſpannung in $A = V$, ſo folgt die in $O = \frac{y}{b} \cdot V$, und daher für den Neigungswinkel $NOT = ROQ = \varphi$ des Seilſtückes OQ gegen den Horizont: $tang.\ \varphi = \frac{y}{b} \cdot \frac{V}{H}$, wo H die conſtante Horizontalſpannung ausdrückt.

Es iſt hiernach $QR = OR \cdot tang.\ \varphi = OR \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{V}{H}$ der Höhenabſtand zweier benachbarten Eckpunkte des Seilpolygones. Setzen wir y der Reihe nach OR, $2\,OR$, $3\,OR$ u. ſ. w., ſo giebt nun die letzte Gleichung die entſprechenden Höhenabſtände des erſten, zweiten, dritten Eckpunktes u. ſ. w., von unten nach oben gezählt; und addiren wir endlich alle dieſe Werthe, deren Anzahl $= m$ ſein möge, ſo erhalten wir die Höhe CN des Punktes O über dem Fußpunkte C. Es iſt nämlich:

$$x = CN = \frac{V}{H} \cdot \frac{OR}{b} (OR + 2\,OR + 3\,OR + \ldots + m \cdot OR)$$

$$= \frac{V}{H} \cdot \frac{\overline{OR}^2}{b} (1 + 2 + 3 + \ldots + m) = \frac{V}{H} \cdot \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\overline{OR}^2}{b},$$

der Theorie der arithmetiſchen Reihen zufolge.

Endlich $OR = \frac{y}{m}$ geſetzt, erhält man:

$$x = \frac{V}{H} \cdot \frac{m\,(m+1)}{2\,m^2} \cdot \frac{y^2}{b}.$$

Iſt die Zahl der Gewichte ſehr groß, ſo kann $m + 1 = m$ angenommen werden, weshalb man erhält:

$$x = \frac{V}{H} \cdot \frac{y^2}{2b}.$$

Für $x = a$ iſt $y = b$, daher hat man auch:

Parabel als Kettenlinie.

$$a = \frac{V}{H} \cdot \frac{b}{2}, \text{ und hiernach einfacher:}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y^2}{b^2}, \text{ welche Gleichung nur der Parabel zukommt.}$$

Wird alſo ein übrigens gewichtsloſes Seil durch unendlich viele, in gleichen Horizontalabſtänden angreifende Gewichte geſpannt, ſo geht das Seilpolygon in eine Parabel über.

Für den Neigungswinkel φ hat man hiernach:

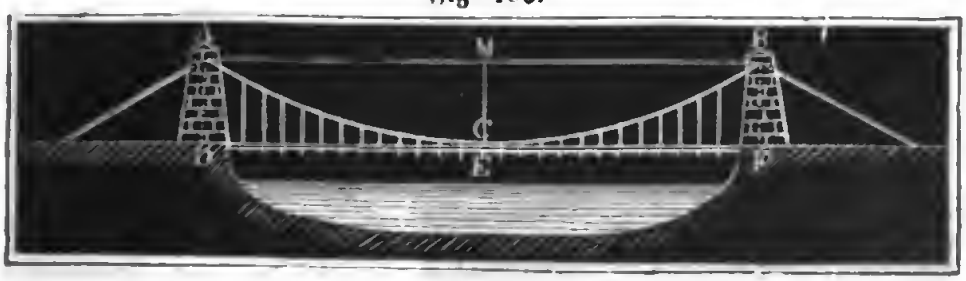
$$tang.\ \varphi = \frac{y}{b} \cdot \frac{2a}{b} = 2y \cdot \frac{a}{b^2} = 2y \cdot \frac{x}{y^2} = \frac{2x}{y}, \text{ ſowie}$$

$$tang.\ \alpha = \frac{2a}{b}.$$

Es ſchneidet alſo die Tangente OT die Abſciſſenaxe ſo, daß $CT = CN$ = Abſciſſe x iſt.

Wären die Ketten und Hängeiſen einer Kettenbrücke $ADFB$, Fig. 195,

Fig 195.



gewichtslos, oder leicht genug in Hinſicht auf das nur zu berückſichtigende Gewicht der belaſteten Brücke DEF, ſo würde die Kette ACB eine Parabel bilden.

Beiſpiel. Es ſei die ganze Belaſtung der Kettenbrücke in Fig. 195 = 320000 Pf., die Spannweite $AB = 2b = 150$ Fuß und die Bogenhöhe $CM = a = 15$ Fuß, man ſucht die Spannungen und übrigen Verhältniſſe der Kette. Die Neigung der Kettenenden gegen den Horizont iſt beſtimmt durch die Formel: $tang.\ \alpha = \frac{2a}{b} = \frac{30}{75} = \frac{2}{5} = 0{,}4$, es iſt alſo dieſelbe $\alpha = 21°{,}48'$. Die Vertikalſpannung an jedem Aufhängepunkte iſt $V_1 = \frac{1}{2}$ Gewicht = 160000 Pf.; die Horizontalſpannung $H = V_1\ cotg.\ \alpha = 160000 \cdot \frac{1}{0{,}4} = 400000$ Pf, endlich die Geſammtſpannung an einem Ende:

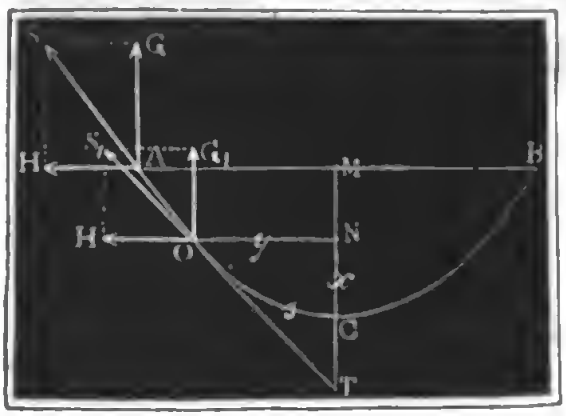
$$S = \sqrt{V^2 + H^2} = V\sqrt{1 + cotg.\ \alpha^2} = 160000 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{0{,}4}\right)^2}$$

$$= 160000\ \sqrt{\frac{29}{4}} = 80000\ \sqrt{29} = 430813\ \text{Pf.}$$

Kettenlinie. §. 145. Wird ein an zwei Punkten aufgehängtes vollkommen biegſames und unausdehnbares Seil, oder eine aus kurzen Gliedern beſtehende Kette, durch das eigene Gewicht geſpannt, ſo bildet die Axe derſelben eine krumme Linie, die den Namen Kettenlinie (franz. chainette, engl. catenary) erhalten hat. Die unvollkommen elaſtiſchen und ausdehnbaren Schnüre, Seile, Bänder, Ketten u. ſ. w., wie ſie im praktiſchen Leben vorkommen, geben krumme Linien, welche ſich der Kettenlinie nur annähern, meiſt aber als ſolche behandelt werden können. Nach dem Vorhergehenden iſt die Horizontalſpannung der Kettenlinie an allen Punkten gleich ſtark, dagegen die Vertikalſpannung gleich der Vertikalſpannung im darüber befindlichen Aufhängepunkte minus Gewicht des darüber befindlichen Kettenſtückes. Da die Spannung im Scheitel, wo die Kettenlinie horizontal iſt, ſich vernullt, alſo die Vertikalſpannung im Aufhängepunkte gleich iſt dem Gewichte der Kette vom Aufhängepunkte bis zum Scheitel, ſo iſt die Vertikalſpannung an jeder Stelle auch gleich dem Gewichte des darunter befindlichen Seil- oder Kettenſtückes.

Sind gleich lange Stücke der Kette gleich ſchwer, ſo entſteht die ſogenannte gemeine Kettenlinie, von welcher hier nur die Rede iſt. Wi gt ein Seil- oder Kettenſtück von 1 Fuß Länge γ, und iſt der den Coordinaten $CM = a$ und $MA = b$, Fig. 196, entſprechende Bogen $AOC = l$, ſo hat man das Gewicht des Kettenſtückes $AOC = l\gamma$; iſt dagegen die Länge des den Coordinaten $CN = x$ und $NO = y$ angehörigen Bogens $= s$, ſo hat man für das Gewicht dieſes Bogens $= s\gamma$. Setzen wir endlich die Länge eines gleichartigen Kettenſtückes, deſſen Gewicht gleich iſt der Horizontalſpannung H, $= c$, ſo haben wir noch $H = c\gamma$ und daher für die Neigungswinkel α und φ in den Punkten A und O:

Fig. 196.



$$tang.\ \alpha = tang.\ SAH = \frac{G}{H} = \frac{l\gamma}{c\gamma} = \frac{l}{c} \text{ und}$$

$$tang.\ \varphi = tang.\ NOT = \frac{s\gamma}{c\gamma} = \frac{s}{c}.$$

§. 146. Macht man die Horizontale CH, Fig. 197, $=$ der Länge c des die Horizontalſpannung meſſenden Kettenſtückes und CG gleich der

Länge l des Kettenbogens von der einen Seite, ſo bekommt man, in Uebereinſtimmung mit §. 142, in der Hypotenuſe GH das Maaß und die Richtung der Speilſpannung im Aufhängepunkte A, denn es iſt Kettenlinie.

Fig. 197.

$$tang\ CHG = \frac{CG}{CH} = \frac{l}{c} \text{ und}$$

$$\overline{GH} = \sqrt{\overline{CG}^2 + \overline{CH}^2} = \sqrt{l^2 + c^2},$$

$$\text{oder } S = \sqrt{G^2 + H^2} = \sqrt{l^2 + c^2} \,.\, \gamma$$

$$= \overline{GH} \,.\, \gamma.$$

Theilt man nun CG in gleiche Theile und zieht von H nach den Theilpunkten 1, 2, 3 u. ſ. w. gerade Linien, ſo geben dieſe die Maaße und Richtungen der Spannungen derjenigen Punkte in der Kettenlinie an, welche man erhält, indem man die Länge des Kettenbogens AC in ebenſo viel gleiche Theile theilt. So giebt z. B. die Linie $H3$ das Maaß und die Richtung der Spannung oder die Tangente im Theilpunkte (3) des Bogens AC an, weil in dieſem Punkte die Vertikalſpannung $= C3 \,.\, \gamma$ iſt, während die Horizontalſpannung unverändert $= c \,.\, \gamma$ bleibt, alſo für dieſen Punkt $tang.\ \varphi = \frac{C3 \,.\, \gamma}{c\gamma} = \frac{C3}{CH}$ iſt, wie die Figur auch wirklich giebt.

Dieſe Eigenthümlichkeit der Kettenlinie läßt ſich benutzen, um dieſe Curve annähernd genau mechaniſch zu conſtruiren. Nachdem man die gegebene Länge CG des zu conſtruirenden Kettenlinienbogens in ſehr viele gleiche Theile getheilt, die die Horizontalſpannung meſſende Linie $CH = c$ aufgetragen und die Transverſalen $H1$, $H2$, $H3$ u. ſ. w. gezogen hat, trage man auf CH einen Theil $C1$ des Kettenbogens auf, ziehe nun durch den erhaltenen Theilpunkt (1) mit der Transverſalen $H1$ eine Parallele und ſchneide von ihr wieder einen Theil (12) ab; ebenſo ziehe man durch den erhaltenen Endpunkt (2) eine Parallele zur Transverſalen $H2$ und ſchneide von ihr (23) gleich einem Bogentheile ab; jetzt ziehe man durch den neuen Endpunkt (3) eine Parallele zu $H3$, mache (34) wieder gleich einem Bogenſtück und fahre auf dieſe Weiſe fort. Wir erhalten zwar ſo ein Polygon ($C1234\ldots$), da wir indeſſen deſſen Seiten ſehr klein angenommen haben, ſo können wir es als eine Curve betrachten oder dazu leicht die Curve finden, indem wir die Mittelpunkte der kleinen Seiten ($C1$), (12), (23) u. ſ. w. durch einen Zug verbinden.

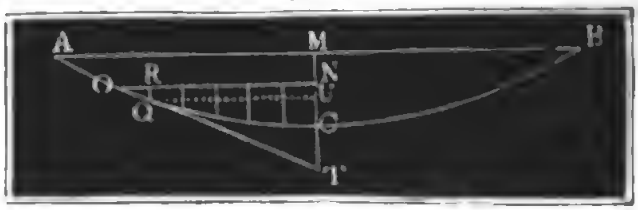
Durch Aufhängen einer feingegliederten Kette an einer ſenkrechten Wand

Kettenlinie. läßt ſich für praktiſche Bedürfniſſe oft genau genug eine Kettenlinie ebenfalls finden, welche gewiſſen Bedingungen z. B. einer gegebenen Bogenweite und Bogenhöhe, oder einer gegebenen Bogenweite und Bogenlänge u. ſ. w. entſpricht.

§. 147. In vielen Fällen, und namentlich auch bei Anwendungen in der Architektur und in dem Maſchinenweſen, iſt die Horizontalſpannung der Kettenlinie ſehr groß und deshalb ihre Bogenhöhe klein gegen die Weite. Unter dieſer Vorausſetzung ermittelt ſich eine Gleichung dieſer Curve auf folgende Weiſe.

Bezeichnet s die Länge, x die Abſciſſe CN und y die Ordinate NO eines ſehr gedrückten Bogens CO, Fig. 198, ſo können wir der beigefügten Anmerkung zu Folge annähernd

Fig. 198.



$$s = \left[1 + \tfrac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] y,$$

und daher die Vertikalſpannung in einem Punkte O eines niedrigen Kettenlinienbogens

$$V = \left[1 + \tfrac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] y\gamma,$$

und für den Tangentenwinkel $TON = \varphi$ deſſelben

$$tang.\ \varphi = \frac{s}{c} = \left[1 + \tfrac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] \frac{y}{c} \text{ ſetzen.}$$

Theilen wir die Ordinate y in m gleiche Theile, ſo finden wir das einem ſolchen Theile OR entſprechende Stück $RQ = NU$ der Abſciſſe x, indem wir ſetzen $RQ = OR.tang.\ \varphi = OR.\frac{y}{c}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]$.

Da x klein ſein ſoll gegen y, ſo iſt annähernd $RQ = OR.\frac{y}{c}$. Setzt man nun $OR = \frac{y}{m}$ und ſucceſſiv für y : $\frac{y}{m}, \frac{2y}{m}, \frac{3y}{m}$ u. ſ. w., ſo bekommt man nach und nach ſämmtliche Theile von x, deren Summe nun

$$x = \frac{y^2}{cm^2}(1 + 2 + 3 + \ldots + m) = \frac{y^2}{cm^2}.\frac{m(m+1)}{2} \text{ (§. 144)} = \frac{y^2}{2c}$$

iſt und wieder der Gleichung der Parabel entſpricht.

Kettenlinie.

Gehen wir aber noch genauer, ſetzen wir in $QR = OR \,.\, \frac{y}{c}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]$, ſtatt x den letztgefundenen Werth $\frac{y^2}{2c}$ ein, ſo erhalten wir

$$QR = OR \,.\, \frac{y}{c}\left(1 + \frac{1}{6}.\frac{y^2}{c^2}\right) = \frac{OR}{c}\left(y + \frac{1}{6}.\frac{y^3}{c^2}\right).$$

Nehmen wir nun wieder nach einander $y = \frac{y}{m}, \frac{2y}{m}, \frac{3y}{m}$ u. ſ. w. und ſetzen wir ſtatt OR ebenfalls $\frac{y}{m}$, ſo finden wir ſämmtliche Theile von x, und die Summe ſelbſt:

$$x = \frac{y}{cm}\left[\frac{y}{m}(1+2+3+\ldots+m) + \frac{1}{6c^2}.\left(\frac{y}{m}\right)^3(1^3+2^3+3^3+\ldots+m^3)\right].$$

Für eine ſehr große Anzahl von Gliedern iſt aber die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis $m = \frac{m^2}{2}$ und die Summe ihrer Cuben $= \frac{m^4}{4}$ (ſ. »Ingenieur, Seite 144«), es iſt demnach

$$x = \frac{y}{c}\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{6c^2}.\frac{y^3}{4}\right), \text{ d. i.}$$

1) $x = \frac{y^2}{2c} + \frac{y^4}{24c^3} = \frac{y^2}{2c}\left[1 + \frac{1}{12}.\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]$, die Gleichung einer ſtark geſpannten Kettenlinie.

Durch Umkehrung folgt

$$y^2 = 2cx - \frac{y^4}{12c^2} = 2cx - \frac{4c^2x^2}{12c^2} = 2cx - \frac{x^2}{3}, \text{ daher}$$

2) $y = \sqrt{2cx - \frac{x^2}{3}}$, oder annähernd $y = \sqrt{2cx}\left(1 - \frac{x}{12c}\right)$.

Das Maaß der Horizontalſpannung ergiebt ſich ferner

$$c = \frac{y^2}{2x} + \frac{y^4}{2x.12c^2} = \frac{y^2}{2x} + \frac{y^4}{24x}.\frac{4x^2}{y^4}, \text{ d. i.}$$

3) $c = \frac{y^2}{2x} + \frac{x}{6}$.

Der Tangentenwinkel φ wird beſtimmt durch

$$tang\ \varphi = \frac{y}{c}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] = \frac{y\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]}{\frac{y^2}{2x}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{2x}{y}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right], \text{ d. i.}$$

Kettenlinie.

4) $tang.\ \varphi = \frac{2x}{y}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]$.

Hierzu iſt endlich noch die Rectificationsformel:

5) $s = y\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] = y\left[1+\frac{1}{6}\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]$ zu ſetzen.

Beiſpiele. 1) Für eine Spannweite $2b = 16$ Fuß und Bogenhöhe $a = 2\frac{1}{2}$ Fuß iſt die Länge $2l = 16 \cdot \left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{2}{8}\right)^2\right] = 16 + 16 \cdot 0{,}065$ $= 17{,}04$ Fuß, ferner die Länge des die Horizontalſpannung meſſenden Kettenſtückes: $c = \frac{b^2}{2a} + \frac{a}{6} = \frac{64}{5} + \frac{5}{12} = 12{,}8 + 0{,}417 = 13{,}217$ Fuß; die Tangente des Aufhängewinkels: $tang.\ \alpha = \frac{2a}{b}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] = \frac{5}{8}\cdot\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{5}{16}\right)^2\right]$ $= \frac{5 \cdot 1{,}03255}{8} = 0{,}6453\ldots$, der Aufhängewinkel ſelbſt aber $\alpha = 32°, 50'$.

2) Eine Kette von 10 Fuß Länge und $9\frac{1}{2}$ Fuß Spannweite hat die Bogenhöhe

$$a = \sqrt{\frac{3}{2}(l-b)b} = \sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{(10-9\frac{1}{2})\cdot 9\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{19}{16}} = \sqrt{\frac{57}{32}}$$

$= \sqrt{1{,}7812} = 1{,}335$ Fuß, und das Maaß der Horizontalſpannung

$$c = \frac{b^2}{2a} + \frac{a}{6} = \frac{4{,}75^2}{2 \cdot 1{,}335} + \frac{1.335}{6} = 8{,}673 \text{ Fuß}.$$

3) Wenn eine 30 Fuß lange und 8 Pfund ſchwere Schnur mit einer Kraft von 20 Pf. ſo viel wie möglich horizontal ausgeſpannt wird, ſo iſt die Vertikalſpannung $V = \frac{1}{2}G = 4$ Pf., die Horizontalkraft $H = \sqrt{S^2 - V^2} = \sqrt{20^2 - 4^2} = \sqrt{\frac{384}{4}}$ $= 19{,}596$ Pf., die Tangente des Aufhängewinkels: $tang.\ \varphi = \frac{V}{H} = \frac{4}{19\,596}$ $= 0{,}20412$, der Winkel φ ſelbſt $= 11°, 32'$; das Maaß der Horizontalſpannung $c = \frac{H}{\gamma} = H : \frac{8}{30} = \frac{30}{8} H = 73{,}485$ Fuß, die Spannweite $2b$ iſt

$= 2l\left[1-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{l}{c}\right)^2\right] = 30 \cdot \left[1-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{15}{73{,}48}\right)^2\right] = 30 - 0{,}208$ $= 29{,}792$ Fuß und die Bogenhöhe $a = \sqrt{\frac{3}{2}b(l-b)} = \sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{29{,}792 \cdot 0{,}208}{2 \cdot 2}}$ $= \sqrt{29{,}792 \cdot 0{,}078} = 1{,}524$ Fuß.

Anmerkung 1. Man findet aus dem Halbmeſſer $CA = CB = CD = r$ und der Ordinate $AM = y$ eines Kreisbogens AB Fig. 199 a. f. S., die Ordinate $AN = BN = y_1$ des halben Bogens $AD = BD$, wenn man ſetzt

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{AM}^2 + (CB - CM)^2$$

$$= \overline{AM}^2 + (CB - \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AM}^2})^2 = 2CA^2 - 2CA\sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AM}^2}, \text{ d. i}$$

$$4y_1^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - y^2}.$$

Es iſt hiernach $y_1 = \sqrt{\frac{r^2 - r\sqrt{r^2 - y^2}}{2}}$, oder annähernd, wenn y klein iſt gegen r,

$$y_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[r^2 - r\left(r - \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3}\right)\right]} = \sqrt{\frac{y^2}{4}\left(1 + \frac{y^2}{4r^2}\right)}$$

$$= \frac{y}{2}\left(1 + \frac{y^2}{8r^2}\right).$$

Durch wiederholte Anwendung dieſer Formel findet man die Ordinate des Viertelbogens Kettenlinie.

$$y_2 = \frac{y_1}{2}\left(1 + \frac{y_1^2}{8r^2}\right) = \frac{y}{4}\left(1 + \frac{y^2}{8r^2}\right)\left(1 + 1/4 \cdot \frac{y^2}{8r^2}\right).$$

ferner die des Achtelbogens

$$y_3 = \frac{y_2}{2}\left(1 + \frac{y_2^2}{8r^2}\right) = \frac{y}{8}\left(1 + \frac{y^2}{8r^2}\right)\left(1 + 1/4 \cdot \frac{y^2}{8r^2}\right)\left(1 + (1/4)^2 \frac{y^2}{8r^2}\right)$$

$$= \frac{y}{8}\left(1 + [1 + 1/4 + (1/4)^2]\frac{y^2}{8r^2}\right).$$

Da die Ordinaten ſehr kleiner Bögen den Bögen gleichgeſetzt werden können, ſo erhalten wir hiernach den Bogen AB annähernd.

$$s = 8 \cdot y_3 = y\left(1 + [1 + 1/4 + (1/4)^2]\frac{y^2}{8r^2}\right), \text{ oder genauer}$$

$$= y\left(1 + [1 + 1/4 + (1/4)^2 + (1/4)^3 + \ldots]\frac{y^2}{8r^2}\right).$$

Aber $1 + 1/4 + (1/4)^2 + (1/4)^3 + \ldots$ iſt (nach Ingen. S. 138) $= \frac{1}{1 - 1/4}$ $= 4/3$, daher folgt denn

$$s = \left(1 + \frac{y^2}{6r^2}\right) y;$$

oder wenn man ſtatt r die Abſciſſe $BM = x$ einführt, und $2rx = y^2$ ſetzt

$$s = \left[1 + 1/5\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] y.$$

Dieſe Formel iſt nicht bloß für Kreisbögen, ſondern für alle gedrückte Curvenbögen anzuwenden.

Fig. 199.

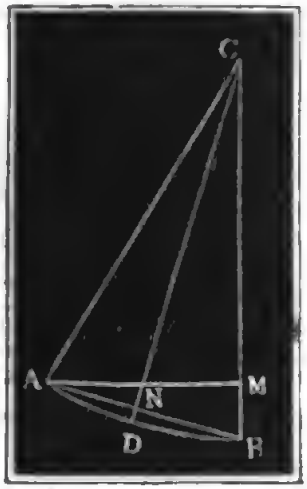
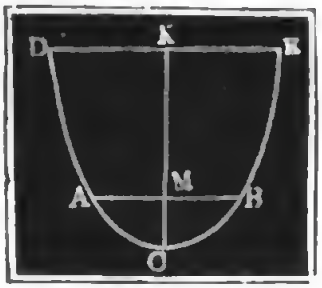


Fig. 200.



Anmerkung 2. Vergleicht man die gefundene Gleichung

$y = \sqrt{2cx - \frac{x^2}{3}}$ mit der Gleichung

$y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$ einer Ellipſe (S. Ingen. S. 237), ſo findet man $\frac{b^2}{a} = c$ und $\frac{b^2}{a^2} = 1/3$, folglich $a = 3c$ und $b = a\sqrt{1/3} = c\sqrt{3}$.

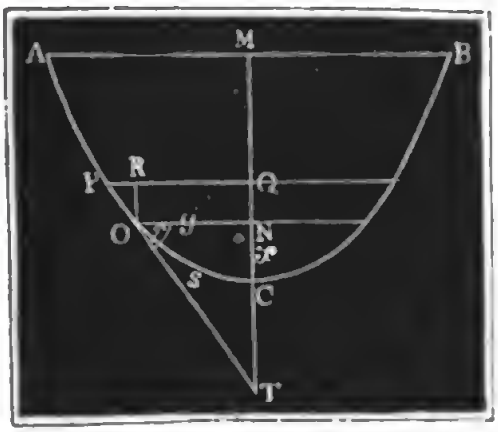
Es läßt ſich alſo eine ſtark geſpannte Kettenlinie als ein Bogen ACB, Fig. 200, einer Ellipſe anſehen, deren große Halbaxen $KC = a = 3c$ und kleine Halbaxe $KD = KE = b = c\sqrt{3}$ iſt.

Digitized by Google

Kettenlinie. §. 148*). Die vollſtändige Gleichung einer gemeinen Kettenlinie läßt ſich mittels des höheren Calculs auf folgende Weiſe finden.

Nach §. 145 iſt für den Aufhängewinkel $TON = \varphi$, Fig. 201, welchen die Berührungslinie OT eines Punktes O der Kettenlinie ACB mit der horizontalen Ordinate ON einſchließt, wenn der Bogen CO durch s bezeichnet und die Horizontalſpannung $= c\gamma$ geſetzt wird,

Fig. 201.



$$tang.\,\varphi = \frac{s}{c}.$$

Nun iſt aber φ auch gleich dem Winkel OPR, welchen ein Bogenelement $OP = ds$ mit einem Elemente $PR = dy$ der Ordinate $ON = y$ einſchließt, und

$$tang.\,OPR = \frac{OR}{PR} = \frac{dx}{dy},$$

da OR als ein Element dx der Ordinate $CN = x$ anzuſehen iſt; demnach folgt denn $\frac{dx}{dy} = \frac{s}{c}$, oder $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{c^2}{s^2}$. Auch iſt $ds^2 = dx^2 + dy^2$, alſo $dy^2 = ds^2 - dx^2$, und daher

$$\frac{ds^2 - dx^2}{dx^2} = \frac{c^2}{s^2}.$$

Durch weitere Umformung ergiebt ſich

$$dx^2\,(s^2 + c^2) = s^2\,ds^2, \text{ oder } dx = \frac{s\,ds}{\sqrt{s^2 + c^2}}.$$

Setzt man $s^2 + c^2 = u$, ſo erhält man $2\,s\,ds = du$, und

$$dx = \frac{\frac{1}{2}\,du}{u^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\,u^{-\frac{1}{2}}\,du;$$

und durch Integration folgt nun (nach Art. 13 der analyt. Hülfslehren):

$$x = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + Const. = \sqrt{u} + Const.$$
$$= \sqrt{s^2 + c^2} + Const.,$$

endlich, da x und s zugleich Null ſind, alſo $0 = \sqrt{c^2} + Const.$, d. i. $Const. = -c$ iſt:

1) $x = \sqrt{s^2 + c^2} - c$; ſo wie umgekehrt
$s = \sqrt{(x+c)^2 - c^2} = \sqrt{2cx + x^2}$, und
$c = \frac{s^2 - x^2}{2x}$.

Beiſpiel. Wenn eine 10 Fuß lange und 30 Pfund ſchwere Kette ACB ſo aufgehangen wird, daß die Bogenhöhe $CM = 4$ Fuß beträgt, ſo hat man Kettenlinie.

$$\gamma = {}^{30}/_{10} = 3 \text{ Pf.}$$

$$c = \frac{s^2 - x^2}{2x} = \frac{s^2 - 4^2}{8} = {}^{9}/_{8} \text{ und daher}$$

die Horizontalſpannung $H = c\gamma = 3 . {}^{9}/_{8} = 3{}^{3}/_{8}$ Pfund.

§. 149*). So wie wir im vorigen Paragraphen durch Entfernung von dy auf eine Gleichung zwiſchen dem Bogen s und der Abſciſſe geſtoßen ſind, eben ſo können wir nun durch Eliminirung von dx eine Gleichung zwiſchen dem Bogen s und der Ordinate y finden. Man ſetzt zu dieſem Zwecke in der Gleichung

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{c^2}{s^2}, \quad dx^2 = ds^2 - dy^2,$$

und erhält ſo die Gleichung

$$\frac{s^2}{c^2} = \frac{ds^2 - dy^2}{dy^2}, \text{ oder } dy^2 (s^2 + c^2) = c^2 ds^2, \text{ alſo}$$

$$dy = \frac{c\,ds}{\sqrt{s^2 + c^2}}.$$

Dividirt man im Zähler und Nenner durch c und ſetzt $\frac{s}{c} = v$, ſo erhält man

$$dy = c . \frac{d\left(\frac{s}{c}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{c}\right)^2}} = \frac{c\,dv}{\sqrt{1 + v^2}},$$

und es liefert nun die Formel XIV. im Art. 20 der analytiſchen Hülfslehren das entſprechende Integral

$$y = c \int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = c . \textit{Log.nat.} (v + \sqrt{1+v^2}), \text{ d. i.}$$

$$2) \quad y = c \textit{ Log.nat.} \left(\frac{s + \sqrt{s^2 + c^2}}{c}\right).$$

Setzt man in dieſer Formel $s = \sqrt{2cx + x^2}$, ſo erhält man die eigentliche Coordinatengleichung der gemeinen Kettenlinie

$$3) \quad y = c . \textit{Log. nat.} \left(\frac{c + x + \sqrt{2cx + x^2}}{c}\right),$$

eliminirt man aber c, ſo ergiebt ſich die Gleichung

$$4) \quad y = \frac{s^2 - x^2}{2x} \textit{ Log. nat.} \left(\frac{s+x}{s-x}\right).$$

Endlich folgt aber durch Umkehrung von 2. und 3.:

$$5) \quad s = \left(e^{\frac{y}{c}} - e^{-\frac{y}{c}}\right) . \frac{c}{2} \text{ und}$$

Kettenlinie.

$$6)\quad x = \left[\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{y}{c}} + e^{-\frac{y}{c}}\right) - 1\right] c,$$

und es bezeichnet e die Grundzahl 2,71828.. des natürlichen Logarithmenſyſtemes (ſ. Art. 14 der analytiſchen Hülfslehren).

Beiſpiel. Zwei zuſammengehörige Coordinaten einer Kettenlinie ſind $x = 2$ Fuß und $y = 3$ Fuß, man ſucht die Horizontalſpannung c dieſer Curve? Annähernd iſt nach No. 3 des Paragraphen 47, $c = \frac{y^2}{2x} + \frac{x}{6} = \frac{9}{4} + \frac{2}{6} = 2{,}58$. Nach No. 3 dieſes Paragraphen iſt aber genau $y = c\,Ln\left(\frac{c+x+\sqrt{2cx+x^2}}{c}\right)$, d. i. $3 = c\,Ln\left(\frac{c+2+\sqrt{4c+4}}{c}\right)$. Hierin $c = 2{,}58$ geſetzt, bekommt man den Fehler $f = 3 - 2{,}58\,Ln\left(\frac{4{,}58+2\sqrt{3{,}58}}{2{,}58}\right) = 3 - 2{,}58\;Ln\left(\frac{8{,}3642}{2{,}58}\right)$ $= 3 - 3{,}035 = -0{,}035$; nimmt man aber $c = 2{,}53$, ſo erhält man den Fehler $f_1 = 3 - 2{,}53\,Ln\left(\frac{4{,}53+2\sqrt{3{,}53}}{2{,}53}\right) = 3 - 2{,}53\;Ln\left(\frac{8{,}2876}{2{,}53}\right)$ $= 3 - 3{,}002 = -0{,}002$. Um nun den wahren Werth von c zu finden, ſetzen wir nach einer bekannten Regel (ſ. Ingenieur, Seite 129),

$$\frac{c-2{,}58}{c-2{,}53} = \frac{f}{f_1} = \frac{0{,}035}{0{,}002} = 17{,}5, \text{ auf dieſe Weiſe folgt}$$

$$16{,}5\,.\,c = 17{,}5\,.\,2{,}53 - 2{,}58 = 41{,}69, \text{ daher}$$

$$c = \frac{41{,}69}{16{,}5} = 2{,}527 \text{ Fuß}.$$

Anmerkung. Sehr einfach laſſen ſich s, x und y durch den Aufhängewinkel φ ausdrücken; es iſt nämlich nach dem Vorſtehenden

$$s = c\;tang.\;\varphi = \frac{c\;sin.\;\varphi}{cos.\;\varphi}, \text{ ferner}$$

$$x = c\,(\sqrt{1 + tang.\;\varphi^2} - 1) = \frac{c\,(1 - cos.\;\varphi)}{cos.\;\varphi} \text{ und}$$

$$y = c\;Log.\;nat.\;(tang.\;\varphi + \sqrt{1 + tang.\;\varphi^2}) = c\;Log.\;nat.\left(\frac{1+sin.\varphi}{cos.\;\varphi}\right).$$

Mittels dieſer Formeln kann man die Bogen- und Coordinatenlängen für verſchiedene Neigungs- oder Aufhängewinkel berechnen, und es läßt ſich hierzu leicht eine zweckmäßige Tabelle, wie im Ingenieur S. 399, anfertigen. Hierbei hat man nur eine einzige Kettenlinie, am beſten diejenige, bei welcher das Maaß c der Horizontalſpannung $= 1$ iſt, zu Grunde zu legen; für eine andere Kettenlinie, welche der Horizontalſpannung c entſpricht, findet man dann s, x und y, indem man die durch die Tabelle angegebenen Werthe von s, x und y mit c multiplicirt.

Rolle.

§. 150. Seile, Riemen u. ſ. w. ſind auch die gewöhnlichſten Mittel, wodurch Kräfte auf Rollen und Radwellen übergetragen werden. Von den Theorien dieſer beiden Vorrichtungen möge deshalb hier noch das Allgemeinſte, ſoviel es ohne Berückſichtigung der Reibung und Steifigkeit möglich iſt, entwickelt werden.

Eine Rolle (franz. poulie, engl. pulley) iſt eine um eine Axe drehbare kreisförmige Scheibe ABC, Fig. 202 und Fig. 203, um deren Rolle.

Fig. 202.

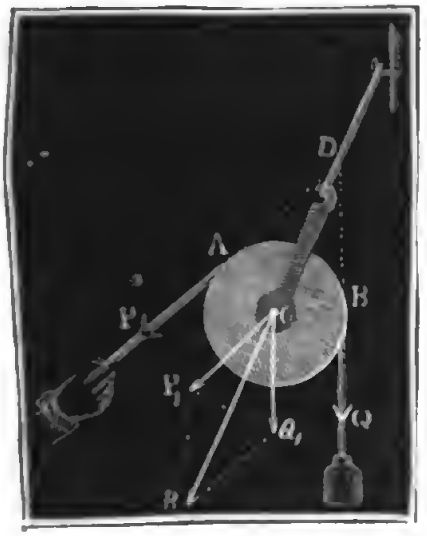
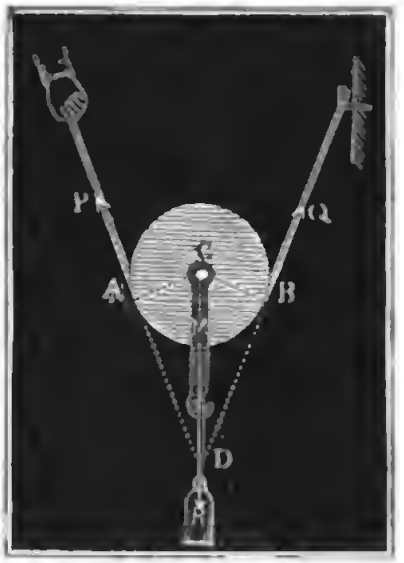


Fig. 203.



Umfang ein Seil liegt, deſſen Enden durch Kräfte P und Q angeſpannt werden. Bei einer feſten Rolle (franz. p. fixe, engl. fixed p.) iſt das Gehäuſe oder Lager (franz. chape, engl. block), worin ihre Axen oder Zapfen ruhen, unbeweglich, bei einer loſen Rolle (franz. p. mobile, engl. moveable p., hingegen iſt das Zapfengehäuſe beweglich.

Im Gleichgewichtszuſtande einer jeden Rolle ſind die Kräfte P und Q an den Seilenden gleich groß, denn jede Rolle iſt ein gleicharmiger Winkelhebel, den man erhält, wenn man von der Axe C Perpendikel CA und CB auf die Kräfte- oder Seilrichtungen DP und DQ fällt. Auch iſt klar, daß die Kräfte P und Q bei irgend einer Drehung um C einerlei Weg, nämlich $r\varphi$, zurücklegen, wenn r den Halbmeſſer $CA = CB$ und φ^0 den Umdrehungswinkel bezeichnet, und daß ſich auch hieraus auf die Gleichheit zwiſchen P und Q ſchließen läßt. Aus den Kräften P und Q entſpringt aber eine vom Zapfenlager aufzunehmende Mittelkraft $CR = R$, die von dem Winkel $ADB = \alpha$, unter welchem die Seilrichtungen zuſammenſtoßen, abhängig iſt und ſich als Diagonale des aus P und α zu conſtruirenden Rhombus CP_1RQ_1, $R = 2\,P\,cos.\,\frac{\alpha}{2}$ ergiebt.

§. 151. Bei der feſten Rolle, Fig. 202, beſteht die Kraft Q an einem Seilende in der zu überwindenden oder zu hebenden Laſt, es iſt daher hier Kraft gleich Laſt, und es bewirkt die Anwendung dieſer Rolle nichts weiter als eine Richtungsveränderung. Bei der loſen Rolle, Fig. 203, hingegen wirkt die Laſt R an dem hakenförmigen Ende des Zapfenlagers,

Rolle. während das eine Seilende an einem unbeweglichen Gegenſtande befeſtigt iſt; hier iſt alſo die Kraft $P = \frac{R}{2\,cos.\frac{\alpha}{2}}$ zu ſetzen. Bezeichnen wir die Sehne AMB, welche dem mit Seil bedeckten Bogen entſpricht, durch a und den Halbmeſſer $CA = CB$, wie vorhin durch r, ſo iſt $a = 2\,AM = 2\,.\,CA\,cos.\,CAM = 2\,CA\,cos.\,ADM = 2\,r\,cos.\,\frac{\alpha}{2}$, es läßt ſich daher $\frac{r}{a} = \frac{1}{2\,cos.\frac{\alpha}{2}}$ und ebenſo $\frac{P}{R} = \frac{r}{a}$ ſetzen. Dieſem nach verhält ſich alſo bei

Fig. 204.

der loſen Rolle die Kraft zur Laſt, wie der Halbmeſſer der Rolle zur Sehne des Seilbogens.

Iſt $a = 2r$, bedeckt alſo das Seil einen Halbkreis, Fig. 204, ſo fällt die Kraft am kleinſten, nämlich $P = \frac{1}{2} R$ aus; iſt $a = r$, alſo 60^0 von der Rolle mit Seil bedeckt, ſo hat man $P = R$. Je kleiner nun a ausfällt, deſto größer wird P, und für ein unendlich kleines a, d. h. für eine unendlich kleine Seilbedeckung iſt die Kraft P unendlich groß. Bei den Wegen tritt ein umgekehrtes Verhältniß ein; iſt s der Weg von P, welcher einem Wege h von R entſpricht, ſo hat man $Ps = Rh$, daher $\frac{s}{h} = \frac{a}{r}$.

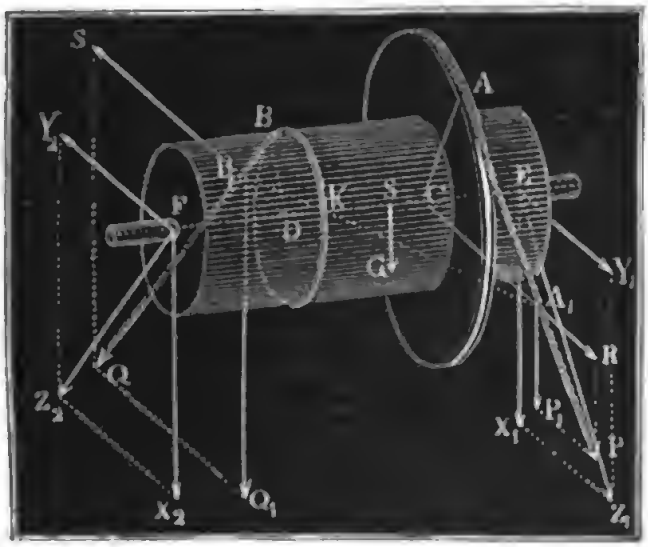
Die loſe Rolle iſt alſo ein Mittel zur Kraftveränderung; es läßt ſich durch dieſelbe z. B. eine gegebene Laſt durch eine kleinere Kraft heben; in dem Verhältniſſe aber, um welches man an Kraft gewinnt, verliert man an Weg.

Anmerkung. Von der Zuſammenſetzung der Rollen zu Rollen- und Flaſchenzügen, ſowie von dem Einfluſſe der Reibung und des Steifigkeitswiderſtandes wird ſpäter ausführlich gehandelt werden.

Radwelle. §. 152. Die Radwelle (franz. roue sur l'arbre, engl. wheel and axle) iſt eine feſte um eine gemeinſchaftliche Axe drehbare Verbindung, $ABFE$, Fig. 205 (a. f. S.), von zwei feſten Rollen oder Rädern. Das kleinere von dieſen Rädern heißt Welle (franz. arbre, engl. axle), das größere aber Rad (franz. roue, engl. wheel). Die runden Enden E und F, womit die Vorrichtung aufruht, heißen Zapfen (franz. tourillons, engl. trunnions). Die Umdrehungsaxe einer Radwelle iſt entweder horizontal, oder vertikal — oder ſchief. Hier ſoll zunächſt nur von derjenigen Rad-

welle die Rede ſein, welche ſich um eine horizontale Axe dreht; auch wollen wir hier vorausſetzen, daß die Kräfte P und Q oder Kraft P und Laſt Q an den Enden vollkommen biegſamer Seile wirken, die um die Umfänge des Rades und der Welle gelegt ſind. Die zu beantwortenden Fragen ſind: in welchem Verhältniſſe ſtehen Kraft P und Laſt Q zu einander, und welche Drücke haben die Zapfenlager bei E und F aufzunehmen? Radwelle.

Fig. 205.



Denken wir uns durch die Axe CD eine Horizontalebene gelegt und die Angriffspunkte A und B der Kraft P und Laſt Q in dieſe Ebene verſetzt, denken wir uns alſo die Kräfte P und Q in A_1 und B_1 angreifend. Sind die Winkel AA_1C und BB_1D, welche beide Kräfte mit dem Horizonte einſchließen, $= \alpha$ und β, ſo laſſen ſich dieſe Kräfte durch die Horizontalkräfte $R = P \cos. \alpha$, $S = Q \cos. \beta$ und durch die Vertikalkräfte $P_1 = P \sin. \alpha$ und $Q_1 = Q \sin. \beta$ erſetzen. Die Horizontalkräfte ſind nach der Axe gerichtet, können in C und D angreifend angenommen und deshalb von der Axe vollkommen aufgenommen werden. Die Vertikalkräfte P_1 und Q_1 hingegen ſuchen die Radwelle um die Axe zu drehen. Iſt K der Durchſchnitt zwiſchen der die Angriffspunkte A_1 und B_1 verbindenden Linie mit der Axe CD, ſo ſind KA_1 und KB_1 die Hebelarme von P_1 und Q_1, und es iſt Gleichgewicht um K und alſo auch um CD, wenn

$$P_1 . KA_1 = Q_1 . KB_1, \text{ oder, da } \frac{KA_1}{KB_1} = \frac{CA_1}{DB_1}, \text{ wenn}$$

$$P_1 . CA_1 = Q_1 . DB_1, \text{ oder, da } \frac{P_1}{P} = \frac{CA}{CA_1} \text{ und}$$

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{DB}{DB_1} \text{ iſt,}$$

$$\frac{P . CA}{CA_1} . CA_1 = \frac{Q . DB}{DB_1} . DB_1, \text{ d. i.}$$

$$P . CA = Q . DB, \text{ oder } Pa = Qb,$$

wo a und b die Hebelarme der Kraft und Laſt oder die Halbmeſſer des Rades und der Welle bezeichnen. Bei einer Radwelle iſt alſo, wie

Radwelle. bei jedem Hebel, das ſtatiſche Kraftmoment gleich dem ſtatiſchen Laſtmomente.

§. 153. Die Kräfte P_1 und Q_1 erzeugen in K einen Vertikaldruck P_1+Q_1, zu dem ſich noch das im Schwerpunkte S angreifende Gewicht G der ganzen Radwelle geſellt. Beide Zapfenlager E und F haben alſo den Vertikaldruck $P_1+Q_1+G=P\sin.\alpha+Q\sin.\beta+G$ auszuhalten. Setzen wir die ganze Länge der Radwelle, von Zapfen E zu Zapfen F gemeſſen, $=l$, die Theile $EC=l_1$, $CD=l_2$, $DF=l_3$, alſo $l=l_1+l_2+l_3$ und die Entfernungen ES und FS des Schwerpunktes S von den Lagern $=d_1$ und $=d_2$, alſo auch $l=d_1+d_2$, ſo bekommen wir, da noch

$$\frac{DK}{DC}=\frac{P_1}{P_1+Q_1},\quad \text{alſo } DK=\frac{P_1 l_2}{P_1+Q_1}$$

iſt, für den Vertikaldruck X_1 im Zapfen E:

$$X_1 . EF = G . FS + (P_1+Q_1)\, FK,$$

$$X_1=\frac{G d_2+(P_1+Q_1)\left(l_3+\frac{P_1}{P_1+Q_1}\cdot l_2\right)}{l},\quad \text{d. i.}$$

$$X_1=\frac{G d_2+(P_1+Q_1)l_3+P_1 l_2}{l}.$$

Dagegen für den Vertikaldruck X_2 im Zapfen F:

$$X_2 . EF = G . ES + (P_1+Q_1)\, EK,\quad \text{d. i.}$$

$$X_2=\frac{G d_1+(P_1+Q_1)\left(l_1+\frac{Q_1}{P_1+Q_1}\cdot l_2\right)}{l},\quad \text{d. i.}$$

$$X_2=\frac{G d_1+(P_1+Q_1)\, l_1+Q_1 l_2}{l}.$$

Was noch die Horizontalkräfte R und S betrifft, ſo haben dieſe in Beziehung auf F die Momente $R.FC=R(l_2+l_3)$ und $S.FD=S.l_3$, und in Beziehung auf E: $S.ED=S(l_1+l_2)$ und $R.EC=Rl_1$; ſetzen wir daher die von ihnen hervorgebrachten Horizontaldrücke auf die Zapfen E und $F=Y_1$ und Y_2, ſo erhalten wir:

$$Y_1 . FE = R . FC - S . FD,\ \text{alſo}$$

$$Y_1=\frac{R(l_2+l_3)-Sl_3}{l},\ \text{und}$$

$$Y_2 . FE = S . ED - R . EC,\ \text{alſo}$$

$$Y_2=\frac{S(l_1+l_2)-Rl_1}{l}.$$

Aus X_1 und Y_1 folgt der geſammte Zapfendruck in E:

$Z_1=\sqrt{X_1^2+Y_1^2}$, und ebenſo aus X_2 und Y_2 derſelbe in F:

$Z_2=\sqrt{X_2^2+Y_2^2}$.

Sind endlich noch φ und ψ die Winkel, welche die Richtungen dieſer Drücke mit dem Horizonte bilden, ſo hat man Radwelle.

$$tang.\ \varphi = \frac{X_1}{Y_1} \text{ und } tang.\ \psi = \frac{X_2}{Y_2}.$$

Beiſpiel. Die Laſt Q einer Radwelle zieht ſenkrecht nieder und beträgt 365 Pf.; der Halbmeſſer des Rades: a iſt $= 1^3/_4$ Fuß; der Halbmeſſer der Welle: $b = {}^3/_4$ Fuß; das Gewicht der leeren Radwelle beträgt 200 Pf; ihr Schwerpunkt ſteht von den Zapfenlagen E und F um $d_1 = 1^1/_2$ und $d_2 = 2^1/_2$ Fuß ab, das Radmittel iſt um $l_1 = {}^3/_4$ Fuß vom Zapfen E und die Vertikalebene, in welcher die Laſt wirkt, iſt um $l_2 = 2$ Fuß vom Zapfen F entfernt; wenn nun die zur Herſtellung des Gleichgewichtes nöthige Kraft P am Rade, unter einem Winkel α von 50 Grad vom Horizonte abweichend, niederzieht, wie groß wird dieſelbe ausfallen und welches werden die Zapfendrücke ſein? Es iſt $Q = 365$, $\beta = 90°$, folglich $Q_1 = Q\ sin.\ \beta = Q$ und $S = Q\ cos.\ \beta = 0$, ferner P unbekannt und $\alpha = 50°$, daher $P_1 = P\ sin.\ \alpha = 0{,}7660\ .\ P$ und $R = P\ cos.\ \alpha = 0{,}6428\ .\ P$; nun iſt aber $a = 1^3/_4 = {}^7/_4$ und $b = {}^3/_4$, es folgt daher $P = \frac{b}{a} Q = {}^3/_7 . 365 = 156{,}4$ Pf., $P_1 = 119{,}8$ und $R = 100{,}5$.

Weil ferner $G = 200$, $d_1 = {}^3/_2$, $d_2 = {}^5/_2$, $l_1 = {}^3/_4$, $l_2 = 2$, $l = {}^3/_2 + {}^5/_2 = 4$, und $l_3 = l - (l_1 + l_2) = 4 - {}^{11}/_4 = {}^5/_4$, ſo ergiebt ſich der Vertikaldruck in E:

$$X_1 = \frac{200 . {}^5/_4 + (365 + 119{,}8) . 2 + 119{,}8 . {}^5/_4}{4} = \frac{1619{,}35}{4} = 404{,}8 \text{ Pf.},$$

der Vertikaldruck in F:

$$X_2 = \frac{200 . {}^3/_4 + (365 + 119{,}8) . {}^3/_4 + 365 . {}^5/_4}{4} = \frac{1119{,}85}{4} = 280{,}0 \text{ Pf.}$$

Dieſe beiden Kräfte geben zuſammen, wie ſehr recht,

$$X_1 + X_2 = Q + G + P_1 = 684{,}8 \text{ Pf.}$$

Die Horizontalkraft im Zapfen E iſt:

$$Y_1 = \frac{100{,}5 . ({}^5/_4 + 2) - 0 . 2}{4} = 81{,}7 \text{ Pf. und die in } F:$$

$$Y_2 = \frac{0 . ({}^5/_4 + {}^3/_4) - 100{,}5 . {}^3/_4}{4} = -\ 18{,}8 \text{ Pf.};$$

die Summe dieſer Kräfte iſt richtig $= R + S = 100{,}5$ Pf.

Der Zapfendruck in E iſt unter dem Winkel φ gegen den Horizont gerichtet, für welchen man hat:

$$tang.\ \varphi = \frac{X_1}{Y_1} = \frac{404{,}8}{81{,}7},\ Log.\ tang.\ \varphi = 0{,}69502,\ \varphi = 78°{,}35'.$$

Der Druck ſelbſt iſt: $Z_1 = \frac{X_1}{sin.\ \varphi} = 413{,}0$ Pf.

Im Zapfen F iſt hingegen für die Neigung ψ des Zapfendruckes:

$$tang.\ \psi = \frac{X_2}{Y_2} = \frac{280{,}0}{18{,}8},\ Log.\ tang.\ \psi = 1{,}17300,\ \psi = 86°{,}9'{,}5;$$

und dieſer Druck ſelbſt: $Z_2 = \frac{Y_2}{cos.\ \psi} = 280{,}6$ Pf.

Fünftes Kapitel.

Die Widerſtände der Reibung und Steifigkeit.

Reibung. §. 154. Wir haben ſeither angenommen (§. 128), daß zwei Körper nur durch Kräfte winkelrecht zur gemeinſchaftlichen Berührungsebene auf einander wirken können. Wären dieſe Körper vollkommen ſtarr und ihre Oberflächen an den Stellen der Berührung vollkommen mathematiſche, d. h. auch nicht von den kleinſten ungeſetzmäßigen Erhabenheiten und Vertiefungen unterbrochen, ſo würde dieſes Geſetz auch durch die Erfahrung vollkommen beſtätigt werden; weil aber jeder materielle Körper einen gewiſſen Grad von Elaſticität, oder nach Befinden Weichheit, beſitzt, und weil die Oberfläche eines jeden Körpers, ſelbſt wenn ſie polirt oder in hohem Grade geglättet iſt, noch kleine Erhöhungen und Vertiefungen hat und in Folge der Poroſität der Materie kein Continuum bildet, ſo findet bei der gegenſeitigen Wirkung zweier ſich berührenden Körper auch immer ein gegenſeitiges Eindrücken und Eingreifen der Theile an der Berührungsſtelle Statt, wodurch ſich ein Zuſammenhang zwiſchen beiden Körpern bildet, der nur durch eine beſondere Kraft, deren Richtung in die Berührungsebene ſelbſt fällt, aufgehoben werden kann.

Dieſer, durch das Eindringen und Ineinandergreifen der ſich berührenden Körper hervorgebrachte Zuſammenhang und der daraus entſpringende, in der Berührungsebene wirkende Widerſtand iſt es, welcher den Namen Reibung (franz. frottement, engl. friction) erhalten hat. Die Reibung tritt bei der Bewegung der Körper als eine paſſive Kraft oder als Widerſtand (Reibungswiderſtand) auf, weil ſie nur Bewegungen verhindert oder hemmt, dieſelben aber nie erzeugt oder befördert. Sie läßt ſich bei Unterſuchungen in der Mechanik als eine Kraft einführen, die jeder Bewegung, deren Richtung in die Ebene der Berührung beider Körper fällt, entgegenwirkt. In welcher Richtung man auch einen auf einer horizontalen oder geneigten Ebene ruhenden Körper fortbewegt, immer wird die Reibung in der Richtung der Bewegung entgegenwirken, ſie wird z. B. dem Hinabſinken auf der ſchiefen Ebene ebenſo viel hinderlich ſein als dem Hinaufgleiten auf derſelben. Bei einem im Gleichgewichtszuſtande befindlichen Kräfteſyſteme erzeugt der kleinſte Zuſatz an Kraft Bewegung, ſo lange die Reibung außer Spiel bleibt; influirt aber dieſelbe, ſo iſt zur Störung des Gleichgewichtes ein größerer, von der Reibung abhängiger Zuſatz an Kraft nöthig.

§. 155. Während der Ueberwindung der Reibung werden die in Berührung gekommenen Theile zusammengedrückt, die vorstehenden Theile umgebogen, nach Befinden abgerissen, abgebrochen u. s. w. Es hängt deshalb die Reibung nicht nur von der Rauhigkeit oder Glätte der reibenden Flächen, sondern auch von der materiellen Beschaffenheit der Körper selbst ab. Härtere Metalle geben z. B. meist weniger Reibung als weichere. Uebrigens lassen sich über die Abhängigkeit der Reibung von den natürlichen Eigenschaften der Körper a priori keine allgemeinen Regeln aufstellen; es ist vielmehr nöthig, mit Körpern von verschiedenen Materien Reibungsversuche anzustellen, um daraus die unter anderen Verhältnissen stattfindenden Reibungen zwischen Körpern von denselben Materien ermitteln zu können. Reibung.

Einen besonderen Einfluß auf die Reibung und auf das daraus hervorgehende Abreiben und Abnutzen der sich berührenden Körper üben die Schmieren (franz. les enduits, engl. the ungents) aus, mit denen man die sich reibenden Flächen bestreicht. Durch die ganz- oder halbflüssigen Schmiermittel, wie Oel, Unschlitt, Fett, Seife u. s. w., werden die Poren der Körper ausgefüllt und andere Rauhheiten vermindert, und überhaupt das tiefere Eindringen der Körper in einander verhindert, weshalb sie meist eine bedeutende Verminderung der Reibung herbeiführen.

Uebrigens ist die Reibung nicht mit der Adhäsion, d. h. mit demjenigen Zusammenhängen zweier Körper zu verwechseln, welches eintritt, wenn Körper in vielen Punkten in Berührung kommen und ein gegenseitiger Druck nicht stattfindet. Die Adhäsion wächst mit der Größe der Berührungsfläche und ist vom Drucke unabhängig, während bei der Reibung das Gegentheil statt hat. Bei kleinen Pressungen tritt sie in Beziehung auf die Reibung bedeutend hervor, sind aber die Pressungen groß, so ist sie nur ein kleiner Theil der Reibung und in der Regel ganz zu vernachlässigen. Schmieren, wie überhaupt alle flüssigen Körper, vermehren die Adhäsion, weil sie eine größere Anzahl von Berührungspunkten herstellen.

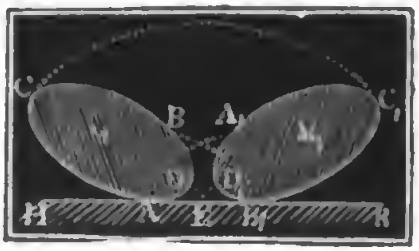
§. 156. Man unterscheidet zwei Arten der Reibung von einander, nämlich die gleitende und rollende oder wälzende. Die gleitende Reibung (franz. f. de glissement, engl. f. of sliding) ist derjenige Reibungswiderstand, welcher sich herausstellt, wenn sich ein Körper gleitend, d. h. so bewegt, daß alle Punkte desselben parallele Linien beschreiben. Die rollende oder wälzende Reibung (franz. f. de roulement, engl. f. of rolling) hingegen ist derjenige Widerstand, welcher beim Wälzen, d. h. bei derjenigen Bewegung eines Körpers entsteht, wo sich jeder Punkt progressiv und drehend zugleich bewegt und der Berührungspunkt auf dem bewegten Körper einen ebenso großen Weg zurück- Reibungsarten.

Reibungsarten.

legt als auf dem ruhenden Körper. Ein gegen die Ebene *HR* ſich ſtützender Körper *M*, Fig. 206, geht z. B. gleitend über die Ebene hin und hat ſomit gleitende Reibung zu überwinden, wenn alle Punkte deſſelben, wie *A*, *B*, *C* u. ſ. w., die parallelen Wege AA_1, BB_1, CC_1 u. ſ. w.

Fig. 206.

Fig. 207.



zurücklegen und deshalb immer nur dieſelben Punkte des bewegten Körpers mit anderen der Unterlage in Berührung kommen. Der Körper *M*, Fig. 207, rollt oder wälzt ſich dagegen auf der Ebene *HR* und hat dabei wälzende Reibung zu überwinden, wenn ſich die Punkte *A*, *B* u. ſ. w. ſeiner Oberfläche ſo bewegen, daß Weg AB_1 = Weg AB = A_1B_1, ebenſo Weg AD = Weg AE, Weg $B_1E \doteq B_1D_1$ u. ſ. w. iſt.

Eine beſondere Art der gleitenden Reibung iſt die Zapfenreibung, welche entſteht, wenn ſich ein cylindriſcher Zapfen in ſeinem Lager herumdreht. Man unterſcheidet aber zweierlei Zapfen, liegende und ſtehende. Der liegende Zapfen (franz. tourillon, engl. axle, auch gudgeon) reibt ſich an ſeinem Umfange oder Mantel, indem nach und nach andere Punkte deſſelben immer mit denſelben Punkten des Lagers oder der Pfanne in Berührung kommen. Der ſtehende Zapfen (franz. und engl. pivot) hingegen drückt mit ſeiner kreisförmigen Baſis gegen das Lager, während die Punkte der letzteren in concentriſchen Kreiſen herumgehen.

Beſondere Reibungen entſtehen noch, wenn ein Körper über einer Schneide oscillirt, wie z. B. beim Waagebalken, oder wenn ein ſchwingender Körper in einer Spitze aufliegt, wie z. B. die Magnetnadel.

Endlich unterſcheidet man noch die Reibung der Ruhe (franz. f. de repos, engl. f. of quiescence), welche zu überwinden iſt, wenn ein ruhender Körper in Bewegung geſetzt wird, von Reibung der Bewegung (franz. f. de mouvement, engl. f. of motion), welche ſich der Fortſetzung einer Bewegung entgegenſetzt.

Reibungsgeſetze.

§. 157. Die allgemeinen Geſetze, welchen die Reibung unterworfen iſt, ſind folgende:

1) Die Reibung iſt proportional dem Normaldrucke zwiſchen den ſich reibenden Körpern. Wenn man einen Körper jetzt noch einmal ſo ſtark gegen ſeine Unterlage drückt als vorher, ſo fällt die Reibung auch noch einmal ſo groß aus; der dreifache Druck giebt auch eine dreifache

Reibung u. s. w. Wenn dieses Gesetz bei kleinen Drücken Abweichungen von den Beobachtungen giebt, so hat man diese dem hier verhältnißmäßig größeren Einflusse der Adhäsion beizumessen. Reibungsgesetze.

2) Die Reibung ist unabhängig von der Größe der Reibungs- oder Berührungsflächen. Je größer die Reibungsflächen sind, desto größer ist zwar die Zahl der sich reibenden Theile, allein desto kleiner ist auch der Druck und deshalb auch die Reibung eines jeden Theiles; die Summe der Reibungen aller Theile ist deshalb bei einer größeren Fläche dieselbe wie bei einer kleineren, insofern der Druck und die übrigen Verhältnisse dieselben sind. Sind die Seitenflächen eines parallelepipedischen Ziegelsteines von gleicher materieller Beschaffenheit, so ist die Kraft zum Fortschieben desselben auf einer horizontalen Ebene dieselbe, man mag ihn mit der kleinsten oder mit der mittleren oder mit der größten Seitenfläche aufruhen lassen. Bei sehr großen Seitenflächen und kleinen Drücken scheint diese Regel wegen des Einflusses der Adhäsion eine Ausnahme zu erleiden.

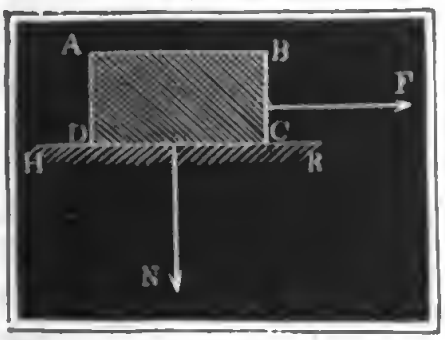
3) Die Reibung der Ruhe ist zwar meist größer als die der Bewegung, letztere aber ist von der Geschwindigkeit nicht abhängig; sie ist bei großen Geschwindigkeiten dieselbe wie bei kleinen Geschwindigkeiten.

4) Die Reibung eingeschmierter Flächen ist in der Regel kleiner als die uneingeschmierter und hängt weniger von den sich reibenden Körpern als von der Schmiere selbst ab.

5) Die drehende oder Zapfenreibung ist kleiner als die gemeine gleitende oder schiebende Reibung; die wälzende Reibung ist in den meisten Fällen so klein, daß sie in Rücksicht auf die gleitende Reibung überhaupt nicht in Betracht kommt.

§. 158. Aus dem ersten der im vorigen §. aufgeführten Gesetze läßt sich zunächst Folgendes ableiten. Ein Körper AC, Fig 208, drücke gegen seine Unterlage ein Mal mit der Kraft N und erfordere zum Fortziehen, d. h. zur Ueberwindung seiner Reibung, die Kraft F, und ein zweites Mal mit der Kraft N_1 und mache dann die Kraft F_1 nothwendig, um aus der Ruhe in Bewegung überzugehen. Nach dem Vorigen ist nun Reibungscoefficient.

Fig. 208



$$\frac{F}{F_1} = \frac{N}{N_1}, \text{ und daher } F = \frac{F_1}{N_1} \cdot N.$$

Hat man durch einen Versuch die einem gewissen Drucke N_1 entsprechende Reibung F_1 gefunden, so findet

Reibungscoefficient. man hiernach, wenn die ſich reibenden Körper und die übrigen Umſtände dieſelben ſind, die einem andern Drucke N entſprechende Reibung F, indem man dieſen Druck durch das Verhältniß $\left(\frac{F_1}{N_1}\right)$ zwiſchen den der erſten Beobachtung entſprechenden Werthen F_1 und N_1 multiplicirt.

Dieſes Verhältniß der Reibung zum Drucke oder die Reibung für den Druck = Eins, z. B. 1 Pfund, heißt der Reibungscoefficient (franz. coëfficient du frottement, engl. coefficient of friction) und ſoll in der Folge immer durch φ ausgedrückt werden, weshalb ſich allgemein $F = \varphi . N$ ſetzen läßt.

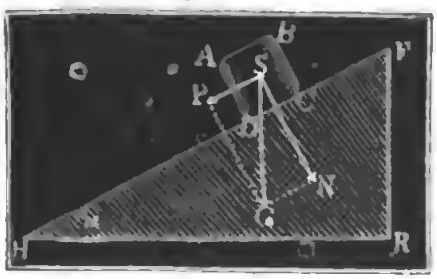
Der Reibungscoefficient iſt bei verſchiedenen Materien und verſchiedenen Zuſtänden der Reibung verſchieden und muß deshalb durch beſonders hierzu angeſtellte Verſuche ermittelt werden.

Wird der Körper AC um den Weg s auf der Unterlage fortgezogen, ſo hat man die Arbeit Fs zu verrichten; es iſt alſo die von der Reibung beanſpruchte mechaniſche Arbeit φNs gleich Product aus Reibungscoefficient, Normaldruck und Weg in der Berührungsebene. Iſt die Unterlage ebenfalls beweglich, ſo hat man unter s den relativen Weg des Körpers zu verſtehen.

Beiſpiele. 1) Wenn bei einem Drucke von 260 Pf. die Reibung 91 Pfund beträgt, ſo iſt der entſprechende Reibungscoefficient $\varphi = {}^{91}/_{260} = {}^{7}/_{20} = 0{,}35$. 2) Um einen 500 Pf. ſchweren Schlitten auf einer horizontalen und ſehr glatten Schneebahn fortzuziehen, iſt bei einem Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}04$ die nöthige Kraft $F = 0{,}04 . 500 = 20$ Pf. 3) Wenn der Reibungscoefficient einer auf dem Straßenpflaſter fortgezogenen Schleife 0,45 und die Belaſtung dieſer 500 Pf. beträgt, ſo iſt die erforderliche Arbeit, um dieſe Schleife 480 Fß. fortzuziehen, $\varphi Ns = 0{,}45 . 500 . 480 = 108000$ Fßpf.

Reibungswinkel und Reibungskegel. §. 159. Liegt ein Körper AC, Fig. 209, auf einer ſchiefen Ebene FH, deren Neigungswinkel $FHR = \alpha$ iſt, ſo zerlegt ſich deſſen Gewicht G in den Normaldruck $N = G \cos. \alpha$ und in die Parallelkraft $P = G \sin. \alpha$. Aus der erſteren Kraft entſpringt nun die Reibung $F = \varphi G \cos. \alpha$, welche jeder Bewegung auf der Ebene entgegenwirkt, weshalb die Kraft zum Hinaufſchieben auf der Ebene $= F + P = \varphi G \cos \alpha + G \sin. \alpha = (\sin. \alpha + \varphi \cos. \alpha) G$, dagegen die Kraft zum Hinabſchieben $= F - P = (\varphi \cos. \alpha - \sin. \alpha) G$ ausfällt. Die letztere Kraft iſt Null, d. h. der Körper erhält ſich durch ſeine Reibung auf der

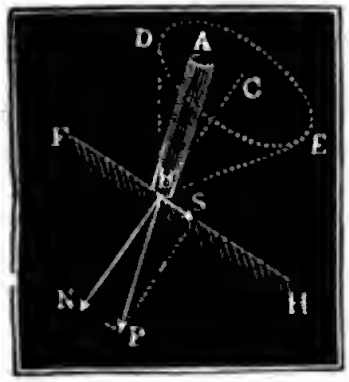
Fig. 209.



schiefen Ebene, wenn $\sin.\alpha = \varphi \cos.\alpha$, d. i. wenn $\text{tang.}\,\alpha = \varphi$ ist. So lange die schiefe Ebene einen Neigungswinkel α hat, dessen Tangente kleiner als φ ist, so lange bleibt der Körper auf der schiefen Ebene in Ruhe, ist aber die Tangente des Neigungswinkels wenig größer als φ, so gleitet der Körper auf der schiefen Ebene herab. Man nennt diesen Winkel, d. i. denjenigen, dessen Tangente dem Reibungscoefficienten gleich ist, Reibungs- auch Ruhewinkel (franz. angle du frottement, engl. angle of friction, angle of resistance). Es ergiebt sich hiernach durch Beobachtung des Reibungswinkels ϱ der Reibungscoefficient (für die Reibung der Ruhe), wenn man setzt $\varphi = \text{tang.}\,\varrho$. Reibungswinkel und Reibungskegel.

In Folge der Reibung nimmt die Oberfläche FH, Fig. 210, eines Körpers nicht nur den Normaldruck N eines andern Körpers AB, sondern auch dessen schiefen Druck P auf, wenn nur die Abweichung $NBP = \alpha$ der Richtung dieses Druckes von der Normale BN nicht den Reibungswinkel überschreitet, denn da die Kraft P den Normaldruck $BN = P.\cos.\alpha$ und den Seiten- oder Tangentialdruck $BS = S = P \sin.\alpha$ giebt und aus dem Normaldrucke $P \cos.\alpha$ die jeder Bewegung in der Ebene FH entgegenwirkende Reibung $\varphi P \cos.\alpha$ entsteht, so wird S eine Bewegung nicht hervorbringen können, also im Gleichgewicht bleiben, so lange $\varphi P \cos.\alpha > P \sin.\alpha$ oder $\varphi \cos.\alpha > \sin.\alpha$, d. i. $\text{tang.}\,\alpha < \varphi$ oder $\alpha < \varrho$ ist. Dreht man den Ruhewinkel $CBD = \varrho$ um die Normale CB, so beschreibt er einen Kegel, den man Reibungskegel (franz. cone de fr., engl. cone of resistance) nennen kann. Der Reibungskegel umschließt alle diejenigen Kraftrichtungen, bei welchen eine vollständige Aufnahme des schiefen Druckes stattfindet.

Fig. 210.



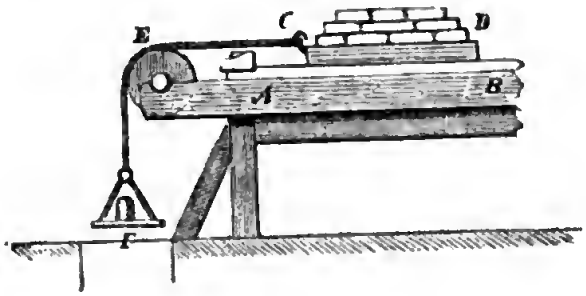
Beispiel. Um einen gefüllten und 200 Pf. schweren Kübel auf einer unter 50 Grad ansteigenden Holzbahn hinaufzuziehen, ist bei einem Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}48$ die nöthige Kraft: $P = (\varphi \cos.\alpha + \sin.\alpha)\ G = (0{,}48 \cos.50° + \sin.50°).200 = (0{,}308 + 0{,}766).200 = 215$ Pf., um ihn hinunterzulassen, oder sein Hinuntergeben zu verhindern, ist dagegen die erforderliche Kraft $P = (\varphi \cos.\alpha - \sin.\alpha)\ G = -(\sin.50° - 0{,}48.\cos.50°).200 = -(0{,}766 - 0{,}308).200 = -91{,}5$ Pf.

§ 160. Versuche über die Reibung sind von Vielen angestellt worden; am ausgedehntesten und im größten Maaßstabe ausgeführt sind aber die Versuche von Coulomb und Morin. Beide wendeten zur Erforschung der Reibungscoefficienten für die gleitende Bewegung einen auf einer horizontalen Bahn fortgleitenden Schlitten an, der durch ein über eine feste Reibungsversuche.

Reibungsverſuche.

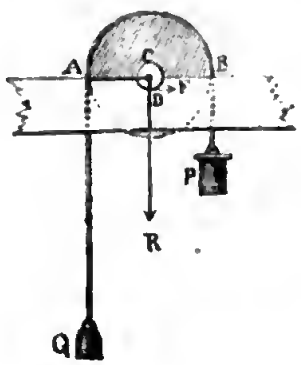
Rolle weggelegtes und durch Gewichte angeſpanntes Seil fortgezogen wurde, wie in Fig. 211, wo AB die Bahn, CD den Schlitten, E die Rolle und F das ſinkende Gewicht vorſtellt, zu erſehen iſt. Um die Reibungscoefficienten für verſchiedene Materien zu erhalten, wurden nicht nur die Schlittenläufe, ſondern die die Unterlage bildenden Balken mit möglichſt abgeglätteten Schienen aus den zu unterſuchenden Subſtanzen, wie Holz, Eiſen u. ſ. w., bekleidet. Die Coefficienten für die Reibung der Ruhe ergaben ſich aus dem Gewichte, welches nöthig war, um den Schlitten aus der Ruhe in Bewegung zu ſetzen, und die Coefficienten für die Reibung der Bewegung ließen ſich mit Hülfe der Zeit t berechnen, welche der Schlitten brauchte, um einen gewiſſen Weg s zu durchlaufen. Iſt G das Gewicht des Schlittens und P das Gewicht zum Fortziehen deſſelben, ſo hat man die Reibung $= \varphi G$, die bewegende Kraft $= P - \varphi G$ und die Maſſe $M = \frac{P+G}{g}$, es folgt daher nach §. 65 die Acceleration der entſtehenden gleichförmig beſchleunigten Bewegung: $p = \frac{P-\varphi G}{P+G} g$, und, durch Umkehrung, der Reibungscoefficient $\varphi = \frac{P}{G} - \frac{P+G}{G} \cdot \frac{p}{g}$. Es iſt aber noch $s = \frac{1}{2} p t^2$ (§. 11), daher $p = \frac{2s}{t^2}$ und $\varphi = \frac{P}{G} - \frac{P+G}{G} \cdot \frac{2s}{gt^2}$.

Fig. 211.



Zur Ausmittelung der Reibungscoefficienten für die Zapfenreibung wurde eine feſte Rolle ACB, Fig. 212, mit einem umgelegten und durch Gewichte P und Q angeſpannten Seile angewendet. Aus der Summe $P+Q$ der Gewichte ergab ſich der Druck, und aus der Differenz $P-Q$ die Kraft am Umfang der Rolle, welche der Reibung $F = \varphi (P+Q)$ am Umfang des Zapfens das Gleichgewicht hält; iſt nun $CA = a$ der Rollenhalbmeſſer und $CD = r$ der Zapfenhalbmeſſer, ſo hat man wegen der Gleichheit der ſtatiſchen Momente $(P-Q)\, a = Fr = \varphi (P+Q)\, r$, und daher für die Reibung der Ruhe: $\varphi = \frac{P-Q}{P+Q} \cdot \frac{a}{r}$, dagegen für die

Fig. 212.



der Bewegung, wenn das Gewicht P in der Zeit t um s ſinkt, und Q ebenſo viel ſteigt: $\varphi = \left(\frac{P-Q}{P+Q} - \frac{2s}{gt^2}\right)\frac{a}{r}$. Reibungsverſuche.

Anmerkung. Vor Coulomb hatten ſich ſchon Amontons, Camus, Bülffinger, Muſchenbroek, Ferguſon, Vince u. A. mit der Reibung beſchäftigt und Verſuche über die Reibung angeſtellt. Die Ergebniſſe aller dieſer Unterſuchungen haben jedoch für die Praxis wenig Werth, weil ſie in zu kleinem Maaßſtabe angeſtellt worden ſind. Denſelben Mangel haben ſelbſt noch die Verſuche von Ximenes, welche mit denen von Coulomb faſt gleichzeitig angeſtellt wurden. Die Ergebniſſe des Ximenes findet man in dem Werke »Teoria e Pratica delle resistenze de' solidi ne' loro attriti, Pisa 1782«. Die Verſuche Coulomb's ſind ausführlich beſchrieben in dem Werke: »Théorie des machines simples etc. par Coulomb. Nouv. édit. 1821. Einen Auszug hiervon findet man in der Preisſchrift von Metternich «vom Widerſtande der Reibung. Frankfurt und Mainz 1789.« Die neueſten Verſuche über die Reibung wurden von Rennie und Morin angeſtellt. Rennie wendete bei ſeinen Verſuchen theils einen Schlitten auf horizontaler Bahn, theils auch eine ſchiefe Ebene an, von welcher er die Körper herabgleiten ließ und wobei er aus dem Reibungswinkel auf die Größe der Reibung ſchloß. Die Verſuche Rennie's erſtrecken ſich auf mannichfaltige, in der Technik vorkommende Stoffe, als Eis, Tuch, Leder, Holz, Steine und Metalle; ſie liefern auch wichtige Ergebniſſe über die Abnutzung der Körper, allein der Apparat und die Art der Ausführung dieſer Verſuche laſſen eine hinreichende Sicherheit, wie ſie zumal die Verſuche Morin's erreicht zu haben ſcheinen, nicht erwarten. Eine deutſche Bearbeitung der Rennie'ſchen Verſuche liefert der 17. Band (1832) der Wiener Jahrbücher des K. K. polytechniſchen Inſtitutes, auch der 34. Band (1829) von Dingler's polytechniſchem Journal. Die ausgedehnteſten und einen hohen Grad von Sicherheit verſprechenden Verſuche ſind von Morin zur Ausführung gebracht worden, obgleich nicht abgeleugnet werden kann, daß ſie einige Zweifel und Unſicherheiten übrig, und noch dies und jenes zu wünſchen laſſen. Es iſt hier nicht der Ort, die Methoden und Apparate bei dieſen Verſuchen zu beſchreiben, wir können hier nur auf Morin's Schriften: »Nouvelles Expériences sur le frottement« u. ſ. w. verweiſen. Eine vortreffliche Bearbeitung des Artikels »Reibung« und eine ziemlich ausführliche Beſchreibung aller Verſuche über die Reibung, namentlich auch der Morin'ſchen, giebt Brix in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen, 16. und 17. Jahrgang, Berlin 1837 und 1838.

§. 161. Folgende Tabellen enthalten eine gedrängte Zuſammenſtellung der im Praktiſchen vorzüglich brauchbaren Coefficienten der gleitenden Reibung. Reibungstafeln.

Reibungstafeln.

Tafel I.

Reibungscoefficienten der Ruhe.

Namen der ſich reibenden Körper.		Zuſtand der Flächen und Natur der Schmieren.							
		Trocken.	Mit Waſſer benetzt.	Mit Olivenöl.	Schweinefchmalz.	Talg.	Trockene Seife.	Polirt und fettig.	Fettig und benetzt.
Holz auf Holz	kleinſter,	0,30	0,65	—	—	0,14	0,22	0,30	—
	mittlerer,	0,50	0,68	—	0,21	0,19	0,36	0,35	—
	größter Werth.	0,70	0,71	—	—	0,25	0,44	0,40	—
Metall auf Metall	kleinſter,	0,15	—	0,11					
	mittlerer,	0,18	—	0,12	0,10	0,11	—	0,15	—
	größter Werth.	0,24	—	0,16					
Holz auf Metall		0,60	0,65	0,10	0,12	0,12	—	0,10	—
Hanf in Seilen, Zöpfen oder Gurten auf Holz	kleinſter,	0,50							
	mittlerer,	0,63	0,87						
	größter Werth	0,80							
Dickes Sohlenleder zu Liderungen auf Holz od. Gußeiſen	hochkantig,	0,43	0,62	0,12	—	—	—	—	0,27
	flach . .	0,62	0,80	0,13					
Schwarze Lederriemen über Trommeln	von Holz	0,47							
	von Metall.	0,54	—	—	—	—	—	0,28	0,38
Steine oder Ziegel auf Steinen oder Ziegeln, glatt bearbeitet	kleinſter,	0,67							
	größter Werth.	0,75							
Steine u. Schmiedeeiſen.	kleinſter,	0,42							
	größter Werth.	0,49							
Hirnholz auf Steinen		0,64							

Tafel II.

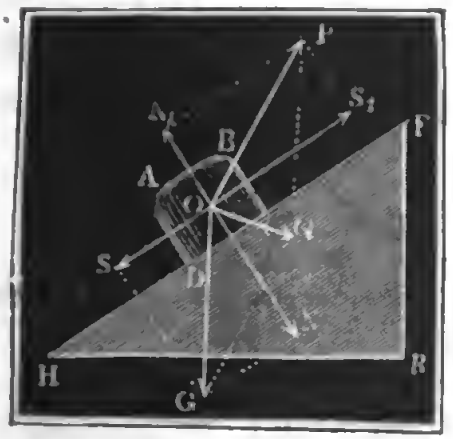
Reibungstafeln.

Reibungscoefficienten der Bewegung.

Namen der sich reibenden Körper		Zustand der Flächen und Art der Schmieren. Trocken.	Mit Wasser	Olivenöl.	Schweinefett.	Talg.	Schweinefett und Graphit.	Reine Wagenschmiere.	Trockne Seife.	Fettig.
Holz auf Holz	kleinster,	0,20	—	—	0,06	0,06	—	—	0,14	0,08
	mittlerer,	0,36	0,25	—	0,07	0,07	—	—	0,15	0,12
	größter Werth.	0,48	—	—	0,07	0,08	—	—	0,16	0,15
Metall auf Metall	kleinster,	0,15	—	0,06	0,07	0,07	0,06	0,12	—	0,11
	mittlerer,	0,18	0,31	0,07	0,09	0,09	0,08	0,15	0,20	0,13
	größter Werth.	0,24	—	0,08	0,11	0,11	0,09	0,17	—	0,17
Holz auf Metall	kleinster,	0,20	—	0,05	0,07	0,06	—	—	—	0,10
	mittlerer,	0,42	0,24	0,06	0,07	0,08	0,08	0,10	0,20	0,14
	größter Werth.	0,62	—	0,08	0,08	0,10	—	—	—	0,16
Hanfseile, Zöpfe u. s. w.	auf Holz	0,45	0,33							
	auf Eisen	—	—	0,15	—	0,19				
Sohlenleder, flach auf Holz od. Metall	roh,	0,54	0,36	0,16	—	0,20				
	geklopft,	0,30	—							
	fettig	—	0,25							
Desgl. hochkantig, für Kolbenlyderung	trocken	0,34	0,31	0,14	—	0,14				
	fettig	—	0,24							

Anmerkung. Vollständigere Tabellen der Reibungscoefficienten enthält der »Ingenieur, Seite 403 u. s. w.« Die Reibungscoefficienten lockerer Massen u. s. w. werden im zweiten Theile, bei der Theorie des Erddruckes, mitgetheilt.

Fig. 213.



Schiefe Ebene.

§. 162. Die Theorie der gleitenden Reibung findet ihre vorzüglichste Anwendung bei der Untersuchung des Gleichgewichtes von einem Körper AC auf der schiefen Ebene FH. Fig. 213. Ist, in Uebereinstimmung mit §. 135, $FHR = \alpha$ der Neigungswinkel der schiefen Ebene, und $POS_1 = \beta$ der Winkel, welchen die Kraft P mit der schiefen Ebene einschließt, so hat man die aus dem Gewichte G des

Schiefe Ebene.

Körpers entſpringende Normalkraft $N = G\cos.\alpha$, dagegen die Kraft zum Herabgleiten $= S = G\sin.\alpha$, ferner die Kraft N_1, mit welcher P den Körper von der Ebene abzuziehen ſucht, $= P\sin.\beta$, und die Kraft S_1, mit welcher ſie den Körper auf der Ebene hinaufzieht $= P\cos.\beta$. Der übrig bleibende Normaldruck iſt $N - N_1 = G\cos.\alpha - P\sin.\beta$, folglich die Reibung $F = \varphi\,(G\cos.\alpha - P\sin.\beta)$. Kommt es darauf an, die Kraft P zum Hinaufziehen des Körpers auf der ſchiefen Ebene zu finden, ſo iſt die Reibung zu überwinden, es muß alſo ſein: $S_1 = S + F$, d. i.

$$P\cos.\beta = G\sin.\alpha + \varphi\,(G\cos.\alpha - P\sin.\beta).$$

Soll aber die Kraft beſtimmt werden, welche den Körper am Herabgleiten hindert, ſo kommt die Reibung der Kraft zu Hülfe, es iſt alſo $S_1 + F = S$, d. i. $P\cos.\beta + \varphi\,(G\cos.\alpha - P\sin.\beta) = G\sin.\alpha$.

Hiernach beſtimmt ſich die Kraft

für den erſten Fall: $P = \dfrac{\sin.\alpha + \varphi\cos.\alpha}{\cos.\beta + \varphi\sin.\beta} \cdot G$,

und für den zweiten: $P = \dfrac{\sin.\alpha - \varphi\cos.\alpha}{\cos.\beta - \varphi\sin.\beta} \cdot G$.

Führt man den Reibungswinkel ϱ ein, indem man $\varphi = tang.\,\varrho = \dfrac{\sin.\varrho}{\cos.\varrho}$ ſetzt, ſo erhält man $P = \dfrac{\sin.\alpha.\cos.\varrho \pm \cos.\alpha.\sin.\varrho}{\cos.\beta.\cos.\varrho \pm \sin.\beta.\sin.\varrho} \cdot G$,

oder, nach bekannten Sätzen der Trigonometrie: $P = \dfrac{\sin.(\alpha \pm \varrho)}{\cos.(\beta \mp \varrho)} \cdot G$,

und es gelten die oberen Zeichen, wenn es darauf ankommt, Bewegung hervorzubringen, dagegen die unteren, wenn Bewegung zu verhindern iſt.

Die letzte Formel findet man auch durch eine einfache Anwendung des Kräfteparallelogrammes. Da ein Körper noch diejenige Kraft eines anderen Körpers aufnimmt, welche um den Reibungswinkel ϱ von der Normale ſeiner Oberfläche abweicht (§. 159), ſo findet in dem vorliegenden Falle Gleichgewicht ſtatt, wenn die Mittelkraft $OQ = Q$ aus den Kräften P und G mit der Normale ON den Winkel $NOQ = \varrho$ einſchließt. Setzt man nun in der allgemeinen Formel $\dfrac{P}{G} = \dfrac{\sin.GOQ}{\sin.POQ}$, $GOQ = GON + NOQ = \alpha + \varrho$, und $POQ = POS_1 + S_1OQ = \beta + 90^0 - \varrho$, ſo erhält man $\dfrac{P}{G} = \dfrac{\sin.(\alpha+\varrho)}{\sin.(\beta - \varrho + 90^0)} = \dfrac{\sin.(\alpha+\varrho)}{\cos.(\beta-\varrho)}$, und für einen negativen Werth von ϱ:

$\dfrac{P}{G} = \dfrac{\sin.(\alpha-\varrho)}{\cos.(\beta+\varrho)}$, ganz in Uebereinſtimmung mit dem Obigen.

Ruht der Körper auf einer Horizontalebene, ſo iſt $\alpha = o$, daher die Kraft zum Fortſchieben $P = \dfrac{\varphi G}{\cos.\beta + \varphi\sin.\beta} = \dfrac{G\sin.\varrho}{\cos.(\beta-\varrho)}$.

Wirkt die Kraft parallel zur ſchiefen Ebene, d. h. in der Richtung

ihrer Fallinie, so hat man $\beta = o$, und daher $P = (sin.\alpha \pm \varphi\, cos.\alpha)\, G$, Schiefe Ebene.

$= \frac{sin.(\alpha \pm \varrho)}{cos.\varrho} \cdot G$. (Vergl. §. 159). Wirkt endlich die Kraft horizontal, so hat man $\beta = -\alpha$; $cos.\beta = cos.\alpha$ und $sin.\beta = -sin.\alpha$, daher

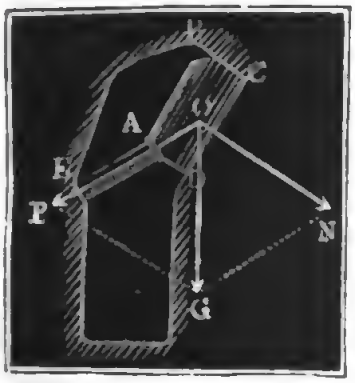
$$P = \frac{sin.\alpha \pm \varphi cos.\alpha}{cos.\alpha \mp \varphi sin.\alpha} \cdot G = \frac{tang.\alpha \pm \varphi}{1 \mp \varphi tang.\alpha} \cdot G,$$

d. i. $P = tang.(\alpha \pm \varrho)\, G$.

Uebrigens ist die Kraft zum Hinaufschieben am kleinsten, wenn der Nenner $cos.(\beta - \varrho)$ am größten, nämlich $= 1$, also $\beta - \varrho = o$, d. i. $\beta = \varrho$. Wenn also die Kraftrichtung um den Reibungswinkel von der schiefen Ebene abweicht, so ist die Kraft selbst am kleinsten und $= sin.(\alpha + \varrho) \cdot G$.

. Beispiel. Welchen Arendruck hat die Spreize AE, Fig. 214, auszuhalten, wenn dieselbe einen Felsblock (eine Wand) $ABCD$ vom Gewichte $G = 5000$ Pf. von dem Herabgleiten von einer schiefen Ebene CD (dem Liegenden) abhalten soll, vorausgesetzt, daß die Neigung der Spreize gegen den Horizont 35°, die der schiefen Ebene CD aber 50° und der Reibungscoefficient $\varphi = 0{,}75$ beträgt? Es ist hier $G = 5000$, $\alpha = 50°$, $\beta = 35° - 50° = -15°$ und $\varphi = 0{,}75$, daher giebt die Formel

Fig. 214.



$$P = \frac{sin\,\alpha - \varphi cos.\alpha}{cos.\beta - \varphi sin.\beta} \cdot G$$

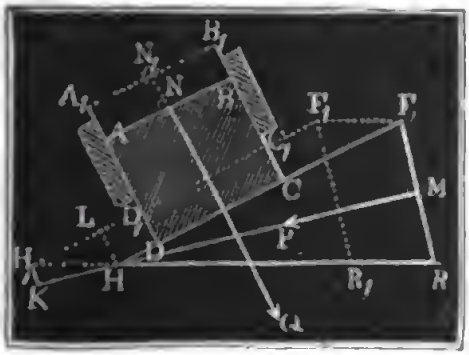
$$= \frac{sin.\,50° - 0.75\, cos.\,50°}{cos.\,15° + 0{,}75\, sin.\,15°} \cdot 5000$$

$$= \frac{0{,}766 - 0{,}482}{0{,}966 + 0{,}194} \cdot 5000 = \frac{1420}{1{,}160} = 1224 \text{ Pf.}$$

Wäre die Spreize horizontal, so hätte man $\beta = -50°$, und $tang.\varrho = 0{,}75$, daher $\varrho = 36°, 52'$, endlich $P = G\ tang.(\alpha - \varrho) = 5000\ tang.(50 - 36°, 52')$ $= 5000\ tang.\ 13°,8' = 5000 \cdot 0{,}2333 = 1166$ Pf. Um dieselbe Wand durch eine horizontale Kraft auf dem Liegenden hinaufzuschieben, ist unter übrigens gleichen Umständen die Kraft $P = G\ tang.(\alpha + \varrho) = 5000\ tang.\ 86°, 52'$ $= 5000 \cdot 18{,}2676 = 91338$ Pf. nöthig.

§. 163. Bei dem Keile hat die Reibung einen bedeutenden Einfluß auf die statischen Verhältnisse. Es bilde der Durchschnitt des Keiles ein gleichschenkliges Dreieck FHR, Fig. 215, mit der Schärfe $FHR = \alpha$; es wirke die Kraft P rechtwinkelig auf den Rücken und die Last Q rechtwinkelig auf die Seite FH des Keiles. Rückt man diesen Keil auf der Basis HR um den Weg $s = FF_1 = HH_1 = RR_1$ fort, so steigt die Last Q um den Weg $CC_1 = DD_1 = HL = HH_1 \cdot sin.HH_1L = s\, sin.\alpha$, und es legt die Kraft den Keil.

Fig. 215.



Schiefe Ebene. Weg $HK = HH_1 \,.\, cos.\, H_1 HK = s\, cos.\, \frac{\alpha}{2}$ zurück; ohne Rückſicht auf Reibung iſt daher nach dem Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten $P.\, HK = Q\,.\,DD_1$, d. i. $Ps\, cos.\, \frac{\alpha}{2} = Q\, s\, sin.\, \alpha$, daher $P = \frac{Q\, sin.\, \alpha}{cos.\, \frac{\alpha}{2}}$

$= \frac{2\, Q\, sin.\, \frac{\alpha}{2}\, cos.\, \frac{\alpha}{2}}{cos.\, \frac{\alpha}{2}} = 2\, Q\, sin.\, \frac{\alpha}{2}$, was auch aus der Formel in §. 137 folgt, wenn man in ihr $sin.\, \beta = 1$, und $cos.\, (\alpha - \delta) = cos.\, \frac{\alpha}{2}$ ſetzt.

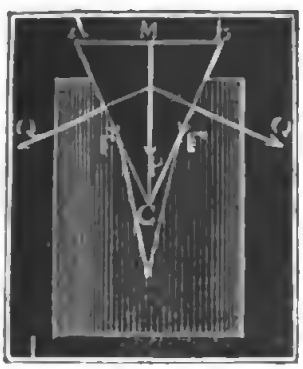
Es treten nun aber drei Reibungen ein, nämlich die Reibungen auf den Seitenflächen HF und HR, und die Reibung des die Laſt ausmachenden Körpers $ABCD$ in ſeiner Leitung. Da die Kraftrichtung von beiden Seiten des Keiles gleich viel abweicht, ſo iſt auch der Druck gegen beide gleich, nämlich $= Q$, und die daraus entſpringende Reibung $= \varphi Q$. Der Weg dieſer Reibungen iſt aber verſchieden. Für die Reibung auf HR iſt er $= HH_1 = s$, für die auf HF aber $= H_1 L = s\, cos.\, \alpha$; demnach ſind die Arbeiten beider Reibungen $= \varphi Q s + \varphi Q s\, cos.\, \alpha$ $= \varphi Q s\, (1 + cos.\, \alpha) = 2\, \varphi Q s \left(cos.\, \frac{\alpha}{2}\right)^2$. Endlich drückt die Reibung zwiſchen CD und FH den Körper $ABCD$ rechtwinkelig gegen ſeine Führung und erzeugt daſelbſt die Reibung $\varphi_1 . \varphi Q$, wofern φ_1 den Reibungscoefficienten für Bewegung in der Führung oder Leitung bezeichnet. Dieſe Reibung hat aber mit der Laſt Q einerlei Weg $DD_1 = s\, sin.\, \alpha$; es entſpricht daher derſelben die Arbeit $\varphi_1 \varphi Q s\, sin. \alpha$. Um nun die äußerſte Grenze des Gleichgewichtszuſtandes zu finden, ſetzen wir die Arbeit der Kraft P gleich der Arbeit der Laſt Q plus Arbeiten der Reibungen, alſo

$$P s\, cos.\, \frac{\alpha}{2} = Q\, s\, sin.\, \alpha + 2 Q \varphi s \left(cos.\, \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \varphi \varphi_1 Q s\, sin.\, \alpha,$$

und erhalten ſo die Kraft

$$P = 2Q \left(sin.\, \frac{\alpha}{2} + \varphi\, cos.\, \frac{\alpha}{2} + \varphi \varphi_1\, sin.\, \frac{\alpha}{2}\right).$$

Fig. 216.



Bei einem Keile ABC, Fig. 216, wie er zum Zerſpalten und Zerdrücken der Körper gebraucht wird, iſt die dem Normaldruck Q gegen die Seiten AC und BC entſprechende Kraft auf den Rücken $P = 2Q \left(sin.\, \frac{\alpha}{2} + \varphi\, cos.\, \frac{\alpha}{2}\right)$, wie ſich ergiebt, wenn man die Summe der vertikalen Seitenkräfte von Q und $F = \varphi Q$, d. i.

$2\,V_1 = 2\,Q\ sin.\ \frac{\alpha}{2}$ und $2\,V_2 = 2\,\varphi\,Q\,cos.\ \frac{\alpha}{2}$, der Kraft P gleichsetzt.

Beispiel. Es sei die Last Q des in Fig. 215. abgebildeten Keiles = 650 Pf., die Schärfe des Keiles: $\alpha = 25°$, und der Reibungscoefficient $\varphi_1 = \varphi = 0{,}36$. Man sucht die Arbeit, welche nöthig ist, die Last Q um ½ Fuß fortzubewegen. Die Kraft ist $P = 2 \cdot 650\ [sin.\ 12\frac{1}{2}° + 0{,}36\ cos.\ 12\frac{1}{2}° + (0{,}36)^2\ sin.\ 12\frac{1}{2}°]$

$= 1300 \cdot (0{,}2164 + 0{,}36 \cdot 0.9763 + 0{,}1296 \cdot 0{,}2164)$

$= 1300 \cdot (0{,}2164 + 0{,}3515 + 0{,}0281) = 1300 \cdot 0{,}5960 = 774{,}8$ Pf.

Dem Lastwege $CC_1 = ½$ Fuß entspricht der Kraftweg $HK = s = \frac{CC_1}{sin.\ \alpha} \cdot cos\ \frac{\alpha}{2}$

$= \frac{CC_1}{2\,sin.\ \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{4 \cdot 0{,}2164} = 1{,}155$ Fuß; es ist demnach die gesuchte mechanische Leistung $Ps = 774{,}8 \cdot 1{,}155 = 895$ Fußpf. Ohne Rücksicht auf Reibung wäre sie nur $650 \cdot ½ = 325$ Fußpf. In Folge der Reibung wird also die aufzuwendende Arbeit beinahe verdreifacht.

§. 164. Bei Zapfen ist nur die Reibung der Bewegung von Wichtigkeit, weshalb auch nur über diese Beobachtungsresultate vorliegen. Zapfenreibung.

Tafel III.

Coefficienten der Zapfenreibung, nach Morin.

Angabe der sich reibenden Körper.	Zustand der Reibungsflächen u. Gattung der Schmieren.							
	Trocken oder wenig fettig.	Fettig und mit Wasser benetzt.	Geschmiert und mit Wasser benetzt.	Oel, Talg oder Schweinefett.		Sehr weiche u. gereinigte Wagenschmiere.	Schweinefettmalz mit Graphit.	Fettig.
				Auf gewöhnliche Art	Gut unterhalten.			
Glockengut auf Glockengut	—	—	—	0,097	—	—	—	—
Gußeisen auf Glockengut	—	—	—	—	0,049			
Schmiedeeisen auf Glockengut	0,251	1,189	—	0,075	0,054	0,090	0,111	—
Schmiedeeisen auf Gußeisen	—	—	—	0,075	0,054	—	—	—
Gußeisen auf Gußeisen	—	0,137	0,079	0,075	0,054	—	—	0,137
Gußeisen auf Glockengut	0,194	0,161	—	0,075	0,054	0,065	—	0,166
Schmiedeeisen auf Guajakholz	0,188	—	—	0,125				
Gußeisen auf Guajakholz	0,185	—	—	0,100	0,092	—	0,109	0,140
Guajak auf Gußeisen.	—	—	—	0,116	—	—	—	0,153
Guajak auf Guajak.	—	—	—	—	0,070			

Aus dieser Tabelle ist folgendes für die Praxis sehr richtige Verhältniß zu entnehmen: bei Zapfen aus Schmiede- oder Gußeisen, laufend in La-

Zapfenreibung

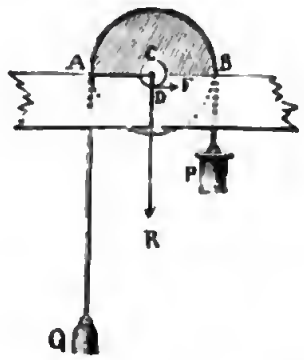
gern aus Gußeiſen oder Glockengut (Meſſing), geſchmiert mit Oel, Talg oder Schweineſchmalz, iſt der Reibungscoefficient:

bei ununterbrochener guter Unterhaltung = 0,054,
bei gewöhnlicher Abwartung = 0,070 bis 0,080.

Die von Coulomb gefundenen Werthe weichen hiervon zum Theil ab.

§. 165. Kennt man den Druck R zwiſchen einem Zapfen und ſeinem Lager, und iſt noch der Halbmeſſer r des Zapfens, Fig. 217, gegeben, ſo läßt ſich die Arbeit, welche die Zapfenreibung bei jeder Umdrehung des Zapfens in Anſpruch nimmt, leicht ermitteln. Die Reibung F iſt $= \varphi R$, der ihr entſprechende Weg aber der Umfang $2\pi r$ des Zapfens; es folgt daher die bei einer Umdrehung durch die Reibung verlorengehende mechaniſche Leiſtung $= \varphi R . 2\pi r = 2\pi\varphi Rr$. Macht der Zapfen in einer Minute u Umdrehungen, ſo iſt die in jeder Secunde verbrauchte Arbeit

Fig 217.



$$= 2\pi\varphi Rr . \frac{u}{60} = \frac{\pi u \varphi Rr}{30} = 0{,}105 . u\varphi Rr.$$

Die Arbeit der Reibung wächſt alſo mit dem Zapfendrucke, dem Zapfenhalbmeſſer und der Umdrehungszahl gleichmäßig. Es iſt daher eine praktiſche Regel, bei rotirenden Maſchinen den Zapfendruck nicht unnöthig durch große Gewichte zu erhöhen, die Zapfen nur ſo ſtark zu machen, als die Feſtigkeit auf die Dauer es verlangt, und endlich auch nicht ſehr viel Umdrehungen in einer Minute zuzulaſſen, wenigſtens dann nicht, wenn es nicht andere Verhältniſſe erfordern.

Durch Anwendung von Friction srädern, die man ſtatt der Zapfenlager anwendet, wird die Arbeit der Reibung vermindert. In Fig. 218 iſt AB eine Welle, die mit ihrem Zapfen CEE_1 auf den Umfängen EH, E_1H_1 dicht hinter einander liegender und um D und D_1 drehbarer Räder (Frictionsräder) ruht. Aus dem gegebenen Drucke R der Welle folgen die Preſſungen $N = N_1 = \dfrac{R}{2\cos.\frac{\alpha}{2}}$, wofern α den Winkel DCD_1 bezeichnet, welchen die Central- oder Drucklinien CD und CD_1 zwiſchen ſich einſchließen. Vermöge der wälzenden Reibung zwiſchen dem Zapfen C und den Rad-

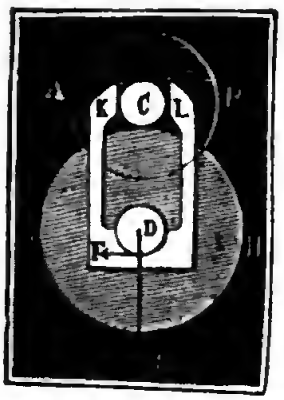
Fig. 218.

umfängen laufen die Räder mit diesem Zapfen um, und es entstehen in den Lagern von D und D_1 die Reibungen φN und φN_1, die zusammen $= \frac{\varphi R}{\cos. \frac{\alpha}{2}}$ betragen. Werden nun die Radhalbmesser $DE = D_1E_1$ durch a_1 und die Zapfenhalbmesser $DK = D_1K_1$ durch r_1 bezeichnet, so erhalten wir die Kraft am Umfange der Räder oder auch am Umfange des auf diesen liegenden Zapfens C, welche zur Ueberwindung von $\frac{\varphi R}{\cos. \frac{\alpha}{2}}$ nöthig ist: $F_1 = \frac{r_1}{a_1} . \frac{\varphi R}{\cos. \frac{\alpha}{2}}$, während dieselbe $= \varphi R$ beträgt, wenn der Zapfen C unmittelbar in einer Pfanne ruht. Wenn man die Gewichte der Frictionsräder unberücksichtigt läßt, so ist folglich die Arbeit der Reibung bei Anwendung von diesen Rädern $= \frac{r_1}{a_1 \cos. \frac{\alpha}{2}}$ mal so groß, als ohne dieselben.

Zapfenreibung.

Stellt man dem Zapfendruck R ein einziges Frictionsrad GH, Fig. 219, entgegen und verhindert man die zufälligen, übrigens nicht zu beachtenden Seitenkräfte durch feste Backen K und L, so fällt $\alpha = o$, $\cos. \frac{\alpha}{2} = 1$ und obiges Verhältniß $= \frac{r_1}{a_1}$ aus.

Fig. 219.



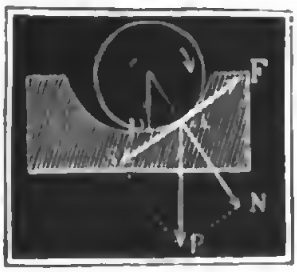
Beispiel. Ein Kunstrad wiegt 30000 Pf., der Halbmesser a seines Umfanges ist 16 Fuß und sein Zapfenhalbmesser $r = 5$ Zoll, wie groß ist die Kraft am Umfange des Rades, um die Zapfenreibung zu überwinden, um es also leer in einer gleichförmigen Bewegung zu erhalten, und wie groß ist der entsprechende Arbeitsaufwand, wenn es in einer Minute 5 Umdrehungen macht? Den Reibungscoefficienten φ können wir hier $= 0{,}075$ annehmen, weshalb die Reibung $\varphi R = 0.075\ 30000 = 2250$ Pf. beträgt. Da der Radhalbmesser $\frac{16 . 12}{5} = \frac{192}{5} = 38{,}4$ mal so groß ist, als der Zapfenhalbmesser oder Hebelarm der Reibung, so ist die auf den Radumfang reducirte Zapfenreibung $= \frac{\varphi R}{38{,}4} = \frac{2250}{38{,}4} = 58{,}59$ Pf. Der Zapfenumfang ist $\frac{2 . 5 . \pi}{12} = 2{,}618$ Fuß; folglich der Weg der Reibung in einer Secunde $= \frac{2{,}618 . 5}{60} = 0{,}2182$ Fß., und die Arbeit der Reibung während einer Secunde $= 0{,}2182 . \varphi R = 0{,}2182 . 2250 = 491$ Fußpf. Lägen die Zapfen dieses Rades auf Frictionsrädern, deren Halbmesser nur 5mal so groß sind als die

Zapfenreibung.

Halbmeſſer ihrer Zapfen, wäre alſo $\frac{r_1}{a_1} = \frac{1}{5}$, ſo würde die Kraft am Radumfange nur $\frac{1}{5} \cdot 58{,}59 = 11{,}72$ Pfd. und die von der Reibung conſumirte Arbeit nur $\frac{101}{5} = 98{,}2$ Fußpfd. betragen.

§. 166. Die Reibung bei einem ausgelaufenen Zapfen ACB, Fig. 220, welcher nur in einem Punkte A auf ſein Lager drückt, iſt kleiner als die bei einem neuen, noch in allen Punkten des Lagers aufruhenden Zapfen. Findet keine Umdrehung ſtatt, ſo drückt der Zapfen in dem Punkte B, wo die Richtung des Mitteldruckes R hindurchgeht; tritt aber Umdrehung nach der Richtung AB ein, ſo wird der Zapfen vermöge ſeiner Reibung im Zapfenlager ſo weit in die Höhe ſteigen, bis ſich die Kraft S zum Herabgleiten mit der Reibung F in's Gleichgewicht ſetzt. Der Mitteldruck R zerlegt ſich in eine Normalkraft N und in eine Tangentialkraft S, N geht auf das Lager über und erzeugt die tangential wirkende Reibung $F = \varphi N$, S aber ſetzt ſich mit F in's Gleichgewicht; es iſt alſo $S = \varphi N$. Nach dem pythagoriſchen Lehrſatze iſt $R^2 = N^2 + S^2$, daher hier $R^2 = (1 + \varphi^2)\, N^2$, umgekehrt der Normaldruck $N = \frac{R}{\sqrt{1+\varphi^2}}$ und die Reibung $F = \frac{\varphi R}{\sqrt{1+\varphi^2}}$, oder, wenn man den Reibungswinkel ϱ einführt, alſo $\varphi = tang.\ \varrho$ ſetzt,

Fig. 220.



$$F = \frac{tang.\ \varrho}{\sqrt{1 + tang.\ \varrho^2}} . R = tang.\ \varrho\ cos.\ \varrho\ R = R\, sin.\ \varrho.$$

Wenn der Zapfen anfängt ſich zu bewegen, ſo rückt folglich der Druckpunkt B um den Reibungswinkel $ACB = \varrho$ im Lager nach der entgegengeſetzten Richtung fort.

Fände das Fortrücken nicht ſtatt, ſo wäre $F = \varphi R = R\ tang.\ \varrho = \frac{R\, sin.\varrho}{cos.\ \varrho}$; es iſt folglich die Reibung nach dem Fortrücken $cos.\ \varrho$ mal ſo groß, als die vor dem Fortrücken. In der Regel iſt $\varphi = tang.\ \varrho$ noch nicht $\frac{1}{10}$ und $cos.\ \varrho > 0{,}995$, alſo die Differenz noch nicht $\frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$; man hat daher in den gewöhnlichen Fällen der Anwendung auf den Einfluß dieſes Fortrückens nichts zu geben.

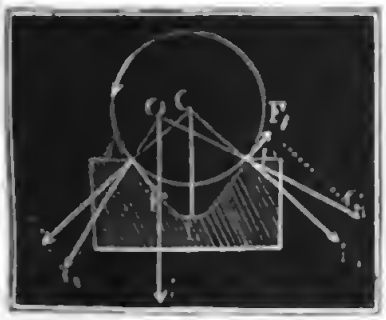
Läuft das Rad AB mit einer Nabe oder einem Auge, Fig. 221 (auf folg. Seite), um eine feſte Axe AC, ſo iſt die Reibung dieſelbe, als wenn ſich die Axen in Pfannen bewegen, nur iſt bei einem ausgelaufenen Auge

der Hebelarm der Reibung nicht der Halbmeſſer des feſten Zapfens, ſondern der des Auges. Zapfenreibung.

Fig. 221.

§. 167. Legt man den Zapfen in prismatiſche Lager, ſo erhält man größere Drücke und deshalb auch mehr Reibung als bei einem runden Lager. Iſt das Lager ADB, Fig. 222, dreiſeitig, ſo liegt der Zapfen in zwei Punkten A und B auf, und es iſt an jedem derſelben Reibung zu überwinden. Der Mitteldruck R zerlegt ſich in zwei Seitenkräfte Q und Q_1, und jede dieſer giebt einen Normaldruck N und N_1 und eine der Reibung $F = \varphi N$ und $F_1 = \varphi N_1$ gleiche Tangentialkraft. Dem vorigen §. zufolge laſſen ſich aber dieſe Reibungen auch $= Q \sin.\varrho$ und $= Q_1 \sin.\varrho$ ſetzen; man hat daher für die Geſammtreibung $= (Q + Q_1) \sin.\varrho$. Die Kräfte Q und Q_1 ergeben ſich durch Auflöſung eines aus Q und Q_1 gebildeten Kräfteparallelogrammes mit Hülfe des Mitteldruckes R, des Reibungswinkels ϱ und des Winkels $ACB = 2\alpha$, welcher dem im Lager liegenden Bogen AB entſpricht. Es iſt $QOR = ACD - CAO = \alpha - \varrho$, $Q_1OR = BCD + CBO = \alpha + \varrho$, endlich $QOQ_1 = \alpha - \varrho + \alpha + \varrho = 2\alpha$.

Fig. 222.



Die Anwendung der Formeln in §. 75 giebt nun

$$Q_1 = \frac{\sin.(\alpha-\varrho)}{\sin.2\alpha} \cdot R \text{ und } Q = \frac{\sin.(\alpha+\varrho)}{\sin.2\alpha} \cdot R;$$

daher folgt die geſuchte Reibung

$$F + F_1 = (Q + Q_1) \sin.\varrho = (\sin.[\alpha-\varrho] + \sin.[\alpha+\varrho]) \frac{R \sin.\varrho}{\sin.2\alpha}.$$

Aber $\sin.(\alpha-\varrho) + \sin.(\alpha+\varrho)$ iſt, der analytiſchen Trigonometrie zufolge, $= 2 \sin.\alpha \cos.\varrho$ und $\sin.2\alpha = 2 \sin.\alpha \cos.\alpha$, es ergiebt ſich daher

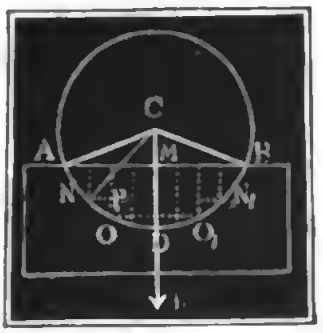
$$F + F_1 = \frac{2 \sin.\alpha \, R \sin.\varrho \cos.\varrho}{2 \sin.\alpha \cos.\alpha} = \frac{R \sin.2\varrho}{2 \cos.\alpha},$$

wofür ſich wegen der Kleinheit von ϱ auch $\frac{R \sin.\varrho}{\cos.\alpha}$ ſetzen läßt. Die Reibung bei Anwendung des dreiſeitigen Zapfenlagers iſt hiernach $\frac{1}{\cos.\alpha}$ mal ſo groß, als die beim cylindriſchen Lager. Iſt z. B. $ADB = 60^0$, alſo $ACB = 180^0 - 60^0 = 120^0$ und $ACD = \alpha = 60^0$, ſo hat man $\frac{1}{\cos.60^0} = 2$ mal ſo viel Reibung, als bei einem runden Lager.

Zapfenreibung.

§. 168. Mit Hülfe der letzten Formel läßt ſich nun auch die Reibung in einem neuen runden Zapfenlager finden, worin der Zapfen an allen Stellen noch aufliegt. Es ſei ADB in Fig. 223 ein ſolches Lager. Theilen wir den Bogen ADB, in welchem ſich Zapfen und Lager berühren, in viele Theile, wie AN, NO u. ſ. w., welche gleichen Projectionen in der Sehne AB entſprechen, und nehmen wir an, daß jeder dieſer Theile gleich viel vom ganzen Drucke R, nämlich $= \frac{R}{n}$, wobei n die Anzahl der Theile bezeichnet, vom Zapfen auf das Lager übertrage. Nach dem vorigen §. iſt die Reibung für zwei gegenüberliegende Theile NO und $N_1O_1 = \frac{R}{n} \cdot \frac{\sin. 2\varrho}{\cos. NCD}$. Aber $\cos. NCD$ iſt auch $= \cos. ONP = \frac{NP}{NO}$, wofern NP die Projection des Theiles NO repräſentirt, und $NP = \frac{\text{Sehne } AB}{n}$; es folgt daher jene den Theilen NO und N_1O_1 entſprechende Reibung $= \frac{R \sin. 2\varrho}{n} \cdot \frac{n . NO}{\text{Sehne}} = \frac{R \sin. 2\varrho}{\text{Sehne}} . NO$. Um nun die Reibung für den ganzen Bogen ADB zu finden, hat man ſtatt NO den Bogen $AD = \frac{1}{2} ADB$ einzuführen, weil die Summe aller Reibungen gleich iſt $\frac{R \sin. 2\varrho}{\text{Sehne}}$ mal Summe aller Bogentheile, es folgt alſo die Reibung in einem neuen Zapfenlager: $F = R \sin. 2\varrho \cdot \frac{\text{Bogen } AD}{\text{Sehne } AB}$, oder, wenn wir den Centriwinkel ACB, welcher dem im Lager liegenden Bogen entſpricht $= 2\alpha^0$, alſo Sehne $AB = 2\, AC \,.\, \sin. \alpha$ ſetzen:

Fig. 223.



$$F = \frac{R \sin. 2\varrho}{2} \cdot \frac{\alpha}{\sin. \alpha}, \text{ oder } \sin. 2\varrho = 2 \sin. \varrho$$

angenommen, annähernd

$$F = R \sin. \varrho \cdot \frac{\alpha}{\sin. \alpha}.$$

Hiernach iſt die anfängliche Reibung um ſo größer, je tiefer der Zapfen in ſeinem Lager liegt. Umfaßt z. B. das Zapfenlager den halben Zapfenumfang, iſt alſo $\alpha = \frac{1}{2} \pi$ und ſonach $\sin. \alpha = 1$, ſo hat man $F = \frac{\pi}{2} . R \sin. \varrho$, alſo $\frac{\pi}{2} = 1{,}57$ mal ſo groß, als beim ausgelaufenen Zapfenlager. Bei einem Zapfen, welcher nicht tief im Lager ruht, iſt α

klein, daher $\sin.\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} = \alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right)$ zu setzen, weshalb folgt Poncelet's Theorem.

$F = \left(1 + \frac{\alpha^2}{6}\right) R \sin.\varrho$ oder $= R \sin.\varrho$, wenn α sehr klein ist.

§. 169*). Der Zapfendruck R ergiebt sich in der Regel als Mittelkraft von zwei rechtwinkelig gegen einander gerichteten Kräften P und Q, ist also $= \sqrt{P^2 + Q^2}$. Insofern man ihn nur zur Bestimmung der Reibung $\varphi R = \varphi\sqrt{P^2 + Q^2}$ bedarf, kann man sich mit einem Näherungswerth von ihm begnügen, theils weil schon der Coefficient φ niemals so sicher bestimmt werden kann und von so sehr vielen Zufälligkeiten mit abhängt, theils auch, weil das ganze Product oder die Reibung φR meist nur ein kleiner Theil ist von den übrigen Kräften an der in Zapfenlagern ruhenden Maschine, wie Hebel, Rolle, Radwelle u. s. w. Der Lehrsatz, welcher einen Näherungsausdruck von $\sqrt{P^2 + Q^2}$ zu finden lehrt, ist unter dem Namen »das Poncelet'sche Theorem« bekannt, und läßt sich auf folgende Weise entwickeln.

$$\sqrt{P^2 + Q^2} = P\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{P}\right)^2} = P\sqrt{1 + x^2}, \quad \text{wobei } x = \frac{Q}{P},$$

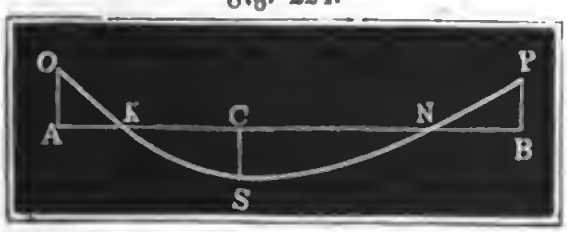
und vorausgesetzt wird, daß Q die kleinere Kraft, also x ein ächter Bruch ist. Setzen wir nun

$\sqrt{1 + x^2} = \mu + \nu x$, und bestimmen wir die Coefficienten μ und ν gewissen Forderungen entsprechend. Der relative Fehler ist

$$y = \frac{\sqrt{1+x^2} - \mu - \nu x}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{\mu + \nu x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Dieser Gleichung entspricht eine Curve OSP, Fig. 224, welche für die Abscisse $x = 0$, die Ordinate $AO = y = 1 - \mu$, und für die Abscisse $AB = 1$, die Ordinate $BP = y = 1 - \frac{\mu + \nu}{\sqrt{2}}$ hat, welche ferner in zwei Punkten K und N durch die Abscissenaxe geht, und bei S ihren größten Abstand CS von dieser Axe erreicht. Setzen wir $y = 0$, also $\sqrt{1 + x^2} = \mu + \nu x$, und lösen wir diese Gleichung in Beziehung auf x auf, so erhalten wir in $x = \frac{\mu\nu \mp \sqrt{\mu^2 + \nu^2 - 1}}{1 - \nu^2}$ die Abscissen AK und AN der Durchschnitts-

Fig. 224.



Poncelet's Theorem.

punkte K und N, und alſo auch diejenigen Werthe, bei welchen der Fehler Null ausfällt.

Um aber die Abſciſſe AC des größten negativen Fehlers CS zu finden, ſetzen wir das Differenzialverhältniß

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\mu + \nu x)(1+x^2)^{-1/2} x - \nu(1+x^2)^{1/2}}{1+x^2} = \text{Null}$$

(ſ. Art. 9 der analytiſchen Hülfslehren).

Dieſer Forderung wird entſprochen, indem man

$$(\mu + \nu x)(1+x^2)^{-1/2} x = \nu(1+x^2)^{1/2}, \text{ oder}$$

$$(\mu + \nu x)\, x = \nu(1+x^2), \text{ d. i. } x = \frac{\nu}{\mu} \text{ ſetzt.}$$

Hiernach giebt alſo die Abſciſſe $AC = \frac{\nu}{\mu}$ die größte negative Ordinate

$$CS = 1 - \frac{\mu + \nu \cdot \frac{\nu}{\mu}}{\sqrt{1+\frac{\nu^2}{\mu^2}}} = -\left(\frac{\mu^2+\nu^2}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}} - 1\right) = -(\sqrt{\mu^2+\nu^2} - 1).$$

Um nun weder einen großen poſitiven noch einen großen negativen Fehler zu begehen, ſetzen wir die drei Ordinaten $AO = 1 - \mu$, $BP = 1 - \frac{\mu+\nu}{\sqrt{2}}$ und $CS = \sqrt{\mu^2+\nu^2} - 1$ einander gleich, und beſtimmen hiernach die Coefficienten. Es iſt hiernach

$$\mu = \frac{\mu+\nu}{\sqrt{2}}, \text{ d. i. } \nu = (\sqrt{2} - 1)\,\mu = 0{,}414\,\mu \text{ und}$$

$$2 - \mu = \sqrt{\mu^2+\nu^2}, \text{ d. i. } 2 = \mu\,(1 + \sqrt{1 + 0{,}414^2}),$$

folglich

$$\mu = \frac{2}{1+\sqrt{1{,}1714}} = 0{,}96, \quad \nu = 0{,}414 \,.\, 0{,}96 = 0{,}40.$$

Wir können alſo annähernd $\sqrt{1+x^2} = 0{,}96 + 0{,}40\,.\,x$, und ebenſo die Mittelkraft

$$R = 0{,}96\,P + 0{,}40\,Q$$

ſetzen, und wiſſen, daß wir dadurch höchſtens den Fehler

$$\pm y = 1 - \mu = 1 - 0{,}96 = 0{,}04 = \text{vier Procent des}$$

wahren Werthes begehen.

Dieſe Beſtimmung ſetzt voraus, daß wir wiſſen, welche von den Kräften die größere iſt; iſt uns dies nicht bekannt, ſo können wir $\sqrt{1+x^2} = \mu(1+x)$ annehmen und bekommen ſo

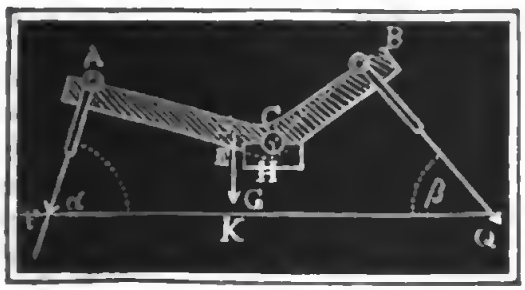
$$y = 1 - \frac{\mu(1+x)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Hier giebt nicht nur die Grenze $x = o$ den Fehler $= 1 - \mu$, sondern auch die Grenze $x = \infty$ denselben $= 1 - \frac{\mu x}{x} = 1 - \mu$; setzen wir aber $x = \frac{\nu}{\mu} = 1$, so bekommen wir den größten negativen Fehler $= -\left(\frac{2\mu}{\sqrt{2}} - 1\right) = -(\mu\sqrt{2} - 1)$, und es ergiebt sich durch Gleichsetzen dieser Fehler: $1 - \mu = \mu\sqrt{2} - 1$, also $\mu = \frac{2}{1+\sqrt{2}} = \frac{2}{2{,}414}$ $= \frac{1}{1{,}212} = 0{,}825$, wofür 0,83 gesetzt wird. In dem Falle also, wo man nicht weiß, welche von den Kräften die größere ist, läßt sich setzen: $R = 0{,}83\,(P+Q)$, und man erhält dabei den größten Fehler $\pm y = 1 - 0{,}83$ $= 0{,}17$ Procent $= \frac{1}{6}$ des wahren Werthes. Poncelet's Theorem.

Weiß man endlich, daß x nicht über 0,2 ist, so läßt man richtiger x ganz außer Acht, und schreibt $\sqrt{P^2 + Q^2} = P$, ist aber x über 0,2, so ist ebenfalls richtiger $\sqrt{P^2 + Q^2} = 0{,}888\,P + 0{,}490\,.\,Q$; in beiden Fällen ist nämlich der größte Fehler ungefähr zwei Procent *).

§. 170. Die im Obigen entwickelte Theorie der Reibung findet beim materiellen Hebel, bei der Radwelle und anderen Maschinen ihre Anwendung. Handeln wir zunächst vom Hebel, und nehmen wir im Winkelhebel ACB, Fig. 225, gleich den allgemeinsten Fall vor. Bezeichnen wir wie früher (§. 127.) den Hebelarm CA der Kraft P durch a, den Hebelarm CB der Last Q durch b, und den Zapfenhalbmesser CH durch r, setzen wir das Gewicht des Hebels $= G$, den Hebelarm CE desselben $= s$ und die Winkel APK und BQK, um welche die Kraftrichtungen vom Horizonte abweichen, $= \alpha$ und β. Die Kraft P giebt den Vertikaldruck $P\,sin.\,\alpha$, und die Last denselben $= Q\,sin.\beta$; es ist daher der gesammte Vertikaldruck $V = G + P\,sin.\alpha + Q\,sin.\beta$. Die Kraft P giebt auch noch den Horizontaldruck $P\,cos.\,\alpha$ und die Last einen Gegendruck $Q\,cos.\beta$; es bleibt daher als Horizontaldruck $H = P\,cos.\,\alpha - Q\,cos.\beta$ übrig, und es läßt sich nun der Totaldruck im Zapfen Hebel.

Fig. 225.



*) Polytechnische Mittheilungen. Band 1.

Hebel. $R = \mu V + \nu H = \mu(G + P\sin.\alpha + Q\sin.\beta) + \nu(P\cos.\alpha - Q\cos.\beta)$ ſetzen, wobei aber der zweite Theil $\nu(P\cos.\alpha - Q\cos.\beta)$ nie negativ zu nehmen, und deshalb in dem Falle, wenn $Q\cos.\beta > P\cos.\alpha$ iſt, das Zeichen zu ändern oder vielmehr $P\cos.\alpha$ von $Q\cos.\beta$ zu ſubtrahiren iſt. Um nun denjenigen Werth der Kraft zu finden, welcher dem labilen Gleichgewichte entſpricht, ſo daß beim kleinſten Zuſatz Bewegung eintritt, ſetzen wir ſtatiſches Kraftmoment gleich ſtatiſches Laſtmoment plus oder minus Moment des Gewichtes der Maſchine (§. 127) plus Moment der Reibung, alſo

$$Pa = Qb \pm Gs + \varphi Rr$$
$$= Qb \pm Gs + \varphi(\mu V + \nu H)r, \text{ woraus folgt}$$
$$P = \frac{Qb \pm Gs + \varphi[\mu(G + Q\sin.\beta) \mp \nu Q\cos.\beta]r}{a - \mu\varphi r\sin.\alpha \mp \nu\varphi r\cos.\alpha}.$$

Wirken P und Q vertikal, ſo iſt einfach $R = P + Q + G$, daher $Pa = Qb \pm Gs + \varphi(P + Q + G)r$. Iſt der Hebel einarmig, ſo wirken P und Q einander entgegen, dann iſt alſo $R = P - Q + G$ und deshalb auch die Reibung kleiner. Uebrigens muß R ſtets poſitiv in Rechnung kommen, weil die Reibung φR nur Bewegung verhindert, aber nicht erzeugt. Man ſieht auch hiernach, daß ein einarmiger Hebel mechaniſch vollkommener iſt, als ein doppelarmiger Hebel.

Beiſpiel. Sind die Hebelarme bei dem in Fig. 225. abgebildeten Winkelhebel: $a = 6$ Fuß, $b = 4$ Fuß, $s = \frac{1}{2}$ Fuß und $r = 1\frac{1}{2}$ Zoll, die Neigungswinkel $\alpha = 70°$, $\beta = 50°$, iſt ferner die Laſt $Q = 5600$ Pf. und das Gewicht G des Hebels $= 900$ Pf., ſo iſt die Kraft zur Herſtellung des labilen Gleichgewichtes folgende. Ohne Rückſicht auf Reibung iſt $Pa + Gs = Qb$, daher $P = \frac{Qb - Gs}{a} = \frac{5600.4 - 900.\frac{1}{2}}{6} = 3658$ Pf. Setzen wir $\mu = 0{,}96$ und $\nu = 0{,}40$, ſo bekommen wir $\mu(G + Q\sin.\beta) = 0{,}96\,(900 + 5600\,sin.\,50°) = 4982$ Pf, $\nu Q\cos.\beta = 0{,}40.5600.\cos.50° = 1440$ Pf.; $\mu\sin.\alpha = 0{,}96.\sin.\,70° = 0{,}902$, $\nu\cos.\alpha = 0{,}40.\cos.\,70° = 0{,}137$. Es iſt leicht einzuſehen, daß hier $P\cos.\alpha$ kleiner als $Q\cos.\beta$ iſt, denn da annähernd $P = 3658$ ausfällt, ſo hat man $P\cos.\alpha = 1251$ Pf., wogegen $Q\cos\beta = 3600$ Pf. beträgt; deshalb nehmen wir denn auch für $\nu Q\cos.\beta$ und $\nu\varphi r\cos.\alpha$ das untere Zeichen und ſetzen $P = \frac{5600.4 - 900.\frac{1}{2} + \varphi r(4982 + 1440)}{6 - \varphi r(0{,}902 - 0{,}173)}$. Nehmen wir nun noch den Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}075$, ſo erhalten wir $\varphi r = 0{,}075 \cdot \frac{3}{24} = 0{,}009375$ und die geſuchte Kraft $P = \frac{22400 - 450 + 60}{6 - 0{,}00683} = \frac{22010}{5{,}9932} = 3673$ Pf. Uebrigens iſt hier der Vertikaldruck, wenn man die ohne Rückſicht auf Reibung beſtimmte Kraft $P = 3658$ Pf. einführt: $V = 3658\,sin\,70° + 5600\,sin\,50° + 900 = 3437 + 4290 + 900 = 8627$ Pf., dagegen der Horizontaldruck

$$H = 5600\,cos.\,50 - 3658\,cos\,70 = 3600 - 1251 = 2349 \text{ Pf.}$$

Hier iſt $H > 0{,}2\,V$, daher iſt richtiger

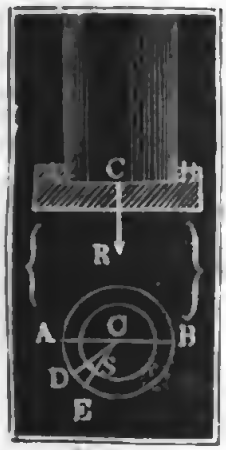
$$R = 0{,}888.H + 0{,}490\,V = 0{,}888.8627 + 0{,}490.2349 = 8811$$

zu setzen, und es folgt so das Moment der Reibung $= \varphi r R = 0{,}009375 . 8811$ $= 82{,}6$ Fußpf., und endlich die Kraft $P = \frac{22400 - 450 + 82{,}6}{6} = 3672$ Pf., welcher Werth vom obigen wenig abweicht.

§. 171. Findet bei einer Radwelle ein Druck in der Richtung der Axe statt, wie es z. B. bei stehenden Wellen wegen des Gewichtes derselben jedesmal der Fall ist, so giebt es noch eine Reibung auf der Basis des einen Zapfens. Weil hier in allen Punkten Druck zwischen dem Zapfen und der Pfanne vorhanden ist, so steht diese Reibung der einfachen gleitenden näher, als der seither betrachteten Zapfenreibung und man hat deshalb für diese die in Tab. II. (S. 209) aufgeführten Reibungscoefficienten einzuführen. Um die Arbeit dieser Reibung zu finden, muß man den mittleren Weg kennen, den die Basis AB, Fig. 226, eines solchen stehenden Zapfens bei einer Umdrehung zurücklegt. Nehmen wir an, daß der Druck R auf der ganzen Fläche gleichförmig vertheilt sei, setzen wir also voraus, daß gleich großen Theilen der Basis gleiche Reibungen zukommen. Theilen wir nun die Basis durch Halbmesser CD, CE u. s. w. in lauter gleiche Sectoren oder Dreiecke, wie DCE, so entsprechen diesen nicht nur gleiche Reibungen, sondern auch gleiche Momente, es ist daher nur das Reibungsmoment von einem dieser Dreiecke zu finden. Die Reibungen eines solchen Dreiecks lassen sich aber als Parallelkräfte ansehen, da sie alle tangential, d. i. winkelrecht zum Radius CD wirken; und da nun der Schwerpunkt eines Körpers oder einer Fläche nichts weiter als der Angriffspunkt der Mittelkraft von, in diesem Körper oder der Fläche gleichmäßig vertheilten Parallelkräften ist, so ist demnach auch hier der Schwerpunkt S des Sectors oder Dreiecks DCE der Angriffspunkt von der aus sämmtlichen Reibungen desselben entspringenden Mittelkraft. Ist nun der Druck auf diesen Sector $= \frac{R}{n}$ und der Halbmesser $CD = CE$ der Basis $= r$, so folgt (nach §. 104) das statische Moment der Reibung dieses Sectors $= CS . \frac{\varphi R}{n} = \frac{2}{3} r . \frac{\varphi R}{n}$, und endlich das statische Moment der vollständigen Zapfenreibung $= n . \frac{2}{3} r \frac{\varphi R}{n} = \frac{2}{3} \varphi R r$.

Stiftreibung.

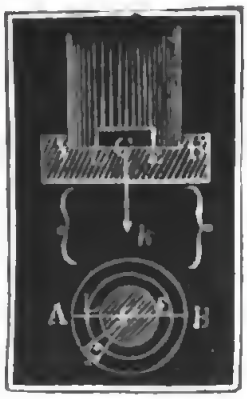
Fig. 226.



Zuweilen ist die sich reibende Fläche ein Ring $ABED$, Fig. 227 a. f. S. Sind die Halbmesser desselben $CA = r_1$ und $CD = r_2$, so hat man es mit der Bestimmung des Schwerpunktes S von einem Ringstücke zu thun, und erhält deshalb nach §. 109 den Hebelarm

Stiftreibung.

Fig. 227.



$CS = \frac{2}{3}\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}$, daher das Moment der Reibung $= \frac{2}{3}\varphi R\left(\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}\right)$. Führt man den mittleren Halbmeſſer $\frac{r_1 + r_2}{2} = r$ und die Breite des Ringes $r_1 - r_2 = b$ ein, ſo erhält man dieſes Moment der Reibung auch $= \varphi R\left(r + \frac{b^2}{12r}\right)$.

Die Arbeit der Reibung für eine Umdrehung des Zapfens iſt im erſten Falle $= 2\pi . \frac{2}{3}\varphi Rr = \frac{4}{3}\pi\varphi Rr$, und im zweiten $\frac{4}{3}\pi\varphi R\left(\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}\right)$.

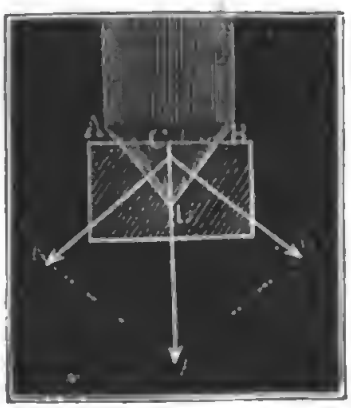
Man ſieht auch hier leicht ein, daß wegen Verminderung dieſes Arbeitsverluſtes die ſtehenden Zapfen oder Stifte möglichſt ſchwach zu machen ſind, und daß mehr Arbeitsverluſt entſteht, wenn unter übrigens gleichen Verhältniſſen die Reibung in einem Ringe als in einem vollen Kreiſe ſtatt hat.

Beiſpiel. Bei einer in der Minute 100 Umdrehungen machenden und 1800 Pf. ſchweren Turbine iſt die Stärke des Stiftes an der Baſis 1 Zoll, wie viel Arbeit conſumirt die Reibung dieſes Stiftes in einer Secunde? Den Reibungscoefficienten $= 0{,}100$ angenommen, erhält man die Reibung $\varphi R = 0{,}100 . 1800 = 180$ Pf.; der Weg pro Umdrehung iſt $= \frac{1}{2}\pi r = \frac{1}{2} . 3{,}14 . \frac{1}{24} = 0{,}1745$ Fß., daher die Arbeit pro Umdrehung $= 180 . 0{,}1745 = 31{,}41$ Fßpf. Nun macht aber dieſe Maſchine in der Secunde $\frac{100}{60} = \frac{5}{3}$ Umdrehungen; es folgt daher der geſuchte Arbeitsverluſt $= \frac{314{,}1}{6} = 52{,}3$ Fßpf.

Spitzzapfen.

§. 172. Iſt der Zapfen ABD, Fig. 228, coniſch zugeſpitzt, ſo fällt die Reibung größer aus als bei einem unten ebenen Zapfen; weil ſich der Axendruck R in die die Reibung erzeugenden Normalkräfte, wie N, N_1 u. ſ. w. zerlegt, die zuſammen größer als R allein ſind. Iſt der halbe Convergenzwinkel $ADC = BDC = \alpha$, ſo hat man $2N = \frac{R}{\sin.\alpha}$, und deshalb die Reibung dieſes Spitzzapfens $F = \varphi\frac{R}{\sin.\alpha}$. Bezeichnet man nun den Halbmeſſer $CA = CB$ des Zapfens an der Stelle des Eintrittes in die Pfanne durch r_1, ſo hat man nach dem Obigen das ſtatiſche Reibungsmoment $M = \frac{\varphi R}{\sin.\alpha}.\frac{2}{3}r_1$

Fig. 228.



$= \frac{2}{3}\varphi \frac{Rr_1}{\sin.\alpha}$; oder, da $\frac{r_1}{\sin.\alpha} = \frac{CA}{\sin.\alpha} = DA$, d. i. der Kegelſeite Spitzzapfen.
$DA = a$ gleich iſt, daſſelbe auch $M = \frac{2}{3}\varphi Ra$.

Läßt man dieſen Zapfen nur wenig in die Pfanne eintauchen, ſo wird die Arbeit bei ihm kleiner als bei einem Zapfen mit ebener Baſis und deshalb die Anwendung des Spitzzapfens dennoch von Nutzen ſein. Iſt z. B. $a = \frac{r_1}{\sin.\alpha} = \frac{r}{2}$, alſo $r_1 = \frac{1}{2} r \sin.\alpha$, ſo giebt der Spitzzapfen mit dem Halbmeſſer r_1 nur halb ſo viel Arbeitsverluſt durch die Reibung als der eben abgeſtumpfte Zapfen mit dem Halbmeſſer r.

Bildet der Stift einen abgekürzten Kegel, Fig. 229, ſo findet Reibung an dem Mantel und an der Abſtumpfungsfläche ſtatt und es ſtellt ſich das ſtatiſche Reibungsmoment

$$M = \left(r_1^3 + \frac{r^3 - r_1^3}{\sin.\alpha}\right) \cdot \frac{2}{3} \frac{\varphi R}{r^2}$$

heraus, wenn r den Halbmeſſer CA an der Stelle des Eintrittes in die Pfanne, r_1 den Halbmeſſer DE an der Baſis und α^0 den halben Convergenzwinkel bezeichnet.

Fig. 229.

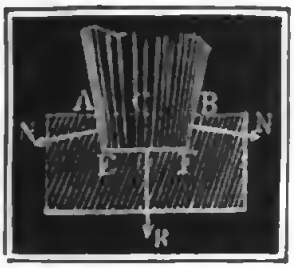


Fig. 230.

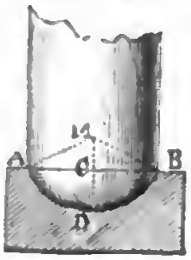
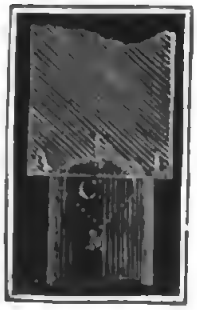


Fig. 231.



Sehr oft ſind endlich noch die ſtehenden Zapfen oder Stifte, Fig. 230 und Fig. 231, abgerundet. Wenn auch durch die Abrundung die Reibung ſelbſt keineswegs vermindert wird, ſo entſteht doch dadurch eine Verminderung des Reibungsmomentes, daß die Tiefe des Eintauchens in die Pfanne herabgezogen wird. Setzt man eine kugelförmige Abrundung voraus, ſo erhält man mit Hülfe des höheren Calcüls für eine halbkugelförmige Pfanne: das Moment der Reibung

$$M = \frac{\varphi\pi}{2} \cdot Rr;$$

für die ein niedriges Segment bildende Pfanne aber

$$M = \frac{2}{3}\left[1 + 0{,}3\left(\frac{r_1}{r}\right)^2\right] \varphi R r_1,$$

wenn r den Kugelhalbmeſſer $MA = MB$, r_1 aber den Pfannenhalbmeſſer $CA = CB$ bezeichnet.

Zapfreibung.

Anmerkung. Bei den Körnerſpitzen *ADB*, Fig. 232, an den Drehbankſpindeln zerlegt ſich der Druck *R* rechtwinkelig gegen die Arenrichtung *DX* in einen Normaldruck *N* und einen Seitendruck *S* parallel zur Are. Gelten dieſelben Bezeichnungen wie oben bei dem Spitzzapfen ſtehender Wellen, ſo hat man $N = \frac{R}{\cos.\ \alpha}$ und $S = R\ tang.\ \alpha$.

Fig. 232.

Das Moment der Reibung, welche aus *N* entſpringt, iſt

$$M = \varphi N . {}^2/_3 r_1 = {}^2/_3\ \varphi\ \frac{Rr_1}{\cos.\alpha},$$

oder da $r_1 = CA = DA\ sin.\ ADC = a\ sin.\ \alpha$ iſt,

$$M = {}^2/_3\ \varphi\ R\ a\ tang.\ \alpha.$$

Die Seitenkraft *S* wird ganz oder zum Theil durch eine Gegenkraft S_1 an der andern Spitze aufgehoben.

Beiſpiel. Wenn das Gewicht der armirten Welle eines Pferdegöpels $R = 6000$ Pf., der Halbmeſſer ſeines coniſch geſpitzten Stiftes $= r = 1$ Zoll und der Convergenzwinkel 2α des Kegels $= 90°$ iſt, ſo beträgt das ſtatiſche Moment der Reibung an dieſem Stifte

$$M = {}^2/_3 . \varphi . \frac{Rr}{sin.\alpha} = {}^2/_3 . 0{,}1 . \frac{6000}{sin.45°} \cdot \frac{1}{12} = \frac{100}{3\sqrt{1/_2}} = 47{,}1 \text{ Fußpfund.}$$

Macht dieſe Welle während des Ausförderns einer Tonne aus der Grube $= u = 24$ Umdrehungen, ſo iſt die Arbeit, welche die Reibung am Stifte in dieſer Zeit aufzehrt

$$L = 2\pi u . {}^2/_3\ \varphi\ \frac{Rr}{sin.\alpha} = 2\pi . 24 . 47{,}1 = 7103 \text{ Fßpf.}$$

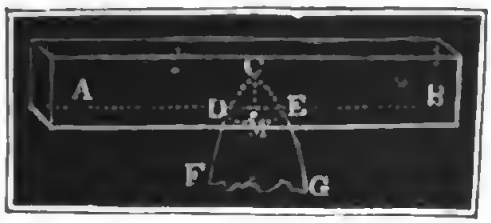
Spitzen und Schneiden.

§. 173. Um die Axenreibung drehender Körper möglichſt zu vermeiden, unterſtützt man dieſe durch zugeſpitzte Stifte, ſcharfe Schneiden u. ſ. w. Hätte man es hierbei mit vollkommen ſtarren und unelaſtiſchen Körpern zu thun, ſo würde bei dieſer Methode des Aufhängens oder Unterſtützens gar kein Arbeitsverluſt in Folge der Reibung entſtehen können, weil hier von der Reibung kein meßbarer Weg zurückgelegt wird; allein da jeder Körper eine gewiſſe Elaſticität beſitzt, ſo wird beim Aufliegen eines ſolchen auf einer Spitze oder Schneide ein kleines Eindrücken dieſer eintreten und ſich dadurch eine reibende Fläche herausſtellen, auf welcher von der Reibung Wege beſchrieben werden, die allerdings zu einem, wenn auch nur ſehr kleinen Arbeitsverluſte Veranlaſſung geben. Bei lange anhaltenden Drehungen und Schwingungen der auf dieſe Weiſe unterſtützten Körper ſtellen ſich ſolche Reibungsflächen ohnedies noch ein in Folge des Abreibens der Spitze oder ſcharfen Kante, und es iſt dann die Reibung nach dem Früheren zu beurtheilen. Man wendet aus dieſem Grunde dieſe Unterſtützungsmethoden auch nur bei Inſtrumenten, wie bei der Bouſſole,

Waage u. ſ. w. an, wo es auf die Herabziehung der Reibung weſentlich ankommt und nur von Zeit zu Zeit Bewegungen zugelaſſen werden. Spitzen und Schneiden.

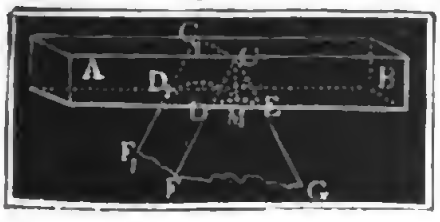
Verſuche über Reibung eines auf einer harten Stahlſpitze ruhenden und um dieſe drehbaren Körpers hat Coulomb angeſtellt. Nach dieſen Verſuchen wächſt dieſe Reibung etwas ſtärker als der Druck und verändert ſich mit der Stärke der Zuſpitzung des unterſtützenden Stiftes. Sie iſt bei einer Granatfläche am kleinſten, größer bei einer Achatfläche, größer bei einer Fläche von Bergkryſtall, noch größer bei einer Glasfläche, am größten aber bei Stahlflächen. Bei ſehr kleinem Drucke, wie bei der Magnetnadel, kann der Stift bis auf 10^0 bis 12^0 Convergenz zugeſpitzt werden. Iſt der Druck aber groß, ſo muß man weit größere Convergenzwinkel (30 bis 45^0) anwenden. Die Reibung iſt kleiner, wenn der Körper mit einer ebenen Fläche auf einer Spitze ruht, als wenn er mit einer coniſchen oder ſphäriſchen Höhlung aufſitzt. Bei einer ſcharfen Schneide, wie ſie bei Waagebalken vorkommt, finden jedenfalls ähnliche Beziehungen ſtatt. Schwer zu belaſtende Waagebalken bekommen ſchneidige Axen von 90^0 Convergenz, leichte Waagen können eine Schärfung von 30^0 vertragen.

Fig. 233.



Anmerkung. Nimmt man an, daß die Nadel AB, Fig. 233, am Stifte FCG die Spitze DCE von der Höhe $CM = h$ und dem Halbmeſſer $DM = r$ eingedrückt habe, und ſetzt man voraus, daß das Volumen $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ dem Drucke R proportional ſei, ſo läßt ſich das Maaß der Reibung auf folgende Weiſe finden. Setzen wir $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \mu R$, wo μ eine Erfahrungszahl iſt, und führen wir den Convergenzwinkel $DCE = 2\alpha$ ein, ſetzen alſo $h = r\,cotg.\,\alpha$, ſo erhalten wir den Halbmeſſer der Baſis: $r = \sqrt[3]{\frac{3\mu R\,tang.\,\alpha}{\pi}}$ und $\varphi Rr = \varphi\sqrt[3]{\frac{3\mu R^4\,tang.\,\alpha}{\pi}} = \varphi\sqrt[3]{\frac{3\mu}{\pi}} \cdot R^{4/3}\,(tang.\,\alpha)^{1/3}$. Hiernach iſt alſo anzunehmen, daß die Reibung auf einem Stifte mit der Cubikwurzel aus der vierten Potenz des Druckes und der Cubikwurzel aus der Tangente des halben Convergenzwinkels gleichmäßig wächſt.

Fig. 234.

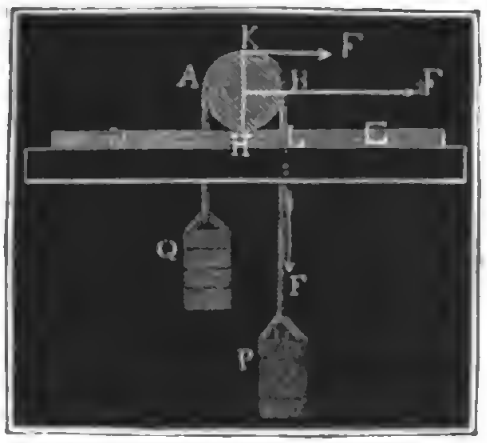


Ebenſo läßt ſich das Maaß der Reibung eines Balkens AB, Fig. 234, finden, welcher über einer ſcharfen Kante CC_1 oscillirt. Iſt α der halbe Convergenzwinkel DCM, l die Länge CC_1 der Schneide und R der Druck, ſo ergiebt ſich dieſes Maaß $= \sqrt{\frac{(Pl\,tang.\,\alpha)^3}{l}}$.

Wälzende Reibung

§. 174. Die Theorie der wälzenden Reibung iſt noch keineswegs feſt begründet, man weiß, daß dieſe Reibung zunimmt mit dem Drucke und daß ſie bei einem kleineren Durchmeſſer der Walze größer iſt als bei einem größeren Durchmeſſer; in welcher algebraiſchen Abhängigkeit dieſe Reibung aber zum Drucke und Durchmeſſer des ſich wälzenden Körpers ſteht, kann noch nicht als ausgemacht angeſehen werden. Coulomb machte nur einige Verſuche mit 2 bis 12 Zoll dicken Walzen aus Guajac (Pocken-) oder Franzoſenholz und aus Ulmenholz, die er auf Unterlagen von Eichenholz wälzen ließ, indem er die Enden eines dünnen um die Walze AB gelegten Fadens durch ungleiche Gewichte P und Q. Fig 235, anſpannte. Nach den Ergebniſſen dieſer Verſuche ſcheint allerdings die wälzende Reibung dem Drucke direct und dem Durchmeſſer der Walze umgekehrt proportional zu wachſen, ſo daß die Kraft zur Ueberwindung der wälzenden Reibung durch $F = \varphi \cdot \frac{R}{r}$ auszudrücken iſt, wenn R den Druck, r den Halbmeſſer der Walze und φ den durch Verſuche zu ermittelnden Reibungscoefficienten bezeichnet. Giebt man r in preuß. Zollen, ſo iſt nach dieſen Verſuchen

Fig. 235.



für die Walzen aus Pockenholz $\varphi = 0{,}0184$,
für die aus Ulmenholz $\varphi = 0{,}0311$.

Für gußeiſerne Räder von 20 Zoll Durchmeſſer, welche auf gußeiſernen Schienen laufen, fand der Verfaſſer:

$\varphi = 0{,}0178$, und Herr Rittinger in Schemnitz:
$\varphi = 0{,}0187$.

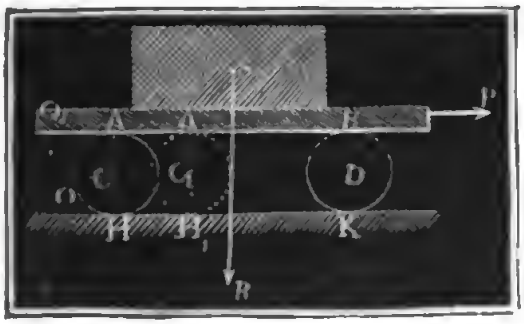
Nach Pambour iſt für Eiſenbahnräder von ungefähr 38 Zoll Höhe:
$\varphi = 0{,}019$ bis $0{,}021$.

Die Formel $F = \varphi \frac{R}{r}$ ſetzt voraus, daß die Kraft F zur Ueberwindung der Reibung an einem dem Walzenhalbmeſſer gleichen Hebelarm $HC = HL = r$ wirke, und daher mit der Walze einerlei Weg zurücklege; wirkt dieſelbe aber an einem Hebelarm $HK = 2r$, ſo iſt auch der Weg derſelben doppelt ſo groß als der der Walze auf der Bahn, und daher die Reibung:

$$F_1 = \tfrac{1}{2} F = \varphi \frac{R}{2r}.$$

Wird ein über Walzen C und D, Fig. 236, liegender Körper ABS fortgezogen, ſo fällt die erforderliche Kraft P ſehr klein aus, weil nur zwei wälzende Reibungen, nämlich die zwiſchen AB und den Walzen und die zwiſchen den Walzen und der Bahn HK zu überwinden ſind. Uebrigens iſt der progreſſive Weg der Walzen nur halb ſo groß als der Weg der Laſt R, und es ſind deshalb beim ferneren Fortgehen immer wieder neue Walzen vorn unterzuſchieben, weil die Berührungspunkte A und B zwiſchen den Walzen und dem Körper AB vermöge des Wälzens ebenſo viel rückwärts gehen, als die Axe der Walze vorwärts. Hat ſich die Walze AH um den Bogen AO gedreht, ſo iſt ſie auch um einen dieſem Bogen gleichen Weg AA_1 vorwärts gegangen und O mit O_1 in Berührung gekommen, der neue Berührungspunkt O_1 alſo um $AO_1 = AO$ hinter dem vorigen (A) zurückgegangen. Sind die Reibungscoefficienten φ und φ_1, ſo hat man die Kraft zum Fortziehen der Laſt R: $P = (\varphi + \varphi_1)\,\frac{R}{2r}$. Wälzende Reibung.

Fig. 236.



Anmerkung. Die von Morin in großer Ausdehnung angeſtellten Verſuche über den Widerſtand der Wagen auf Straßen ſtimmen mit dem Geſetze, wonach dieſer Widerſtand mit dem Drucke gleichmäßig und mit der Dicke der Walze umgekehrt wächſt, überein. Ein anderer franzöſiſcher Ingenieur, Dupuit, hingegen leitet aus ſeinen Verſuchen ab, daß die wälzende Reibung zwar dem Drucke direct, aber übrigens nur der Quadratwurzel aus dem Walzenhalbmeſſer umgekehrt proportional wachſe. Beſondere theoretiſche Anſichten über wälzende Reibung findet man in v. Gerſtner's Mechanik, Bd. I. §. 537 und in Brix' Abhandlung über die Reibung, Art. 6 entwickelt. Ausführlicher wird hierüber im dritten Theile bei der Förderung auf Straßen und Schienenwegen gehandelt.

Fig. 237.

§. 175. Wir haben nun die Reibung eines biegſamen Körpers kennen zu lernen. Wird ein übrigens vollkommen biegſames, durch eine Kraft Q angeſpanntes Seil um die Kante C eines feſten Körpers ABE, Fig. 237, gelegt und dadurch um einen Winkel $DCB = \alpha^0$ von ſeiner anfänglichen Richtung abgelenkt, ſo entſteht in der Kante ein Seilreibung.

Seilreibung. Druck R, aus dem wieder eine Reibung F hervorgeht, welche verurſacht, daß die Kraft P zur Herſtellung eines labilen Gleichgewichtes größer oder kleiner als Q iſt. Der Druck iſt (§. 74) $R = \sqrt{P^2+Q^2-2PQ\cos.\alpha}$, folglich die Reibung $F = \varphi\sqrt{P^2+Q^2-2PQ\cos.\alpha}$. Setzen wir nun noch $P = Q + F$ und P^2 annähernd $= Q^2 + 2QF$, ſo erhalten wir

$$F = \varphi\sqrt{Q^2+2QF+Q^2-2Q^2\cos.\alpha-2FQ\cos.\alpha}$$

$$= \varphi\sqrt{2(1-\cos.\alpha)(Q^2+QF)} = 2\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}\sqrt{Q^2+QF},$$ wofür ſich wieder $= 2\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}(Q+\frac{1}{2}F)$ ſetzen läßt, wenn man von der Quadratwurzel nur die erſten 2 Glieder berückſichtigt. Jetzt ergiebt ſich $F-\varphi F\sin.\frac{\alpha}{2}=2\varphi Q\sin.\frac{\alpha}{2}$, folglich die geſuchte Reibung $F=\frac{2\varphi Q\sin.\frac{\alpha}{2}}{1-\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}}$,

wofür meiſt $= 2\varphi Q\sin.\frac{\alpha}{2}\left(1+\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}\right)$ und ſogar ſehr oft $=2\varphi Q\sin.\frac{\alpha}{2}$ geſetzt werden kann. Um alſo das Seil über der Ecke wegzuziehen, iſt eine Kraft $P=Q+F=\left(1+\frac{2\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}}{1-\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}}\right)Q$

nöthig, und um umgekehrt, durch das Seil das Niedergehen der Laſt Q zu verhindern, iſt eine Kraft $P_1=Q:\left(1+\frac{2\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}}{1-\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}}\right)$ erforderlich;

annähernd iſt alſo $P=\left[1+2\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}\left(1+\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}\right)\right]Q$, oder noch einfacher, $P=\left(1+2\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}\right)Q$ und $P_1=\frac{Q}{1+2\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}\left(1+\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}\right)}$,

oder $P_1=\frac{Q}{1+2\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}}=\left(1-2\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}\right)Q$ zu ſetzen.

Geht das Seil über mehrere Kanten, ſo laſſen ſich durch wiederholte Anwendung dieſer Formeln die Kräfte P und P_1 am andern Seilende eben-

falls berechnen. Nehmen wir den einfachen Fall an, daß das Seil ABC, Seilreibung.

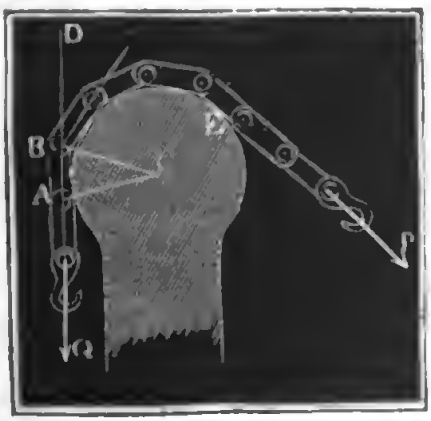
Fig. 238.

Fig. 238, um einen Körper mit n Kanten gelegt sei und an jeder Kante um denselben kleinen Winkel α abgelenkt werde. Die Spannung im ersten Seilstücke ist $Q_1 = \left(1+2\varphi \sin.\frac{\alpha}{2}\right)Q$, wenn die des Endes $= Q$ beträgt; die des zweiten, $Q_2 = \left(1+2\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}\right)Q_1$ $= \left(1+2\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}\right)^2 Q$, die des dritten, $Q_3 = \left(1+2\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}\right) Q_2$ $= \left(1+2\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}\right)^3 Q$, daher allgemein, die Kraft am letzten Ende: $P = \left(1+2\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}\right)^n Q$, insofern es auf eine Bewegung in der Richtung der Kraft P ankommt. Vertauscht man P durch Q, so erhält man dagegen $P_1 = \frac{Q}{\left(1+2\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}\right)^n}$, wofern nur eine Bewegung in der Richtung von Q zu verhindern ist.

Die Reibung $F = P - Q$ ist in einem Falle $= \left[\left(1+2\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}\right)^n - 1\right]Q$ und im zweiten $= Q - P_1 = \left[\left(1+2\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}\right)^n - 1\right]P_1$ $= \left[1 - \left(1+2\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}\right)^{-n}\right]Q$.

Dieselben Formeln finden auch ihre Anwendung bei einem um einen Cylinder gewickelten, gegliederten Körper, z. B. einer Kette ABE, Fig. 239, wo dann n die Zahl der aufliegenden Glieder angiebt. Ist die Länge AB eines Kettengliedes $= l$ und die Entfernung CA der Axe A eines Gliedes von dem Mittelpunkte des bedeckten Kreisbogens $= r$, so hat man $\sin.\frac{\alpha}{2} = \frac{l}{2r}$.

Fig. 239.



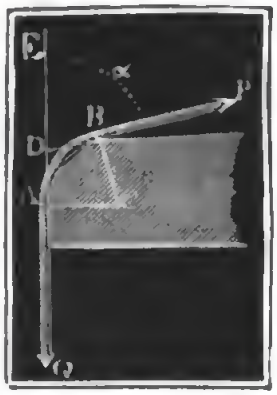
Beispiel. Wie groß ist die Reibung am Umfange eines 4 Fuß hohen Rades, wenn dasselbe von zwanzig 5 Zoll langen

Seilreibung. und einen Zoll dicken Gliedern einer Kette bedeckt wird, deren eines Ende feſtgehalten und deren anderes Ende mit 50 Pf. Kraft angeſpannt wird? Hier iſt $P_1 = 50$ Pf., $n = 20$, $sin.\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{48+1} = \frac{5}{49}$, ſetzen wir nun noch für φ den mittleren Werth 0,35, ſo erhalten wir die Reibung, mit der die Kette dem Rade in ſeiner Umdrehung entgegenwirkt: $F = \left[\left(1+2\,.\,0{,}35\,.\,\frac{5}{49}\right)^{20} - 1\right]\,.\,50$

$= \left[\left(1+\frac{35}{490}\right)^{20} - 1\right]\,.\,50 = \left[\left(\frac{15}{14}\right)^{20} - 1\right].50 = 2{,}974\,.\,50 = 149$ Pf.

§. 176. Liegt ein geſpanntes Seil AB, Fig. 240, um einen feſtliegenden, cylindriſch abgerundeten Körper ACB, ſo läßt ſich die Reibung durch die im vorigen §. gefundene Regel ebenfalls finden. Es iſt hier der Ablenkungswinkel $EDB = \alpha^o =$ dem Centriwinkel ACB des Seilbogens AB; theilt man denſelben in n gleiche Theile und ſieht man den Bogen AB als aus n geraden Linien beſtehend an, ſo erhält man auch n Ecken, jede mit der Ablenkung $\frac{\alpha^o}{n}$, und deshalb die Gleichung zwiſchen Kraft und Laſt wie im vorigen §.: $P = \left(1 + 2\varphi\, sin.\frac{\alpha}{2n}\right)^n Q$. Wegen der

Fig. 240.



Kleinheit von $\frac{\alpha}{2n}$ läßt ſich aber $sin.\frac{\alpha}{2n} = \frac{\alpha}{2n}$ ſetzen, weshalb

$P = \left(1 + \frac{\varphi\alpha}{n}\right)^n Q$ ſich herausſtellt. Bedient man ſich nun noch der binomiſchen Reihe, ſo erhält man

$$P = \left(1 + n\frac{\varphi\alpha}{n} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\frac{(\varphi\alpha)^2}{n^2} + \frac{n(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{(\varphi\alpha)^3}{n^3} + \ldots\right) Q,$$

oder, da n ſehr groß iſt, alſo $n - 1 = n - 2 = n - 3 \ldots = n$ geſetzt werden kann:

$$P = \left(1 + \varphi\alpha + \frac{1}{1\,.\,2}(\varphi\alpha)^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,(\varphi\alpha)^3 + \ldots\right) Q.$$

Nun iſt aber $1 + x + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots = e^x$, wo e die Grundzahl 2,71828.. des natürlichen Logarithmenſyſtemes bezeichnet, es läßt ſich daher auch ſetzen:

$P = e^{\varphi\alpha}\,.\,Q$, ſo wie $Q = Pe^{-\varphi\alpha}$, und umgekehrt

$$\alpha = \frac{1}{\varphi}\, Log.\, nat.\, \frac{P}{Q} = \frac{2{,}3026}{\varphi}\,(Log\, P - Log\, Q).$$

Digitized by Google

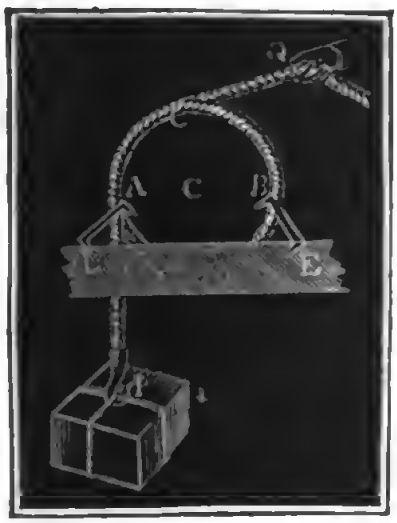
Giebt man den Seilbogen nicht in Theilen von π, ſondern in Graden, ſo hat man $\alpha = \frac{\alpha^0}{180^0} . \pi$ zu ſubſtituiren, drückt man ihn endlich durch die Zahl u der Umſchläge aus, ſo hat man $\alpha = 2\pi u$ zu ſetzen. Seilreibung.

Die Formel $P = e^{\varphi\alpha} . Q$ giebt an, daß die Seilreibung $F = P - Q$ auf einem feſtliegenden Cylinder gar nicht vom Durchmeſſer deſſelben, ſondern nur von der Anzahl der Seilumſchläge abhängt, zeigt aber auch, daß ſie leicht außerordentlich vergrößert und faſt bis in's Unendliche geſteigert werden kann. Setzen wir $\varphi = 1/3$, ſo bekommen wir

für $1/4$ Umwickelung $P = 1{,}69\ Q$
„ $1/2$ „ $P = 2{,}85\ Q$
„ 1 „ $P = 8{,}12\ Q$
„ 2 „ $P = 65{,}94\ Q$
„ 4 „ $P = 4348{,}56\ Q$, u. ſ. w.

Beiſpiel. Um eine große untheilbare Laſt P von 1200 Pf. von einer gewiſſen Höhe, z. B. in einem Schachte, herabzulaſſen, wickelt man das Seil, woran dieſe Laſt hängt, um einen feſtgeklammerten runden Stamm AB, Fig. 241, $1^3/_8$mal herum und hält das übrig bleibende Seilende in der Hand. Mit welcher Kraft iſt nun dieſes Seilende anzuſpannen, damit die Laſt langſam und gleichförmig niederſinkt? Setzen wir auch hier $\varphi = 0{,}3$, ſo erhalten wir dieſe Kraft

Fig. 241.

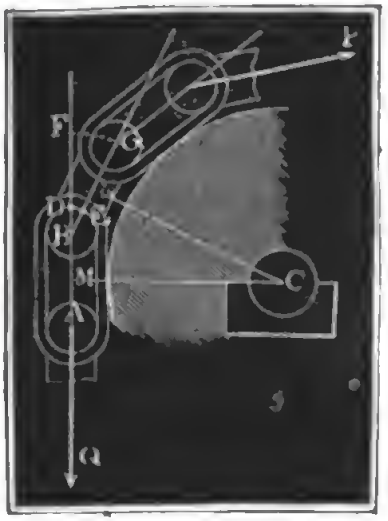


$$Q = Pe^{-\varphi\alpha} = 1200 . e^{-0{,}3 . \frac{11}{8} 2\pi}$$
$$= 1200 . e^{-\frac{33}{40}\pi},$$
$$\text{also } Log.\ nat.\ Q = Log\ nat.\ 1200 - \frac{33}{40}\pi$$
$$= 7{,}0901 - 2{,}5918 = 4{,}4983.$$
$$Log.\ Q = 1{,}9536,\ Q = 89{,}9 \text{ Pf.}$$

§. 177. Legen ſich Seile oder gegliederte Körper u. ſ. w. um eine Rolle oder um den Umfang anderer, um eine Axe drehbarer Cylinder, ſo hört die im vorigen §. betrachtete Seil- oder Kettenreibung auf, weil nun der Radumfang mit dem Seile einerlei Geſchwindigkeit annimmt, dafür macht ſich nun aber die Kraft zum Umbiegen beim Auflegen auf die Rolle und nach Befinden auch die zum Aufbiegen beim Abwickeln von der Rolle bemerkbar. Iſt es eine Kette, die ſich um eine Trommel wickelt, ſo beſteht der Widerſtand des Auf- und Abwickelns in einer Reibung der Kettenbolzen, indem letztere in ihren Lagern um gewiſſe Winkel gedreht werden. Iſt AB, Fig. 242, das eine und BG Steifigkeit der Ketten.

Steifigkeit der Ketten.

Fig. 242.



das nächſtfolgende Kettenglied, iſt ferner C die Drehungsaxe der Rolle, worauf ſich die durch die Laſt Q ausgeſpannte Kette aufwickelt, ſind endlich CM und CN Perpendikel gegen die Längenaxen der Glieder AB und BG gefällt, ſo iſt $MCN = \alpha^0$ der Winkel, um welchen ſich die Rolle dreht, während ſich ein neues Glied auflegt und auch zugleich der Winkel $FBG = 180^0 - ABE$, um welchen ſich bei dieſem Auflegen das Glied BG mit ſeinem Bolzen BD in dem Gliede AB umdreht. Iſt nun $BD = BE = r_1$ der Halbmeſſer des Bolzens, ſo durchläuft der Druck- oder Reibungspunkt D bei dieſem Umlegen einen Bogen $DE = r_1\alpha$, und es iſt die hierbei verrichtete Arbeit der Reibung $\varphi_1 Q$ im Punkte B, $= \varphi_1 Q . r_1 \alpha$. Die Kraft P_1 zur Ueberwindung dieſer Reibung, in der Richtung der Längenaxe BG wirkend, angenommen, erhält man für ſie den gleichzeitigen Weg $s = CN$ mal Bogen des Winkels $MCN = CN . \alpha$ und die Arbeit $= P_1 . CN . \alpha$; es ergiebt ſich daher durch Gleichſetzen beider Arbeiten $P_1 . CN . \alpha = \varphi_1 . Q r_1 \alpha$ und die geſuchte Kraft, wenn man noch den um die halbe Kettenſtärke vergrößerten Halbmeſſer CN der Trommel durch a bezeichnet:

$$P_1 = \varphi_1 Q . \frac{r_1}{a}.$$

Ohne Rückſicht auf alle Reibungen wäre die Kraft zum Umdrehen der Rolle: $P = Q$, mit Rückſicht der Reibung beim Aufwickeln der Kette iſt ſie aber $P = Q + P_1 = \left(1 + \varphi_1 \frac{r_1}{a}\right) Q$. Wickelt ſich die Kette von der Trommel ab, ſo findet ein gleicher Widerſtand Statt; wenn alſo, wie bei den ſogenannten Leitrollen, ein Auflegen auf der einen Seite und ein Abwickeln auf der andern ſtatthat, ſo iſt die Kraft $P = \left(1 + \varphi_1 \frac{r_1}{a}\right)^2 Q$ oder annähernd $= \left(1 + 2\varphi_1 \frac{r_1}{a}\right) Q$.

Iſt endlich noch der Zapfendruck $= R$ und der Zapfenhalbmeſſer $= r$, ſo folgt die Kraft bei Berückſichtigung aller Hinderniſſe:

$$P = \left(1 + 2\varphi_1 \frac{r_1}{a}\right) Q + \varphi \frac{r}{a} R.$$

Steifigkeit der Ketten.

Beiſpiel. Wie groß iſt die Kraft P am Ende einer um eine Rolle ACB, Fig. 243, geſchlagenen Kette, wenn die vertikal niederziehende Laſt $Q = 110$ Pf., das Gewicht der Rolle ſammt Kette 50 Pfund beträgt, der bis zur Mitte der Kette gemeſſene Halbmeſſer a der Rolle $= 7$ Zoll, der Halbmeſſer des Zapfens $C = \frac{3}{8}$ Zoll und der Halbmeſſer der Kettenbolzen $= \frac{3}{8}$ Zoll mißt? Setzen wir die Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}075$ und $\varphi_1 = 0{,}15$, ſo erhalten wir nach der letzten Formel die Kraft

Fig. 243.

$$P = \left(1 + 2 \cdot 0{,}15 \cdot \frac{3}{8 \cdot 7}\right) 110 + 0{,}075 \cdot \frac{3}{8.7}(110 + 50 + P),$$

oder, wenn wir rechts $P = 110$ annähernd annehmen:

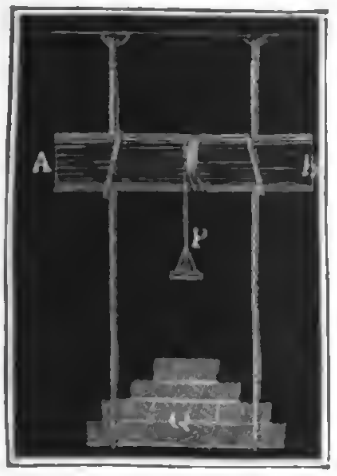
$$P = 1{,}016 \cdot 110 + 0{,}0067 \cdot 270 = 111{,}76 + 1{,}81 = 113{,}6 \text{ Pf.}$$

Steifigkeit der Seile.

§. 178. Beim Umbiegen eines Seiles um eine Rolle, oder beim Aufwickeln deſſelben auf eine Welle, tritt die Steifigkeit (franz. roideur, engl. rigidity) deſſelben als ein der Bewegung deſſelben entgegengeſetztes Hinderniß hervor. Dieſer Widerſtand hängt nicht allein von dem Stoffe ab, aus dem das Seil gefertigt iſt, ſondern auch von der Zuſammenſetzungsweiſe und von der Stärke des Seiles, und läßt ſich deshalb nur auf experimentellem Wege ermitteln.

Verſuche zu dieſem Zwecke ſind vorzüglich von Coulomb, und in der neueren Zeit von dem Verfaſſer ſelbſt angeſtellt worden. Während ſich Coulomb nur mit ſchwachen Hanfſeilen von $\frac{1}{4}$ bis höchſtens $1\frac{1}{2}$ Zoll Stärke beſchäftigte und dieſelben auch nur auf Rollen von 1 bis höchſtens 6 Zoll Durchmeſſer aufwickeln ließ, hat der Verfaſſer Hanfſeile von 2 Zoll Stärke und Drahtſeile von $\frac{1}{2}$ bis 1 Zoll Stärke über Rollen von 2 bis $6\frac{1}{2}$ Fuß Durchmeſſer laufen laſſen.

Fig. 244.



Coulomb hat ſeine Verſuche auf zweierlei Weiſe ausgeführt. Ein Mal nach Amontons mit einem in Fig. 244 abgebildeten Apparate, wo AB eine von zwei Seilen umſchlungene Walze iſt, die Spannung durch ein Gewicht Q hervorgebracht und das Herabrollen der Walze durch ein zweites Gewicht P, welches mittels eines dünnen Fadens an dieſer Walze zieht, bewirkt wird. Ein zweites Mal hat er die Seile um, auf einer horizontalen Bahn ſich wälzen laſſende Cylinder gelegt, und aus der Differenz der an beiden Seilenden hängenden und ein langſames Fortrollen bewirkenden Gewichte, nach Abzug der rollenden Reibung, auf den Steifigkeitswiderſtand geſchloſſen.

Aus den Verſuchen Coulomb's geht hervor, daß der Steifigkeits-

Steifigkeit der Seile.

widerſtand mit der Stärke der Spannung des ſich aufwickelnden Seiles ziemlich gleichmäßig wächſt, daß er aber auch noch aus einem conſtanten Gliede K beſteht, wie ſich allerdings nicht anders erwarten läßt, weil ſchon eine gewiſſe Kraft nöthig iſt, um ein unangeſpanntes Seil umzubiegen. Auch ſtellt ſich heraus, daß dieſer Widerſtand im umgekehrten Verhältniſſe der Rollendurchmeſſer zunimmt, daß er alſo bei dem doppelten Durchmeſſer der Rolle nur halb ſo groß iſt, beim dreifachen ein Drittel u. ſ. w. Endlich läßt ſich die Beziehung zwiſchen der Seildicke und der Seilſteifigkeit nach dieſen Verſuchen nur annähernd angeben, wie es auch kaum anders zu erwarten iſt, da die Steifigkeit auch noch von der materiellen Beſchaffenheit und von der Stärke der Drehung der Fäden und Litzen mit abhängt. Bei neuen Seilen fand ſich die Steifigkeit ungefähr proportional der Potenz $d^{1,7}$, bei alten aber mehr $d^{1,4}$, wenn d den Durchmeſſer des Seiles bezeichnet. Es iſt alſo nur ſehr ohngefähr, wenn Einige dieſen Widerſtand dem einfachen, Andere dem Quadrate der Seilſtärke proportional wachſend annehmen.

§. 179. Hiernach läßt ſich alſo der Steifigkeitswiderſtand der Hanfſeile durch die Formel $S = \frac{d^n}{a}(K + \nu Q)$, wo d die Seilſtärke, a der Rollenhalbmeſſer, bis Axe des Seiles gemeſſen, Q die Spannung des ſich aufwickelnden Seiles, n, K und ν aber Erfahrungszahlen bezeichnen. Prony hat aus den Verſuchen Coulomb's gefunden, daß für neue Seile

$$S = \frac{d^{1,7}}{a}(2{,}45 + 0{,}053\,Q), \text{ und für alte}$$

$$S_1 = \frac{d^{1,4}}{a}(2{,}45 + 0{,}053\,Q) \text{ geſetzt werden kann, wenn } a$$

und d in Linien, Q, S in Pfunden ausgedrückt werden. Dieſe Ausdrücke beziehen ſich aber auf Pariſer Maaß, in preußiſchen Zollen und Pfunden ausgedrückt, ändern ſie ſich in folgende um:

$$S = \frac{d^{1,7}}{a}(14{,}23 + 0{,}295Q) \text{ und } S_1 = \frac{d^{1,4}}{a}(6{,}83 + 0{,}141\,Q).$$

Da ſelbſt dieſe complicirteren Formeln nicht immer die erwünſchte Uebereinſtimmung mit den Verſuchsreſultaten geben, ſo kann man, ſo lange nicht neue Verſuche zu Grunde gelegt werden können, mit Eytelwein

$$S = \nu \cdot \frac{d^2}{a}Q = \frac{d^2 Q}{3500\,a} \text{ ſetzen, wobei vorausgeſetzt iſt, daß } a$$

in preußiſchen Fußen und d in preußiſchen Linien, Q und S aber in gleichem Gewichtsmaaße, übrigens willkürlich, auszudrücken ſind. Für Metermaaß iſt $S = 18{,}6 \cdot \frac{d^2 Q}{a}$. Dieſe Formel giebt natürlich nur bei größeren Spannungen, wie ſie allerdings meiſt in der praktiſchen Anwendung vorkommen, genügende Annäherungsreſultate.

Die Steifigkeit getheerter Seile iſt ungefähr um ein Sechstel größer als die ungetheerter Seile gefunden worden, und naſſe Seile hat man ungefähr ein Zwölftel ſteifer gefunden als trockene. Steifigkeit der Seile.

Beiſpiel. Bei einer Seilſpannung von 350 Pf. und einem Rollenhalbmeſſer von 2½ Zoll iſt für ein 9 Linien dickes neues Seil der Steifigkeitswiderſtand nach Prony: $S = \frac{2}{3}(\frac{3}{4})^{1,7}(14{,}23 + 0{,}295 \cdot 350) = 0{,}613 \cdot 47{,}0 = 28{,}8$ Pfd., nach Eytelwein: $S = \frac{9^2 \cdot 350}{3500 \cdot \frac{3}{4}} = 38{,}9$ Pf. Wäre die Spannung Q nur 150 Pf., ſo hätte man nach Prony $S = 0{,}613 \cdot 23{,}4 = 14{,}34$ Pf, nach Eytelwein $= \frac{81 \cdot 24 \cdot 3}{350} = 16{,}7$ Pf, alſo hier eine beſſere Uebereinſtimmung. Man ſieht aus dieſen Beiſpielen, wie wenig Sicherheit dieſe Formeln gewähren.

Anmerkung. Tabelle zur Erleichterung der Berechnung des Steifigkeitswiderſtandes der Seile theilt der »Ingenieur« S. 412 mit. Nach Morin (ſ. deſſen Aide-Mémoire) iſt, wenn n die Anzahl der Seilfäden bezeichnet, für ungetheerte Seile $d = \sqrt{0{,}1338\,n}$ Centimeter und

$$S = \frac{n}{2a}(0{,}000297 + 0{,}000245\,n + 0{,}000353\,Q)$$ Kilogr.,

und für getheerte

$d = \sqrt{0{,}186\,n}$ Centimeter, und

$$S = \frac{n}{2a}(0{,}0014575 + 0{,}000346\,n + 0{,}000418\,Q)$$ Kilogr.

§. 180. Der Verfaſſer hat ſich bei ſeinen Verſuchen über die Steifigkeit der Seile eines in Fig. 245 abgebildeten Apparates bedient.

Fig. 245.

Die Scheibe oder Rolle BDE, auf welche ſich das zu unterſuchende Seil $ABDEF$ auflegte, war mit einem Paar eiſerner Räder, wie CLM, auf einer Welle C befeſtigt, und dieſes Räderpaar ſtand auf einer horizontalen Schienenbahn HR. Nachdem man das eine Seilende F durch ein angehängtes Gewicht G geſpannt hatte, hing man an das Kreuz K, welches am anderen Seilende A befeſtigt war, ſo viel Gewichte, bis das Räderpaar ſammt der Scheibe und ihren Gewichten langſam fortzurollen anfing. Um ſich von den Unvollkommenheiten des Apparates möglich unabhängig zu machen, wurde nachher auf der Seite bei F ſo viel Gewicht zugelegt, bis das Fortrollen des armirten Räderpaars nach der entgegengeſetzten Richtung eintrat. Das arithmetiſche Mittel

Steifigkeit der Seile.

von den Zulagen gab nun, nachdem man hiervon noch die wälzende Reibung abgezogen hatte, die Kraft zur Ueberwindung der Seilſteifigkeit.

Den Coefficienten der in Abzug zu bringenden rollenden Reibung ermittelte man auf dieſelbe Weiſe, indem man ſtatt des Seiles einen ſchwachen Bindfaden, deſſen Steifigkeitswiderſtand vernachläſſigt werden konnte, auflegte. Der mittlere Werth dieſes Coefficienten iſt oben, §. 174, mitgetheilt worden.

Der Steifigkeitswiderſtand beſteht nach des Verfaſſers Anſicht weniger aus der Steifigkeit, als aus der Reibung der einzelnen Fäden oder Drähte, die natürlich beim Auflegen auf die Rolle ihre gegenſeitige Lage ändern müſſen. Der erſte Theil dieſes Widerſtandes fällt beim Umlegen eines Drahtſeiles um eine Leitrolle ganz aus, weil dieſes Seil vermöge ſeiner Elaſticität beim Abwickeln zum Wiedergeradeſtrecken genau ſo viel Arbeit ausgiebt, als es beim Aufwickeln zum Krümmen in Anſpruch genommen hat. Hier beſteht alſo der Steifigkeitswiderſtand lediglich in der Reibung der einzelnen Drähte unter einander, und daß dem ſo ſei, zeigen auch die Verſuche des Verfaſſers, durch welche ſich ergab, daß dieſer Widerſtand bei eingeölten oder friſch getheerten Drahtſeilen um 40 Procent kleiner iſt als bei trockenen. Bei Hanfſeilen iſt das Verhältniß ein anderes, denn da dieſe, zumal nach längerem Gebrauche, faſt gar keine Elaſticität beſitzen, ſo erfordern die einzelnen Fäden und Litzen derſelben nicht allein Kraft zum Krümmen, ſondern auch Kraft zum Wiedergeradeſtrecken.

§. 181. Da die Steifigkeit eines Seiles nicht allein von der Seilſtärke, ſondern auch von der Stärke der Drehung und von der Zuſammenſetzungsweiſe deſſelben abhängt, ſo hält es der Verfaſſer für angemeſſen, dieſelbe durch die einfachere Formel

$$S = \frac{K + \nu Q}{a},$$

auszudrücken und die Conſtanten K und ν für jede Seilart beſonders zu beſtimmen. Auch hat ſich aus den Verſuchen des Verfaſſers ergeben, daß ſich, zumal für die Drahtſeile angemeſſener ſtatt $\frac{K}{a}$, bloß K, und demnach $S = K + \frac{\nu Q}{a}$ ſetzen läßt.

1. Für ein getheertes Hanfſeil von 1,6 Zoll Stärke, gelegt um Scheiben von 4 bis 6 Fuß Höhe, ergab ſich der Steifigkeitswiderſtand

$S = 1{,}5 + 0{,}00565 \frac{Q}{a}$ Kilogramm, wobei der Rollenhalbmeſſer a in Metern auszudrücken iſt, oder

$S = 3{,}2 + 0{,}216 \frac{Q}{a}$ Pfund, wo a in Zollen gegeben ſein muß.

2. Für ein neues ungetheertes Hanfseil von $^3/_4$ Zoll Stärke und eine Rolle von 21 Zoll Durchmesser ergab sich Steifigkeit der Seile.

$$S = 0{,}086 + 0{,}00164\,\frac{Q}{a}\text{ Kilogr.} = 0{,}18 + 0{,}0623\,\frac{Q}{a}\text{ Pfund.}$$

3. Für ein Drahtseil von 8 Linien Dicke, welches aus 16 Drähten von je $1^1/_2$ Linien Dicke bestand, und wovon jeder laufende Fuß 0,64 Pfund wog, wurde bei Rollen von 4 bis 6 Fuß Höhe

$$S = 0{,}49 + 0{,}00238\,\frac{Q}{a}\text{ Kilogr.} = 1{,}04 + 0{,}0802\,\frac{Q}{a}\text{ Pf. gefunden.}$$

4. Für ein frisch getheertes Drahtseil mit Hanfseelen in den Litzen und im Seile, von 7 Linien Dicke, bestehend aus $4.4 = 16$ Drähten von je $1^1/_5$ Linien Dicke, und pr. Fuß 0,63 Pf. wiegend, stellte sich bei einer Rolle von 21 Zoll Durchmesser

$$S = 0{,}57 + 0{,}000694\,\frac{Q}{a}\text{ Kilogr.} = 1{,}30 + 0{,}00264\,\frac{Q}{a}\text{ Pf. heraus.}$$

Anmerkung. Eine ausführliche Beschreibung der Versuche des Verfassers findet man in der Zeitschrift für das gesammte Ingenieurwesen (dem Ingenieur) von Bornemann, Brückmann und Röting, Band I. Freiberg 1848.

Die Hanfseile unter 1. wurden in Freiberg zum Fördern durch Wassergöpel angewendet, sind aber in den neueren Zeiten durch die Drahtseile unter 2. ersetzt worden. Beiderlei Seile haben bei 6facher Sicherheit eine Tragkraft von circa 30 Centnern. Es ist aus dem Vorstehenden zu ersehen, daß bei gleicher Tragkraft der Steifigkeitswiderstand bei Drahtseilen viel kleiner ist als bei Hanfseilen. Nimmt man z. B. die Seilspannung $Q = 2000$ Pf. und den Rollenhalbmesser $a = 40$ Zoll, so erhält man den Steifigkeitswiderstand für ein Hanfseil

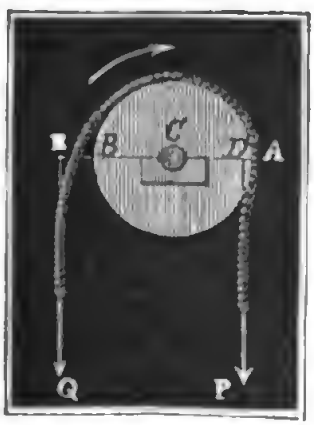
$S = 3{,}2 + 0{,}216 . {}^{2000}/_{40} = 14$ Pfund, und dagegen für ein Drahtseil

$S = 1{,}04 + 0{,}0802 . {}^{2000}/_{40} = 5{,}05$ Pf.

§. 182. Wenden wir nun die im Vorstehenden mitgetheilten Formeln für den Steifigkeitswiderstand der Seile auf die Theorie der festen Rollen an. Es sei ACB, Fig. 246 oder Fig. 247, die Rolle, a ihr Halbmesser $CA = CB$, r ihr Zapfenhalbmesser und G ihr Gewicht, ferner d die Seilstärke, Q die an einem Seilende angehängte Last, S der Steifigkeitswiderstand, F die auf den Rollenumfang reducirte Zapfenreibung, und folglich $Q + F + S$ die ganze Kraft P.

Fig. 246.

Fig. 247.



Die Steifigkeit des Seiles äußert sich dadurch, daß das Seil beim Aufwickeln nicht plötzlich

Steifigkeit der Seile.

die Krümmung des Rollenumfanges annimmt und ſich ebenſo beim Abwickeln nicht plötzlich gerade ſtreckt, ſondern in einem Bogen mit wachſender Krümmung ſich auf die Rolle auflegt, und ſich in einem Bogen mit abnehmender Krümmung von derſelben wieder abwickelt. Zwiſchen den elaſtiſchen Drahtſeilen und den unelaſtiſchen Hanfſeilen findet der Unterſchied ſtatt, daß ſich jene beim Abwickeln etwas eher, und dieſe etwas ſpäter von dem Rollenumfange ablöſen, folglich der Hebelarm CD der Kraft im erſten Falle (Fig. 246) etwas größer, und im zweiten Falle (Fig. 247) etwas kleiner als der Halbmeſſer $CA = a$ der Rolle iſt, wogegen der Laſtarm CE in beiden Fällen den Rollenhalbmeſſer a übertrifft. Wenn man von der Zapfenreibung F abſieht, alſo $P = Q + S$ ſetzt, ſo hat man $(Q + S) \,.\, CD = Q \,.\, CE$, daher der Steifigkeitswiderſtand $S = \left(\frac{CE - CD}{CD}\right) Q = \left(\frac{CE}{CD} - 1\right) Q$, und das Hebelarmverhältniß $\frac{CE}{CD} = 1 + \frac{S}{Q}$; was ſich nun durch Einſetzen eines der oben angegebenen Werthe für S leicht berechnen läßt.

Wir können übrigens auch ohne weitere Berückſichtigung dieſes Hebelarmverhältniſſes die Kraft $P = Q + S + F$ beſtimmen, wenn wir in dieſem Ausdrucke für ſchwache Hanfſeile nach Prony $S = \frac{d^n}{a}(K + \nu Q)$ und für Draht- und ſtarke Hanfſeile nach dem Verfaſſer, $S = K + \frac{\nu Q}{a}$, die auf den Rollenumfang reducirte Zapfenreibung aber $F = \varphi \frac{r}{a}(Q + G + P)$ oder annähernd $F = \varphi \frac{r}{a}(2Q + G)$ ſetzen,

Es folgt ſo im erſten Falle

$$P = Q + \frac{d^n}{a}(K + \nu Q) + \varphi \frac{r}{a}(2Q + G),$$ und im zweiten

$$P = Q + K + \frac{\nu Q}{a} + \varphi \frac{r}{a}(2Q + G).$$

Bei einer Radwelle iſt natürlich noch eine Reduction der Kraft vom Wellenumfang auf den Radumfang nöthig (S. §. 152).

Beiſpiel. Wenn ſich ein Drahtſeil von ungefähr 8 Linien Dicke um eine Leitrolle von 5 Fuß Höhe, 3 Zoll Zapfenſtärke und 1500 Pfund Gewicht legt, und die Spannung des Seiles 1200 Pf. beträgt, ſo hat man bei einem Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}075$, die nöthige Kraft

$$P = 1200 + 1{,}04 + 0{,}0802 \,.\, {}^{1200}/_{30} + 0{,}075\ {}^{3}/_{40}\ (2400 + 1500)$$
$$= 1200 + 1{,}04 + 3{,}28 + 14{,}62 = 1219 \text{ Pf.};$$

es geht alſo durch das Umlegen um dieſe Leitrolle ${}^{19}/_{12} = 1{,}6$ Proc an Kraft verloren.

Wenn ſtatt des Drahtſeiles ein Hanfſeil von 1,6 Zoll Stärke in Anwendung gekommen wäre, ſo hätte man

$$P = 1200 + 3{,}2 + 0{,}216 \,.\, {}^{1200}/_{30} + 14{,}62 = 1226{,}6 \text{ Pf.}$$

und daher den Kraftverluſt $= \frac{26{,}5}{12} = 2{,}2$ Procent.

Sechstes Kapitel.

Elasticität und Festigkeit.

Elasticität.

§. 183. Die Theile eines festen Körpers hängen mit einer gewissen Kraft unter einander zusammen, die man Cohäsion (franz. cohésion, engl. cohesion) nennt, und die zu überwinden ist, wenn Körper in ihrer Gestalt und Ausdehnung verändert oder gar zertheilt werden. Die erste Wirkung, welche Kräfte in einem Körper hervorbringen, ist eine Veränderung in der Lage seiner Theile gegen einander und eine daraus erwachsende Form- und nach Befinden Volumenveränderung des Körpers. Ueberschreiten die auf einen Körper wirkenden Kräfte eine gewisse Grenze, so tritt endlich eine Trennung der Theile und nach Befinden eine Zertheilung des ganzen Körpers ein. Die Fähigkeit der Körper, die durch Einwirkung von Kräften erlittene Formveränderung nach Wegnahme dieser Kräfte vollständig wieder aufzuheben, heißt Elasticität (franz. élasticité, engl. elasticity). Die Elasticität eines jeden Körpers hat eine gewisse Grenze; überschreitet die Gestalts- oder Volumenveränderung ein gewisses Maaß, so bleibt im Körper noch eine solche räumliche Veränderung zurück, wenn auch die Kräfte, welche jene Veränderung hervorgebracht haben, zu wirken aufhören. Die Elasticitätsgrenze ist bei verschiedenen Körpern sehr verschieden. Körper, welche eine große Formveränderung zulassen, ehe diese Grenze eintritt, nennt man vollkommen elastische, Körper aber, bei welchen kaum bemerkbare Formveränderungen der Elasticitätsgrenze vorausgehen, heißen unelastische, wiewohl es in Wirklichkeit Körper dieser Art gar nicht giebt.

Es ist eine wichtige Regel der Architektur und des Maschinenwesens, die zum Bau zu verwendenden Körper nicht so stark zu belasten, daß die hervorgebrachten Formveränderungen die Elasticitätsgrenze erreichen oder gar überschreiten.

Elasticität und Festigkeit.

§. 184. Verschiedene Körper bieten verschiedene Erscheinungen dar, wenn sie über die Elasticitätsgrenze hinaus in ihrer Form verändert werden. Ist ein Körper spröde (franz. cassant, engl. brittle), so zerspringt er in Stücke, wenn man seine Form über die Elasticitätsgrenze hinaus verändert; ist er aber geschmeidig (franz. und engl. ductile), wie z. B. viele Metalle, so läßt er noch bedeutende Veränderungen der Form außerhalb der Elasticitätsgrenze zu, ohne eine Trennung seiner Theile zu erleiden. Manche Körper sind hart (franz. dur, engl. hard), andere weich

Elaſticität und Feſtigkeit.

(franz. mou, engl. ſoft); während jene der Trennung einzelner Theile einen großen Widerſtand entgegenſetzen, iſt bei dieſen eine Trennung der einzelnen Theile ſehr leicht ausführbar.

Unter Elaſticität im engeren Sinne des Wortes verſtehen wir den Widerſtand, mit welchem ein Körper der Formveränderung entgegenwirkt, dagegen unter Feſtigkeit (franz. resistance, engl strength) den Widerſtand, welchen ein Körper der Zertheilung deſſelben entgegenſetzt. Mit Beidem werden wir uns im Folgenden beſchäftigen.

Nach der Art und Weiſe, wie äußere Kräfte auf Körper wirken und dieſelben in räumlichen Beziehungen verändern, läßt ſich die Elaſticität und Feſtigkeit der Körper eintheilen:

I. in einfache und
II. in zuſammengeſetzte; erſtere aber wieder
  1) in die abſolute,
  2) in die relative,
  3) in die rückwirkende und
  4) in die drehende Elaſticität und Feſtigkeit.

Wirken zwei äußere Kräfte durch Zug (franz. traction, engl. extension) in der Axenrichtung eines Körpers, ſo widerſteht derſelbe durch ſeine abſolute Elaſticität oder Feſtigkeit (franz. el. et resist. de traction, engl el. and str. of extension) dem Ausdehnen oder Zerreißen; wirken hingegen drei Kräfte winkelrecht zur Axe eines Körpers, ſo widerſteht derſelbe durch ſeine relative Elaſticität und Feſtigkeit (franz. elast. et resist. de flexion, engl. el. and str. of flexure) dem Umbiegen und Abbrechen. Wirken ferner zwei Kräfte drückend in der Axenrichtung eines Körpers, ſo daß dieſer zuſammengedrückt, nach Befinden umgebogen und endlich zermalmt oder zerknickt wird, ſo hat man die rückwirkende Elaſticität und Feſtigkeit (franz. el. et res. de compression, engl. el. and str. of compression) zu überwinden. Suchen endlich Kräfte einen Körper nach entgegengeſetzter Richtung um eine Axe zu drehen, ohne daß dieſelben in einerlei Normalebene zur Axe wirken, ſo hat man es mit der Ueberwindung der drehenden Elaſticität und Feſtigkeit (franz. el. et res. de torsion, engl. el. and st. of torsion) zu thun. Wirken mehrere der hier aufgezählten Kräfte auf einen Körper zugleich, ſo tritt die zuſammengeſetzte Elaſticität und Feſtigkeit oder eine Vereinigung von zwei oder mehreren einfachen Elaſticitäten und Feſtigkeiten in Wirkſamkeit.

Elaſticitätsmodul.

§. 185. Innerhalb der Elaſticitätsgrenze iſt die Volumenveränderung, d. h. die Ausdehnung oder Zuſammendrückung eines Körpers, der aufgewendeten Kraft ziemlich genau proportional, überſchreitet aber dieſe Veränderung jene Grenze, ſo hört dieſe Proportionalität auf, und es

nimmt die Veränderung bis zum Zustande des Zerreißens oder Zerdrückens meist sehr schnell zu. Als Maaß der Elasticität dient der Elasticitätsmodul E, welcher diejenige Kraft ausdrückt, die nöthig ist, um einen prismatischen Körper vom Querschnitte Eins (z. B. ein Quadratzoll) um seine anfängliche Länge auszudehnen oder zusammenzudrücken, also seine Länge durch Ausdehnen zu verdoppeln, oder durch Zusammendrücken auf Null zurückzuführen. Elasticitätsmodul.

Körpern von verschiedener materieller Beschaffenheit entsprechen verschiedene Elasticitätsmodul; es sind deshalb dieselben für jeden Stoff durch Versuche besonders zu ermitteln. Uebrigens ist im Auge zu behalten, daß der Elasticitätsmodul nur für Ausdehnungen und Zusammenpressungen innerhalb der Elasticitätsgrenze gilt und daß derselbe kein beobachtetes, sondern nur ein hypothetisches und berechnetes Maaß ist, weil sich nicht leicht ein Körper vorfindet, der, ohne die Grenze der Elasticität zu überschreiten, eine so große Gestaltsveränderung zuläßt, wie sie der Elasticitätsmodul voraussetzt.

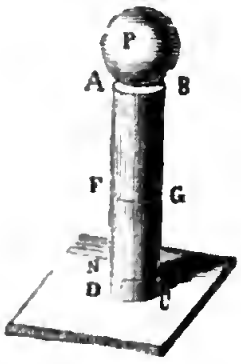
Fig. 248.

Ein Körper AC, Fig. 248, welcher die anfängliche Länge $AD = BC = l$ und den Querschnitt 1 hat, erfordert zur Ausdehnung um $DG = l$ die Kraft E, ist aber sein Querschnitt F, besteht er also aus F neben einander befindlichen Prismen, so ist diese Kraft $F \,.\, E$. Soll hingegen dieser Körper um eine Länge $DN = CM = \lambda$ ausgedehnt werden, so ist für die Kraft P

$P : F \,.\, E = \lambda : l$; es folgt daher dieselbe

1) $P = \frac{\lambda}{l} F \,.\, E$. Umgekehrt ist 2) $\lambda = \frac{P}{F\ E} \,.\, l$.

Fig 249.



Dieselben Formeln gelten auch für einen Körper AC, Fig. 249, von der Länge $AD = l$ und dem Querschnitte $AB = F$, wenn derselbe von einer Kraft P durch Zusammendrücken um $MC = ND = \lambda$ kürzer wird.

Mit Hilfe dieser Formeln kann man aus der Volumenveränderung (λ) die entsprechende Kraft P, oder aus P die Größe der Ausdehnung oder Zusammendrückung berechnen.

Anmerkung 1. Setzt man in der Formel $\lambda = \frac{Pl}{FE}$, $P = 1$ (Pfund), $l = 1$ (Zoll) und $F = 1$ (Quadratzoll), so erhält man $\lambda = \frac{1}{E}$, und umgekehrt $E = \frac{1}{\lambda}$. Es ist hiernach der Elasticitätsmodul E auch die Reciproke von der-

Elaſticitäts-modul.

jenigen Ausdehnung λ, welche ein Körper von der Länge 1 und dem Querſchnitte 1, durch eine Ausdehnungs- oder Zuſammendrückungskraft 1 erleidet (ſ. Combes: Traité de L'exploitation des Mines, tome prem.). Man kann auch den Elaſticitätsmodul E gleichſetzen dem Gewichte eines Prismas, welches mit dem Körper, auf den E wirkt, aus einerlei Materie beſteht, und denſelben Querſchnitt Eins hat. Iſt L die Länge dieſes Körpers und γ die Dichtigkeit oder das Gewicht von 1 Cubikzoll der Materie deſſelben, ſo hat man $E = L\gamma$, und daher umgekehrt $L = \frac{E}{\gamma}$. Dieſe Länge gebraucht Tredgold (nach Young) als Maaß der Elaſticität (ſ. T. Tredgold, über die Stärke des Gußeiſens und anderer Metalle). Iſt z. B. für Stahl $E = 30'000000$ Pf. und $\gamma = 0{,}3$ Pfund, ſo hat man $L = \frac{30'000000}{0{,}3} = 100'000000$ Fuß, d. i. eine Stahlſtange von 100 Million Fuß Länge würde einen Stahlſtab von demſelben Querſchnitt um ſeine eigene Länge länger ausdehnen, wenn das oben angegebene Ausdehnungsgeſetz ohne Einſchränkung richtig wäre.

Anmerkung 2. Bei der Ausdehnung oder Zuſammendrückung eines Körpers findet zugleich eine Querſchnittsverminderung Statt, die nach Wertheim (ſ. Compt. rend. T. 26.) $\frac{1}{3}$ der Längenausdehnung oder Zuſammendrückung beträgt. Iſt l die anfängliche Länge, F der anfängliche Querſchnitt und V das anfängliche Volumen Fl des Körpers, l_1 und F_1 aber Länge und Querſchnitt bei Einwirkung der Zugkraft P, ſo hat man das entſprechende Volumen:

$$V_1 = F_1 l_1 = Fl + F(l_1 - l) - (F - F_1)\, l, \text{ alſo}$$
$$V_1 - V = F(l_1 - l) - (F - F_1)\, l,$$

und die relative Volumenveränderung:

$$\frac{V_1 - V}{V} = \frac{l_1 - l}{l} - \frac{F - F_1}{F}.$$

Nun iſt aber $\frac{F - F_1}{F} = \frac{1}{3}\,\frac{l_1 - l}{l}$, daher folgt

$$\frac{V_1 - V}{V} = \frac{1}{3} \cdot \frac{l_1 - l}{l},$$

d. i. die Volumenvergrößerung ein Drittel der Längenausdehnung.

Beiſpiele. 1) Wenn der Elaſticitätsmodul des Meſſingdrahtes 14500000 Pf. beträgt, welche Kraft iſt nöthig, um einen Draht von 10 Fuß Länge und 2 Linien Dicke 1 Linie länger zu ziehen? Es iſt $l = 10 \cdot 12 = 120$ Zoll, $\lambda = \frac{1}{12}$ Zoll, folglich $\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{1440}$; ferner $F = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}7854\,(\frac{2}{12})^2 = 0{,}0218$ □Zoll, demnach die geſuchte Kraft $P = \frac{1}{1440} \cdot 0{,}0218 \cdot 14500000 = 220$ Pf. 2) Iſt der Elaſticitätsmodul von Eiſendraht 30'000000 Pf., und ſpannt man eine eiſerne Meßkette von 60 Fuß Länge und 0,2 Zoll Dicke mit 150 Pf. Kraft an, ſo nimmt dieſelbe um die Länge

$$\lambda = \frac{150}{0{,}7854 \cdot (0{,}2)^2} \cdot \frac{60 \cdot 12}{30'000000} = \frac{3600}{31416} = 0{,}115 \text{ Zoll} = 1{,}38 \text{ Linien zu.}$$

§. 186*). Wenn man eine prismatiſche Stange durch ein von Null bis P allmälig wachſendes Gewicht anſpannt und dadurch von Null bis λ allmälig verlängert, ſo wird ein gewiſſes Arbeitsquantum verrichtet, welches ſich ſehr einfach auf folgende Weiſe beſtimmen läßt. Während der

Ausdehnung um ein Element $d\lambda$ ist das Arbeitsquantum $dL = Pd\lambda$ verrichtet; nun ist aber $P = \frac{\lambda}{l} FE$, daher $dL = \frac{\lambda}{l} FE\, d\lambda = \frac{FE}{l} \lambda d\lambda$, und folglich das ganze Arbeitsquantum bei Ausdehnung um die ganze Länge λ: Elasticitäts-modul.

$$L = \frac{FE}{l} \int \lambda d\lambda = \frac{FE}{l} \cdot \frac{\lambda^2}{2} = \frac{\lambda FE}{l} \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{P\lambda}{2}.$$

Wird eine solche Stange bloß durch ihr eigenes Gewicht $G = Fl\gamma$ ausgedehnt, so ist die einem Stangenelemente dl entsprechende Ausdehnung

$$d\lambda = \frac{G}{F.E}\, dl = \frac{Fl\gamma}{FE}\, dl = \frac{\gamma}{E}\, l\, dl,$$

und daher die ganze Ausdehnung der Stange:

$$\lambda = \frac{\gamma}{E} \int l\, dl = \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{F\gamma l}{FE} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Gl}{2FE},$$

d. i. halb so groß, als wenn das ganze Gewicht G am äußersten Ende zöge.

Das Arbeitsquantum, welches bei dieser Ausdehnung das Gewicht der Stange verrichtet, ist:

$$L = \int G d\lambda = \int Fl\gamma \cdot \frac{\gamma l dl}{E} = \frac{F\gamma^2}{E} \int l^2 dl = \frac{F\gamma^2}{E} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{G\gamma l^2}{3E}$$
$$= \frac{GFl\gamma}{3FE} \cdot l = \frac{G^2 l}{3FE} = \tfrac{2}{3}\, G\, \frac{Gl}{2FE} = \tfrac{2}{3}\, G\lambda.$$

Dieselben Formeln gelten natürlich auch für die Zusammendrückung eines prismatischen Körpers.

Beispiel. Um eine Stahlstange von 5 Fuß Länge und ½ Quadratzoll Querschnitt eine halbe Linie länger zu ziehen, ist eine mechanische Arbeit

$$L = \frac{P\lambda}{2} = \frac{FE}{l} \cdot \frac{\lambda^2}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 30\,000000}{2 \cdot 60} \cdot \frac{1}{24^2} = \frac{125000}{576} = 217 \text{ Fußpfund}$$

nöthig.

§. 187. Die Kraft T, welche ein Körper vom Querschnitte Eins aufnimmt, in dem Augenblicke, wenn die Ausdehnung die Elasticitätsgrenze erreicht hat, bestimmt sich leicht aus dem Elasticitätsmodul E und der dieser Grenze entsprechenden Längenausdehnung λ, denn es ist $T:E = \lambda : l$, daher $T = \frac{\lambda}{l} E$. Diese Kraft ist diejenige, mit welcher man bei Bau- und Maschinenanlagen Körper belasten darf, wenn sie auf die Dauer hinreichende Sicherheit gewähren sollen. Ist der Querschnitt des Körpers, welcher eine Zugkraft P aufzunehmen hat, $= F$, so hat man Trag- und Festigkeitsmodul

$$1)\ P = FT \text{ und } 2)\ F = \frac{P}{T}.$$

Die Kraft T, wodurch sich die Tragfähigkeit von Körpern beurtheilen läßt, kann man unter dem Namen Tragmodul in die Rechnungen einführen.

Trag- und Feſtigkeitsmodul

Von dieſem Modul iſt allerdings der Feſtigkeitsmodul K, welcher die Kraft ausdrückt, wodurch ein Körper vom Querſchnitte Eins zerriſſen wird, verſchieden. Iſt der Querſchnitt eines prismatiſchen Körpers oder der kleinſte Querſchnitt eines Körpers überhaupt, $= F$, ſo folgt die Kraft zum Zerreißen dieſes Körpers:

$$1)\ P_1 = FK, \text{ und umgekehrt } 2)\ F = \frac{P_1}{K}.$$

Sehr oft berechnet man auch die Stärken der Bauſtücke und Maſchinentheile mit Hülfe der Coefficienten K, indem man ſie vorher, wie man ſagt, der Sicherheit wegen, durch eine der Zahlen 3,4 bis 10 dividirt. Im Ergebniſſe iſt dies faſt einerlei, wie man aus einer Vergleichung der in unten ſtehender Tabelle befindlichen Werthe erſehen kann, allein die Vorausſetzung ſelbſt iſt nicht die richtige und wenigſtens nur inſofern zu rechtfertigen, daß der Feſtigkeitsmodul das 3, 4... bis 10fache des Tragmoduls iſt, oder überhaupt in einem conſtanten Verhältniſſe zu dieſem ſteht.

Iſt der Querſchnitt des Körpers ein Kreis vom Durchmeſſer d, hat man alſo $\frac{\pi d^2}{4} = F$, ſo iſt $d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 1{,}128\sqrt{F} = 1{,}128\sqrt{\frac{P}{T}}$, und es läßt ſich hiernach aus der Belaſtung oder Spannung P eines Körpers und dem Tragmodul T ſeiner Materie die Stärke finden, bei welcher der Körper nicht über die Elaſticitätsgrenze hinaus angeſpannt wird.

Beiſpiele. 1) Welche Laſt kann eine Hängeſäule aus Fichtenholz aufnehmen, wenn dieſelbe 5 Zoll breit und 4 Zoll dick iſt? Den Tragmodul zu 3000 Pf. und den Querſchnitt $F = 5 \cdot 4 = 20$ Quadratzoll angenommen, erhält man $P = 20 \cdot 3000 = 60000$ Pf als Tragkraft dieſer Säule. Wird aber der Feſtigkeitsmodul $K = 12000$ Pf zu Grunde gelegt und eine dreifache Sicherheit angenommen, ſo erhält man $P = 20 \cdot {}^{12000}/_{3} = 80000$ Pf.; um auf lange Zeit Sicherheit zu haben, nimmt man aber für K den zehnten Theil, und erhält ſo $P = 20 \cdot 1200 = 24000$ Pf. 2) Eine ſchmiedeeiſerne und rund abzudrehende Zugſtange ſoll eine Laſt von 4500 Pf aushalten, welchen Durchmeſſer muß dieſelbe erhalten? Hier iſt $T = 20000$ Pf., daher $d = 1{,}128\sqrt{\frac{4500}{20000}} = 1{,}128 \cdot \sqrt{}^{9}/_{40}$ $= 0{,}535$ Zoll. Der Feſtigkeitsmodul des Schmiedeeiſens iſt für eine Mittelgattung $= 58000$ Pf.; nimmt man aber ſechsfache Sicherheit, ſo bekommt man $K = 10000$ Pf. und $d = 1{,}128\sqrt{\frac{4500}{10000}} = 0{,}756$ Zoll als die geſuchte Stangendicke.

Körper von gleichem Widerſtande

§. 188. Iſt ein vertikal hängender prismatiſcher Körper, z. B. ein Geſtänge oder ein Seil, ſehr lang, ſo trägt das Gewicht G deſſelben zum Zerreißen mit bei und es iſt deshalb $P + G = FT$ zu ſetzen. Iſt nun

noch l die Länge dieſes Körpers und γ das Gewicht einer Raumheit (hier eines Cubikzolles) von der Maſſe des Körpers, ſo hat man $G = Fl\gamma$ und daher $P = F(T - l\gamma)$, ſowie umgekehrt $F = \frac{P}{T - l\gamma}$. Körper von gleichem Widerſtande.

Beſteht ein Körper $ABC..G$, Fig. 250, aus gleich langen Theilen, jeder von der Länge l, ſo ergeben ſich für dieſelben folgende Querſchnitte. Der Querſchnitt des unterſten Stückes iſt, wie vorhin, $F_1 = \frac{P}{T - l\gamma}$. Für das zweite Stück vom Querſchnitte F_2 und Gewichte $l\gamma$ iſt $P + F_1 l\gamma + F_2 l\gamma = F_2 T$, daher $F_2 = \frac{P + F_1 l\gamma}{T - l\gamma} = F_1 + \frac{F_1 l\gamma}{T - l\gamma} = F_1\left(1 + \frac{l\gamma}{T - l\gamma}\right)$. Für das dritte Stück folgt hiernach der Querſchnitt $F_3 = F_2\left(1 + \frac{l\gamma}{T - l\gamma}\right)$ $= F_1\left(1 + \frac{l\gamma}{T - l\gamma}\right)^2$, für das vierte Stück $F_4 = F_3\left(1 + \frac{l\gamma}{T - l\gamma}\right)$ $= F_1\left(1 + \frac{l\gamma}{T - l\gamma}\right)^3$, und allgemein, für das $n$te Stück:

$$F_n = F_1 \cdot \left(1 + \frac{l\gamma}{T - l\gamma}\right)^{n-1} \text{ oder } F_n = \frac{P}{T - l\gamma}\left(1 + \frac{l\gamma}{T - l\gamma}\right)^{n-1}$$

der entſprechende Querſchnitt.

Iſt l ſehr klein, ſind alſo die Stücke ſehr kurz, ſo kann man ſetzen:

$$F_n = \frac{P}{T}\left(1 + \frac{l\gamma}{T}\right)^{n-1}.$$

Iſt nun noch die Anzahl n der Stücke ſehr groß, oder nimmt die Stärke des Körpers AG, Fig. 251, von unten nach oben ſtetig zu, ſo kann man (aus Gründen, wie in §. 176) den Querſchnitt

Fig. 250.

Fig. 251.

$$F_n = \frac{P}{T} \cdot e^{(n-1)\frac{l\gamma}{T}} = \frac{P}{T} \cdot e^{\frac{nl\gamma}{T}} = \frac{P}{T} \cdot e^{\frac{a\gamma}{T}}$$

ſetzen, wofern e die Grundzahl 2,71828... des natürlichen Potenzenſyſtems und a die ganze Länge des Körpers ausdrückt.

Soll ein Körper von unveränderlicher Stärke dieſelbe Tragkraft haben, ſo muß er den Querſchnitt $F = \frac{P}{T - a\gamma}$ erhalten. Iſt $a\gamma$ nicht groß gegen T, alſo $\frac{a\gamma}{T}$ ein kleiner Bruch, ſo läßt ſich ſetzen:

$$F_n = \frac{P}{T}\left[1 + \frac{a\gamma}{T} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{a\gamma}{T}\right)^2\right] \text{ und}$$

Körper von gleichem Widerſtande.

$$F = \frac{P}{T}\left[1 + \frac{a\gamma}{T} + \left(\frac{a\gamma}{T}\right)^2\right],$$

ferner das Gewicht des erſten Körpers

$$G_n = \frac{F_1 + F_n}{2}\, a\gamma = \left[1 + \tfrac{1}{2}\frac{a\gamma}{T} + \tfrac{1}{4}\left(\frac{a\gamma}{T}\right)^2\right]\frac{P}{T}\, a\gamma;$$

und das des zweiten

$$G = Fa\gamma = \left[1 + \frac{a\gamma}{T} + \left(\frac{a\gamma}{T}\right)^2\right]\frac{P}{T}\, a\gamma;$$

es iſt daher der prismatiſche Körper ſchwerer und deshalb koſtbarer als derjenige, welcher an jeder Stelle den ſeiner Tragkraft entſprechenden Querſchnitt beſitzt, und deshalb ein Körper von gleichem Widerſtande genannt wird.

Beiſpiele. 1) Welchen Querſchnitt muß ein 1000 Fuß langes ſchmiedeeiſernes Schachtgeſtänge erhalten, wenn daſſelbe außer ſeinem eigenen Gewichte noch eine Laſt $P = 75000$ Pf. zu tragen hat? Den Tragmodul $T = \frac{1}{6} K = 10000$ Pf. angenommen und das Gewicht eines Cubikzolles Schmiedeeiſen: $\gamma = \frac{7{,}60.66}{12.12.12} = 0{,}29025$ Pf. geſetzt, folgt der geſuchte Querſchnitt

$$F = \frac{P}{T - a\gamma} = \frac{75000}{10000 - 12000.0{,}29025} = \frac{75000}{6517} = 11{,}508$$ Quadratzoll und das Gewicht des Geſtänges $G = F \,.\, a\gamma = 11{,}508 \,.\, 12000 \,.\, 0{,}29025 = 40084$ Pf.
2) Könnte man dieſem Geſtänge die Form eines Körpers von gleichem Widerſtande geben, ſo würde man erhalten: zum kleinſten Querſchnitte $F_1 = \frac{P}{T} = \frac{75000}{10000}$ $= 7{,}5$ Quadratzoll, zum größten $F_n = 7{,}5 \,.\, e^{0{,}29025 \,.\, 1{,}2} = 7{,}5 \,.\, e^{0{,}3483} =$ 10,62 Quadratzoll, und das Gewicht $G_n = \left(\frac{7{,}5 + 10{,}62}{2}\right) \,.\, 3483 = 9{,}06 \,.\, 3483$ $= 31600$ Pf. (annähernd).

Zahlenwerthe. §. 189. In folgender Tabelle ſind die mittleren Werthe der Elaſticitäts-, Trag- und Feſtigkeitsmodule verſchiedener, im Bauweſen am häufigſten vorkommender Stoffe aufgeführt.

Zahlenwerthe.

Tabelle I.

Die Modul der absoluten Elasticität und Festigkeit.

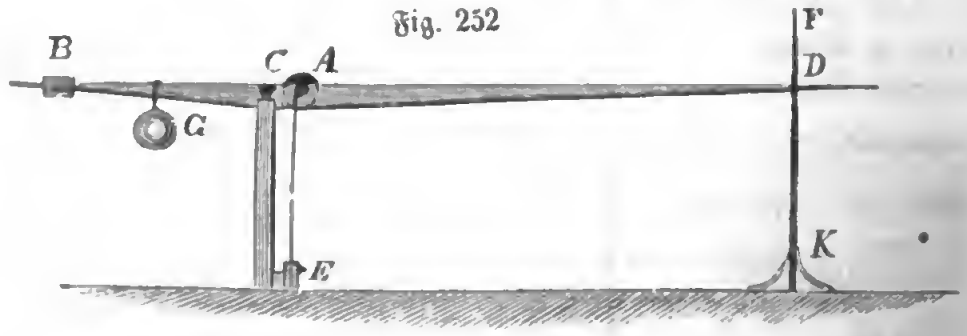
Namen der Körper.	Ausdehnung bei der Elasticitätsgrenze $\frac{\lambda}{l}$.	Elasticitätsmodul E.	Tragmodul T.	Festigkeitsmodul K.	Sicherheitsmodul K_1.
Buchen-, Eichen-, Fichten-, Kiefern- und Tannenholz, in der Arenrichtung . .	$\frac{1}{600}$	1'800000	3000	12000	1200
Dasselbe, radial		200000		650	65
» tangential . .		120000		700	70
Eisen in Drähten . . .	$\frac{1}{1000}$	30'000000	30000	100000	17000
Eisen in Stäben	$\frac{1}{1520}$	29'000000	20000	58000	10000
Eisen in Blech		26'000000		55000	9000
Gußeisen	$\frac{1}{1200}$	17'000000	14000	19000	3000
Stahl	$\frac{1}{835}$	30'000000	36000	120000	20000
Gehärteter Gußstahl . .	$\frac{1}{450}$	44'000000	96000	146000	24000
Kupfer	$\frac{1}{4000}$	16'000000	4500	44000	7000
Kupferdraht	$\frac{1}{1000}$	17'500000	17500	59000	9000
Messing	$\frac{1}{1320}$	9'500000	7000	18000	3000
Messingdraht	$\frac{1}{742}$	14'500000	20000	73000	12000
Glockengut	$\frac{1}{1590}$	4'700000	3000	34000	5600
Blei	$\frac{1}{477}$	700000	1500	1900	320
Bleidraht	$\frac{1}{1500}$	1'000000	700	2000	340
Marmor		2'600000		2000	200
Seile, unter 1 Zoll dick .				9000	3000
» 1—3 » »				7000	2300
» über 3 » »				5000	1700
Riemen					290

Die in der zweiten Vertikalcolumne dieser Tafel enthaltenen Werthe der relativen Ausdehnung $\left(\frac{\lambda}{l}\right)$ bei der Elasticitätsgrenze geben auch das Verhältniß $\frac{T}{E}$ der in der vierten und dritten Columne aufgeführten Werthe

Verſuche an. Die ſechste Columne ergiebt ſich aus der fünften, wenn man bei Hölzern durch zehn, bei Metallen durch ſechs und bei Seilen durch drei dividirt. Die Feſtigkeit der Drähte iſt immer größer, als die ſtärkerer Stäbe, weil die Drähte eine Kruſte haben, die feſter iſt als der Kern.

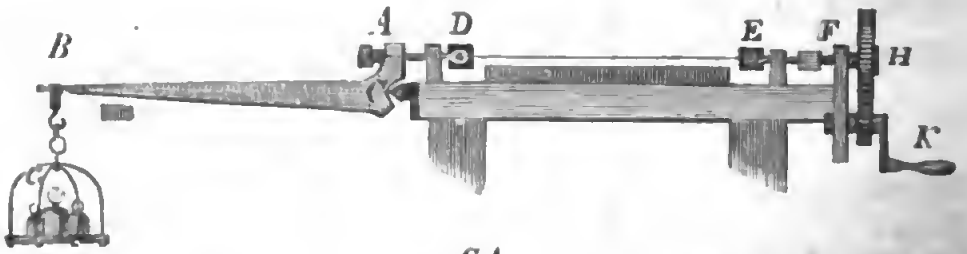
Anmerkung. Ueber die abſolute Elaſticität und Feſtigkeit des Schmiedeeiſens, und zumal des Eiſendrahtes ſind ausgedehnte Verſuche von Lagerhjelm in Schweden, von Gerſtner in Prag und von Brix in Berlin angeſtellt worden. Die Reſultate der erſteren ſind enthalten in der von Pfaff in's Deutſche übertragenen Abhandlung: »Verſuche zur Beſtimmung der Dichtigkeit, Gleichartigkeit, Elaſticität, Schmiedbarkeit und Stärke des Stabeiſens.« Gerſtner beſchreibt ſeine Verſuche in dem erſten Bande ſeines Handbuches der Mechanik, und Brix die ſeinigen in der Abhandlung über die Cohäſions- und Elaſticitätsverhältniſſe einiger nach ihren Dimenſionen beim Bau der Hängebrücken in Anwendung kommenden Eiſendrähte u. ſ. w., Berlin 1837. Gerſtner bediente ſich bei ſeinen Verſuchen eines geradlinigen Hebels *ACB*, Fig. 252, mit

Fig. 252



einem Laufgewichte *G* und einer 15 Fuß langen Zunge *CD*, welche an einer Scala *FK* die Ausdehnung des zu unterſuchenden Drahtes *AE* vervierundfünfzigfacht angab. Lagerhjelm und Brix wendeten hingegen einen Winkelhebel *ACB*, Fig. 253, mit Waagſchale und Gewichten *G* an. Bei dem Apparate von

Fig. 253.



Brix betrug das Hebelarmverhältniß $\frac{CA}{CB} = \frac{1}{20}$. Das eine Drahtende *D* war mittels Kluppe, Bolzen und Haken an den kurzen Arm dieſes Hebels, und das andere Ende *E* auf dieſelbe Weiſe an eine Schraube *F* angeſchloſſen, die durch ein Räderwerk *HK* in Umdrehung geſetzt werden konnte. Zur Angabe der Längenausdehnung dienten zwei Nonien, welche an den entgegengeſetzten Enden auf den Draht aufgeſchraubt wurden und über zwei in Viertellinien eingetheilten Scalen hinliefen. Nachdem man den Draht in die Kluppen eingeklemmt hatte, wurde die Waagſchale nach und nach mit größeren Gewichten beladen, und bei jedem einzelnen Verſuche durch Drehung der Kurbel an dem Räderwerke der

Draht ſo geſpannt, daß ſich der Hebel von ſeiner Unterſtützung erhob, und ſich ſo die Spannung des Drahtes mit dem Gewichte G in's Gleichgewicht ſetzte. Die Verſuche wurden mit Drähten von 1½ bis 1½ Linien Stärke ausgeführt und gaben für dieſelben, wenn ſie ungeglüht waren, im Mittel den Feſtigkeitsmodul $K = 100000$ Pf., und dagegen nach dem Glühen $K = 62000$ Pf. Der Elaſticitätsmodul wurde dagegen für geglühten und ungeglühten Draht im Mittel $E = 30{\cdot}000000$ Pf. gefunden; ferner ergab ſich, daß die Grenze der Elaſticität erreicht wurde, wenn die Spannung bei ungeglühtem Draht $0{,}5\,K$ und bei geglühtem $0{,}6\,K$ betrug. Bei ſtärkeren Spannungen traten bleibende Ausdehnungen (Verſchiebungen) ein, und es betrug die ganze Ausdehnung im Augenblicke des Zerreißens bei ungeglühtem Drahte $\frac{\lambda}{l} = 0{,}0034$, und beim geglühten $\frac{\lambda}{l} = 0{,}0885$, alſo 26mal ſo viel. Verſuche.

Bei dem Apparate von Lagerhjelm erfolgte die Anſpannung des Drahtes durch eine hydrauliſche Preſſe.

Der Apparat, welchen Wertheim bei ſeinen Verſuchen über die Elaſticität angewendet hat, iſt hiervon verſchieden. S. Poggend. Ann. (Ergänzungsbd. II., 1845.)

§. 190. Wird ein prismatiſcher Körper $ABCD$, Fig. 254, an einem Ende feſtgehalten, z. B. eingemauert, und an dem andern Ende von einer Kraft P ergriffen, ſo entſtehen Spannungen in demſelben, wodurch der eine Theil deſſelben ausgedehnt und der andere zuſammengedrückt wird, das Ganze aber eine Biegung annimmt. Denken wir uns den ganzen Körper durch Ebenen parallel zur Axe und winkelrecht gegen die Kraftrichtung in lauter dünne Schichten zerlegt, ſo können wir annehmen, daß eine gewiſſe mittlere Schicht KLM, die man die neutrale Axenſchicht, oder auch wohl neutrale Axe ſchlechtweg nennt, bei dieſer Biegung ohne Spannung und deshalb auch in ihrer Länge unverändert bleibt, daß dagegen die Schichten auf der convexen Seite eine Ausdehnung und die auf der concaven Seite eine Verkürzung erleiden. Es ſei ABC_1D_1, Fig. 255, ein Längendurchſchnitt des Körpers, KL deſſen neutrale Axe, NO_1 eine ausgedehnte und UV_1 eine verkürzte oder comprimirte Schicht. Wäre die Biegung ohne Volumenverände- Biegung der Körper.

Fig. 254.

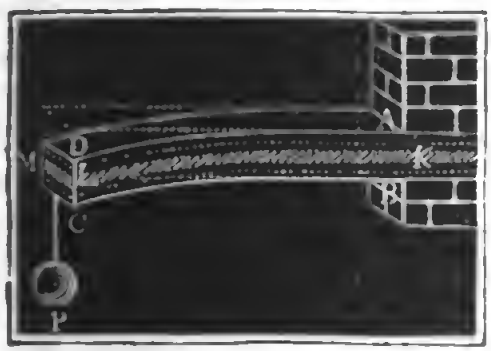
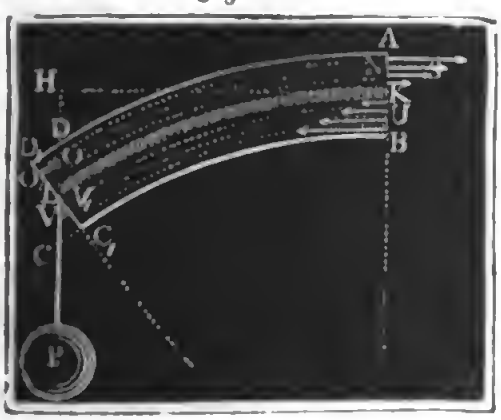


Fig 255.



Biegung der Körper.

rung vor ſich gegangen, ſo würde $KL = AD = NO$ u. ſ. w., d. i., die Länge aller Schichten, eine und dieſelbe ſein, der Körper alſo die Geſtalt $ABCD$ haben, weil aber Ausdehnungen und Zuſammendrückungen eingetreten ſind, ſo haben gewiſſe Schichten, wie AD, NO u. ſ. w. Verlängerungen DD_1, OO_1 u. ſ. w., und andere, wie BC, UV u. ſ. w., Verkürzungen CC_1, VV_1 u. ſ. w. erlitten und es hat der Körper die Form ABC_1D_1 angenommen. Jedenfalls ſind die Verlängerungen DD_1, OO_1, und ebenſo die Verkürzungen CC_1, VV_1 u. ſ. w. den Entfernungen LD, LO, LC, LV u. ſ. w. von der neutralen Axe proportional. Nun verhalten ſich aber die Spannungen in der Richtung der Schichten, wie die von ihnen bewirkten Verlängerungen und Verkürzungen; es iſt daher auch anzunehmen, daß dieſe Spannungen mit den Entfernungen von der neutralen Axe proportional wachſen. Setzen wir deshalb die Spannung einer Faſer oder Faſerſchicht vom Querſchnitt Eins (1 Quadratzoll) und in der Entfernung Eins (1 Zoll) von der neutralen Axe $= S$, ſo iſt ſie für eine Entfernung $KN = z$, Sz, und bei einem Querſchnitte F, $= FSz$. Gilt nun die Erfahrungszahl S für die Ausdehnung und Compreſſion zugleich, ſo hat man die Summe aller Spannungen eines Querſchnittes $= (F_1 z_1 + F_2 z_2 + \ldots) S$, wofern F_1, F_2 u. ſ. w. die Querſchnittstheile und z_1, z_2 u. ſ. w. ihre Entfernungen von der neutralen Axe bezeichnen. Damit die Spannungen in dem als Stützpunkt eines Hebels anzuſehenden Endpunkt K der neutralen Axe keinen Druck und deshalb auch keine Veränderung in der Länge erzeugen, ſo muß jene Summe von Spannungen $(F_1 z_1 + F_2 z_2 + \ldots) S$, und alſo auch $F_1 z_1 + F_2 z_2 + \ldots$, $=$ Null ſein, d. i. es muß die neutrale Axe oder neutrale Schicht durch den Schwerpunkt des Querſchnittes vom ganzen Körper gehen.

Wir können nun den Zuſtand des Körpers mit dem Gleichgewichte eines Winkelhebels vergleichen. Die Kraft P wirkt an einem Hebelarme $KH = l$, hat alſo das Moment $M = Pl$, und hält den ſämmtlichen Ausdehnungs- und Compreſſionskräften, deren Momente $z_1 . F_1 Sz$, $z_2 . F_2 Sz_2$ u. ſ. w. oder $F_1 z_1^2 . S$, $F_2 z_2^2 . S$ u. ſ. w. ſind, das Gleichgewicht; wir müſſen folglich $M = Pl = (F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \ldots) . S$ ſetzen.

Dieſe Formel gilt übrigens für jeden Querſchnitt des Körpers, nur iſt ſtatt l die jedesmalige Entfernung deſſelben von dem Angriffspunkte L der Kraft P einzuſetzen. Der Faktor $F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \ldots$ iſt nur von dem Querſchnitte des gebogenen Körpers abhängig, und möge in der Folge mit dem Buchſtaben W bezeichnet werden. Es läßt ſich hiernach $M = Pl = WS$ ſetzen und behaupten, daß die abſolute Spannung S eines Querſchnittes der Entfernung l deſſelben von dem Angriffspunkte der Kraft proportional iſt.

§. 191. Aus dem Elaſticitätsmodul E, der Länge l einer Faſer, welche um die Einheit (1 Zoll) von der neutralen Axe abſteht, und der Verlänge-

rung λ, welche dieſe erleidet, ergiebt ſich die entſprechende Spannung $S = \frac{\lambda}{l} E$. Iſt nun ABC_1D_1, Fig. 256, ein kurzes Stück des gebogenen Körpers, $KL = l$, deſſen Länge und $MK = ML = r$, deſſen Krümmungshalbmeſſer, ſo läßt ſich ſetzen: $DD_1 : KL = LD : ML$, und auch $OO_1 : KL = LO : ML$, d. i. $OO_1 : l = LO : r$. Nehmen wir nun $LO = 1$ und $OO_1 = \lambda$, ſo bekommen wir $\lambda : l = 1 : r$ und hieraus $S = \frac{\lambda}{l} E = \frac{E}{r}$. Setzen wir endlich dieſen Werth von S in die Formel $M = WS$, ſo erhalten wir das Kraftmoment $M = \frac{WE}{r}$, und umgekehrt $WE = Mr$.

Man nennt das Produkt WE das **Biegungsmoment** (franz. moment de flexion; engl. momentum of flexure) und kann hiernach behaupten, **das Produkt aus dem Kraftmomente (M) und dem Krümmungshalbmeſſer (r) iſt für jeden Querſchnitt gleich dem Biegungsmomente.**

Theilen wir die neutrale Axe KL, Fig. 257, in n gleiche Theile, wie

Fig. 256.

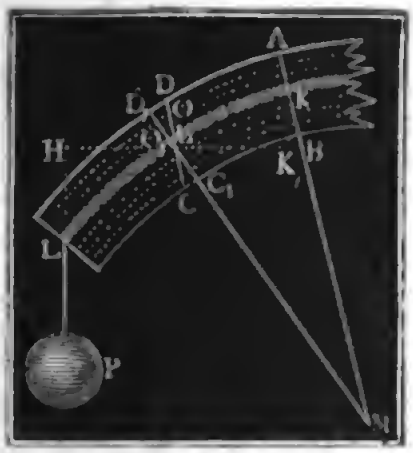
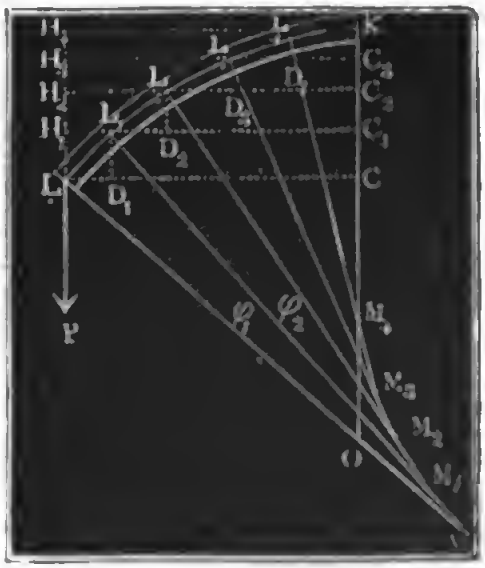


Fig. 257.



LL_1, L_1L_2, L_2L_3 u. ſ. w. $= \frac{l}{n}$, und beſtimmen wir die dieſen Theilen entſprechenden Krümmungshalbmeſſer $\overline{ML_1} = r_1$, $\overline{M_1L_2} = r_2$ u. ſ. w., ſo können wir auch die Krümmungswinkel $LML_1 = \varphi_1{}^0$, $\overline{L_1M_1L_2} = \varphi_2{}^0$ u. ſ. w. angeben, welche je zwei Krümmungshalbmeſſer zwiſchen ſich einſchließen, es iſt nämlich $LL_1 = \frac{l}{n} = r_1\varphi_1$, $L_1L_2 = \frac{l}{n} = r_2\varphi_2$ u. ſ. w., und daher $\varphi_1 = \frac{l}{nr_1}$, $\varphi_2 = \frac{l}{nr_2}$ u. ſ. w. Setzen wir nun

Elaſtiſche Linie.

noch $r_1 = \frac{WE}{M_1}$, $r_2 = \frac{WE}{M_2}$ u. ſ. w. ein, ſo erhalten wir $\varphi_1 = \frac{M_1 l}{nWE}$, $\varphi_2 = \frac{M_2 l}{nWE}$ u. ſ. w., und es läßt ſich durch Summation aller dieſer Winkel auch der Winkel $LOK = \alpha^0$ finden, um welchen ein größeres Stück oder die ganze neutrale Axe KL gebogen iſt.

§. 192. Setzen wir nur eine kleine Biegung voraus, ſo können wir die Projection $CL = KH_4$, parallel der anfänglichen Richtung des noch ungebogenen Balkens, gleich der Länge des Balkens ſelbſt, und ebenſo die Projectionen LD_1, L_1D_2 u. ſ. w. den Theilen LL_1, L_1L_2 u. ſ. w. der neutralen Axe gleich, d. i. $= \frac{l}{n}$, annehmen, und erhalten ſo die Momente $M_1 = \frac{Pl}{n}$, $M_2 = \frac{2Pl}{n}$, $M_3 = \frac{3Pl}{n}$ u. ſ. w. Subſtituiren wir dieſe Werthe in die Formeln für φ_1, φ_2 u. ſ. w., ſo ergeben ſich die Maaße der Krümmungswinkel

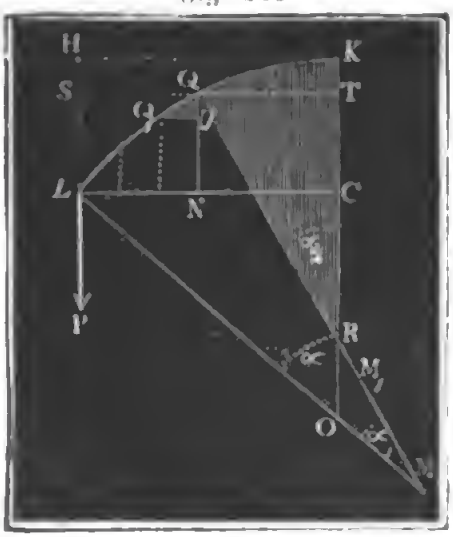
$$\varphi_1 = \frac{Pl^2}{n^2WE},\ \varphi_2 = \frac{2Pl^2}{n^2WE},\ \varphi_3 = \frac{3Pl^2}{n^2WE}$$

u. ſ. w., und wir erhalten durch Summation das Maaß des Krümmungswinkels $KOL = \alpha$ der ganzen neutralen Axe

$$\alpha = \frac{Pl^2}{n^2WE}(1+2+3+\ldots+n) = \frac{Pl^2}{n^2WE}\cdot\frac{n^2}{2} = \frac{Pl^2}{2WE}.$$

Mit Hilfe der letzten Formel läßt ſich nun auch die Gleichung der von der neutralen Axe KL, Fig. 258, gebildeten elaſtiſchen Linie finden.

Fig. 258.



Theilen wir die in L anfangende Abſciſſe $LN = x$ in m gleiche Theile und ſuchen wir die dieſen Theilen entſprechenden Theile der Ordinate $NQ = y$. Da der Krümmungshalbmeſſer QR winkelrecht auf dem Bogentheil QQ_1 ſteht, ſo iſt der Winkel $QQ_1U = QRK = \alpha_2$, und daher der Theil QU der Ordinate $y_1 = Q_1U \,.\, tang.\ \alpha_2$, oder $Q_1U = \frac{x}{m}$ und $tang.\ \alpha_2 = \alpha_2$ geſetzt, $QU = \frac{x\alpha_2}{m}$. Nun iſt

$$\alpha_2 = LOK - LMQ = \alpha - \alpha_1 = \frac{Pl^2}{2WE} - \frac{Px^2}{2WE} = \frac{P}{2WE}(l^2 - x^2);$$

es folgt daher jener Ordinatentheil $QU = \frac{x}{m}\cdot\frac{P}{2WE}(l^2 - x^2)$. Setzen wir ſtatt x^2 in der Parentheſe

ſucceſſiv $\left(\frac{x}{m}\right)^2, \left(\frac{2x}{m}\right)^2, \left(\frac{3x}{m}\right)^2$, u. ſ. w., ſo erhalten wir durch die letzte Formel alle Theile von y, und vereinigen wir dieſe durch Addiren, ſo ergiebt ſich die ganze Ordinate Elaſtiſche Linie.

$$NQ = y = \frac{x}{m} \cdot \frac{P}{2WE}\left[l^2 - \left(\frac{x}{m}\right)^2 + l^2 - \left(\frac{2x}{m}\right)^2 + l^2 - \left(\frac{3x}{m}\right)^2 + \ldots\right]$$

$$= \frac{x}{m} \cdot \frac{P}{2WE}\left[ml^2 - \left(\frac{x}{m}\right)^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2)\right],$$

$$\text{d. i. } y = \frac{Px}{2WE}\left(l^2 - \frac{x^2}{3}\right).$$

Mit Hilfe dieſer Formel läßt ſich für jede Abſciſſe x die entſprechende Ordinate y und ebenſo auch für die ganze Länge $CL = l$ die Bogenhöhe $CK = a$ berechnen. Es iſt die letztere

$$a = \frac{Pl}{2WE}\left(l^2 - \frac{l^2}{3}\right) = \frac{Pl^3}{3WE}.$$

Es wächſt alſo die Bogenhöhe wie die Kraft und wie der Cubus der Länge.

Hat man a gemeſſen, ſo kann man durch dieſe Formel den Elaſticitätsmodul finden, es iſt nämlich $E = \frac{Pl^3}{3Wa}$.

Das Arbeitsquantum, durch welches die Einbiegung a hervorgebracht wird, iſt nach §. 186:

$$L = \frac{Pa}{2} = \frac{Pl^3}{6WE} = \frac{3WE}{2l^3}.$$

§. 193. Iſt die ganze Laſt gleichmäßig vertheilt auf den Balken und trägt jede Längeneinheit deſſelben $= q$, alſo die ganze Länge l, $Q = lq$, ſo hat man ſtatt der Momente $\frac{1}{n}Pl, \frac{2}{n}Pl, \frac{3}{n}Pl$ u. ſ. w. die Momente $\frac{1}{2}q\left(\frac{l}{n}\right)^2, \frac{1}{2}q\left(\frac{2l}{n}\right)^2, \frac{1}{2}q\left(\frac{3l}{n}\right)^2$ u. ſ. w. einzuſetzen, weil die Schwerpunkte der Laſten $q\frac{l}{n}, q \cdot \frac{2l}{n}, q \cdot \frac{3l}{n}$ u. ſ. w. in der Mitte von $\frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \frac{3l}{n}$ u. ſ. w. liegen, alſo die Hebelarme $\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{n}, \frac{1}{2} \cdot \frac{2l}{n}, \frac{1}{2} \cdot \frac{3l}{n}$ u. ſ. w. ſind. Hiernach bekommen wir hier

$\varphi_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^3}{n^3WE}$, $\varphi_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^2 \cdot ql^3}{n^3WE}$, $\varphi_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^2 \cdot ql^3}{n^3WE}$ u. ſ. w., und daher

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^3}{n^3WE}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = \frac{ql^3}{2n^3WE} \cdot \frac{n^3}{3} = \frac{ql^3}{6WE},$$

ebenſo $a_1 = \frac{qx^3}{6WE}$ und $a_2 = \frac{q}{6WE}(l^3 - x^3)$. Aus dem letzten Winkelmaaße folgt ein Element der Ordinate

Elaſtiſche Linie.

$= \frac{x}{m}\ \alpha_2 = \frac{x}{m} \cdot \frac{q}{6WE}(l^3 - x^3)$, und nun ſtatt x^3 nach und nach $\left(\frac{x}{m}\right)^3$, $\left(\frac{2x}{m}\right)^3$, $\left(\frac{3x}{m}\right)^3$ eingeführt, ergiebt ſich

$$y = \frac{x}{m} \cdot \frac{q}{6WE}\left[ml^3 - \left(\frac{x}{m}\right)^3 (1^3 + 2^3 + \ldots + m^3)\right]$$

$$= \frac{x}{m} \cdot \frac{q}{6WE}\left[ml^3 - \left(\frac{x}{m}\right)^3 \cdot \frac{m^4}{4}\right],$$

d. i. $y = \frac{qx}{6WE}\left(l^3 - \frac{x^3}{4}\right)$, die geſuchte Curvengleichung.

Nehmen wir wieder $x = l$, ſo bekommen wir die Bogenhöhe

$$a = \frac{ql}{6WE} \cdot {}^3/_4\, l^3 = \frac{ql^4}{8WE} = \frac{Ql^3}{8WE} = {}^3/_8 \cdot \frac{Ql^3}{3WE}$$ d. i.

$^3/_8$mal ſo groß, als wenn die Laſt Q am Ende des Balkens hinge.

Das Arbeitsquantum, welches die Einbiegung a hervorbringt, iſt hier

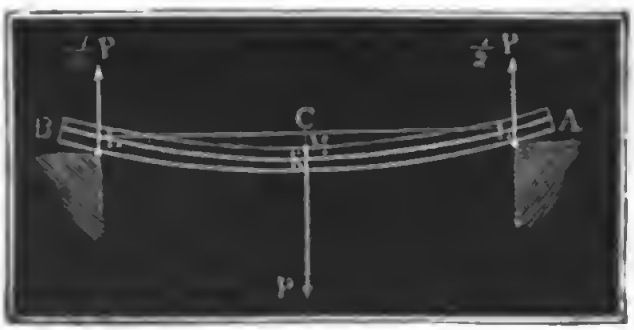
$$L = \frac{q^2 l^3}{40WE} = \frac{Q^2 l^3}{40WE} = \frac{8WEa^2}{5l^3}.$$

Iſt der Balken durch eine gleichmäßig vertheilte Laſt Q und durch eine Kraft P am Ende zugleich belaſtet, ſo hat man die Bogenhöhe

$$a = \frac{Pl^3}{3WE} + \frac{Ql^3}{8WE} = \left(\frac{P}{3} + \frac{Q}{8}\right)\frac{l^3}{WE}.$$

Iſt ein Balken AMB, Fig. 259, in den Endpunkten unterſtützt, und in der Mitte M durch eine Kraft P belaſtet, ſo werden die Enden durch die Reactionen $^1/_2\,P$ und $^1/_2\,P$ gerade ſo aufwärts gebogen, wie im vorigen Falle (§. 192) das eine Ende abwärts, es gilt daher die dort gefundene Formel auch hier, wenn man ſtatt P, $\frac{P}{2}$ und ſtatt der ganzen Länge $LL = l$ nur die halbe Länge $KL = \frac{l}{2}$ einführt. Hiernach ergiebt ſich die Bogenhöhe

Fig. 259.



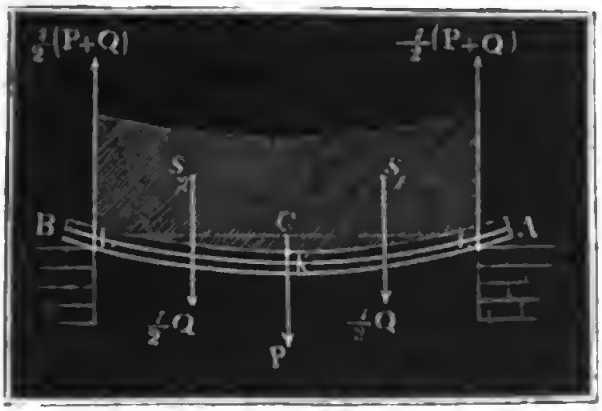
$$a = \frac{{}^1/_2\,P \cdot ({}^1/_2\,l)^3}{3WE} = {}^1/_{16} \cdot \frac{Pl^3}{3WE} =$$ ein Sechszehntel der Bogenhöhe des am Ende belaſteten Balkens.

Iſt endlich auch noch die Laſt $Q = ql$ auf den mit beiden Enden aufruhenden Körper AB, Fig. 260 (a. folg. S.), gleichmäßig vertheilt, ſo hat man in der Formel $a = \left(\frac{P}{3} + \frac{Q}{8}\right)\frac{l^3}{WE}$ ſtatt l, $\frac{l}{2}$, ſtatt P,

$\frac{P+Q}{2}$ und ſtatt Q, $-\frac{Q}{2}$ zu ſetzen, weil in Beziehung auf die Mitte K die Laſt $\frac{Q}{2}$ am Hebelarme $\frac{l}{4}$ der Kraft $\frac{P+Q}{2}$ am Hebelarme $\frac{l}{2}$ entgegen wirkt. Es iſt folglich

Elaſtiſche Linie.

Fig. 260.



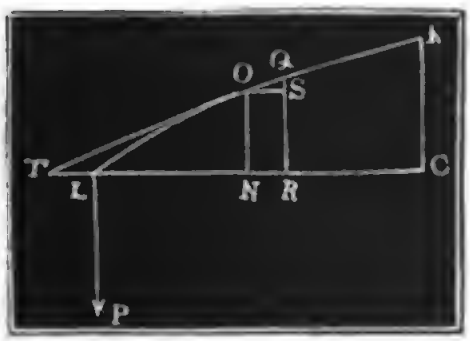
$$a=\left(\frac{P+Q}{6}-\frac{Q}{16}\right)\frac{l^3}{8WE}$$

$$=\left(P+\frac{5}{8}Q\right)\frac{l^3}{48WE}$$

Für $P=o$ folgt $\alpha=\frac{5}{8}\cdot\frac{Ql^3}{48WE}$; iſt alſo die Laſt auf den ganzen Bogen gleichmäßig vertheilt, ſo fällt die Bogenhöhe $\frac{5}{8}$ mal ſo groß aus, als wenn dieſelbe in der Mitte des Balkens niederzieht.

§. 194 *). Eine ſchärfere Gleichung der von der neutralen Axe eines gebogenen Balkens gebildeten elaſtiſchen Linie LOK, Fig. 261, läßt ſich durch den höhern Calcul auf folgende Weiſe finden. Setzen wir in der allgemeinen Gleichung des §. 191, $WE=Mr$, das Moment $M=Px$ und für den Krümmungshalbmeſſer (aus Art. 27 der analytiſchen Hülfslehren), den Werth

Fig. 261.



$$r=-\frac{ds^3}{dx^2 d(tang.\alpha)}$$

ein, und hierin wieder, nach Art. 26:

$$ds=\sqrt{1+(tang.\alpha)^2}\,.\,dx,$$ ſo erhalten wir

$$WE=-\frac{Px\,dx\,[1+(tang.\alpha)^2]^{3/2}}{d\,tang.\alpha}.$$

Bei einer mäßigen Biegung des Balkens iſt aber der Winkel α, welchen die Berührungslinie mit der Abſciſſenaxe einſchließt, nur klein, und es läßt ſich daher

$$[1+(tang.\alpha)^2]^{3/2} \text{ annähernd} = 1+\tfrac{3}{2}(tang.\alpha)^2 \text{ ſetzen,}$$

weshalb nun

Elaſtiſche Linie.

$$WE = -\frac{Px\,[1+{}^3/_2(tang.\alpha)^2]\,dx}{d\,tang.\alpha}, \text{ oder umgekehrt}$$

$$\frac{Px\,dx}{WE} = -\frac{d\,tang.\alpha}{1+{}^3/_2(tang.\alpha)^2} = -[1-{}^3/_2(tang.\alpha)^2]\,d\,tang.\alpha$$

folgt.

Hiernach iſt:

$$\int\frac{Px\,dx}{WE} = -\int d\,tang.\alpha + {}^3/_2\int(tang.\alpha)^2\,d\,tang.\alpha,$$

d. i. nach Art. 13:

$$\frac{Px^2}{2WE} = -\,tang.\alpha + {}^1/_2\,(tang.\alpha)^3 + Con.,$$

Nun iſt aber in dem Scheitel K die Curve parallel zur Abſciſſenaxe, alſo $\alpha = 0$; ſetzen wir daher die Projection CL der elaſtiſchen Linie in der Abſciſſenaxe $= b$, ſo erhalten wir:

$$\frac{Pb^2}{2WE} = -\,tang.0 + {}^1/_2\,(tang.0)^3 + Con.,$$

und daher durch Subtraction dieſer Gleichungen:

$$\frac{P(b^2-x^2)}{2WE} = tang.\alpha - {}^1/_2\,(tang.\alpha)^3;$$

und umgekehrt für den Tangentenwinkel $OTN = \alpha$,

$$tang.\,\alpha = \frac{P(b^2-x^2)}{2WE} + {}^1/_2\,(tang.\alpha)^3$$

$$= \frac{P(b^2-x^2)}{2WE} + {}^1/_2\,\frac{P^3(b^2-x^2)^3}{8W^3E^3}, \text{ d. i.}$$

$$1)\quad tang.\alpha = \frac{P(b^2-x^2)}{2WE}\left(1+\frac{P^2(b^2-x^2)^2}{8W^2E^2}\right).$$

Nun iſt ferner $tang.\alpha = \frac{dy}{dx}$, daher folgt denn

$$dy = \left(1+\frac{P^2(b^2-x^2)^2}{8W^2E^2}\right)\frac{P(b^2-x^2)\,dx}{2WE}, \text{ und}$$

$$y = \frac{P}{2WE}\left[\int(b^2-x^2)\,dx + \frac{P^2}{8W^2E^2}\int(b^2-x^2)^3\,dx\right]$$

$$= \frac{P}{2WE}\left[\int b^2\,dx - \int x^2dx + \frac{P^2}{8W^2E^2}\right.$$

$$\left.\left(\int b^6\,dx - \int 3\,b^4x^2\,dx + \int 3\,b^2x^4dx - \int x^6\,dx\right)\right]$$

$$= \frac{P}{2WE}\left[b^2x - \frac{x^3}{3} + \frac{P^2}{8W^2E^2}\left(b^6x - b^4x^3 + \frac{3b^2x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right)\right] + Con.$$

Da mit $x = 0$ auch $y = 0$ iſt, ſo hat man auch $Con. = 0$, und

$$2)\quad y = \frac{Px}{2WE}\left[b^2 - \frac{x^2}{3} + \frac{P^2}{8W^2E^2}\left(b^6 - b^4x^2 + {}^3/_5\,b^2x^4 - \frac{x^6}{7}\right)\right].$$

Im Scheitel iſt $x = b$ und y die Bogenhöhe $CK = a$, daher folgt Elaſtiſche Linie.

$$a = \frac{P}{2WE}\left(\tfrac{2}{3}b^3 + \frac{P^2}{8W^2E^2} \cdot \tfrac{16}{35} \cdot b^7\right), \text{ d. i.}$$

$$3)\quad a = \frac{Pb^3}{3WE}\left(1 + \tfrac{3}{35}\,\frac{P^2b^4}{W^2E^2}\right).$$

Aus $ds = \sqrt{1 + (tang.\,\alpha)^2} \cdot dx = [1 + \tfrac{1}{2}(tang.\,\alpha)^2]\,dx$ ergiebt ſich, wenn man $tang.\,\alpha = \frac{P\,(b^2 - x^2)}{2\,WE}$ ſubſtituirt:

$$s = \int\left(1 + \tfrac{1}{8} \cdot \frac{P^2\,(b^2 - x^2)^2}{W^2\,E^2}\right) dx$$

$$= \int dx + \frac{P^2}{8W^2E^2}\left[\int\left(b^4\,dx - \int 2\,b^2x^2\,dx + \int x^4 dx\right)\right]$$

$$= x + \frac{P^2}{8W^2E^2}\left(b^4\,x - \frac{2\,b^2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right), \text{ d. i. die Bogenlänge}$$

$$4)\quad s = \left[1 + \frac{P^2}{8W^2E^2}\left(b^4 - \tfrac{2}{3}\,b^2x^2 + \frac{x^4}{5}\right)\right] x.$$

Nimmt man $x = b$, ſo erhält man die ganze Länge des Balkens:

$$5)\quad l = \left(1 + \frac{P^2b^4}{15\,W^2E^2}\right)b = \left(1 + \tfrac{3}{5} \cdot \frac{a^2}{b^2}\right)b.$$

Umgekehrt erhält man:

$$6)\quad b = \frac{l}{1 + \dfrac{P^2b^4}{15W^2E^2}} = \left(1 - \frac{P^2l^4}{15\,W^2E^2}\right) l, \text{ und daher}$$

$$a = \frac{P}{3\,WE}\left(1 - \frac{P^2l^4}{15\,W^2E^2}\right)^3 l^3\left(1 + \tfrac{3}{35} \cdot \frac{P^2l^4}{W^2E^2}\right), \text{ oder}$$

$$= \frac{Pl^3}{3WE}\left(1 - \frac{3\,P^2l^4}{15W^2E^2}\right)\left(1 + \tfrac{3}{35} \cdot \frac{P^2l^4}{W^2E^2}\right), \text{ d. i.}$$

$$7)\quad a = \frac{Pl^3}{3WE}\left(1 - \tfrac{4}{35} \cdot \frac{P^2l^4}{W^2E^2}\right).$$

Vernachläſſigen wir alle Glieder mit den Potenzen von $\frac{P}{WE}$, ſo erhalten wir, wie in den vorigen Paragraphen:

$$a = \frac{Pl^3}{3WE},\quad b = l,$$

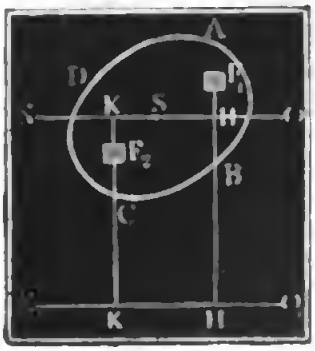
$$y = \frac{Px}{2WE}\left(l^2 - \frac{x^2}{3}\right) \text{ und } tang.\,\alpha = \frac{P\,(l^2 - x^2)}{2WE}.$$

§. 195. Kennt man das Biegungsmoment W_1E eines Körpers $ABCD$, Fig. 262 (a. f. S.), in Beziehung auf eine Axe N_1O_1 außerhalb des Schwerpunktes, ſo läßt ſich leicht das Moment in Beziehung auf eine andere, Reduction der Biegungsmomente.

Reduction der Biegungsmomente.

durch den Schwerpunkt S gehende Axe NO finden, welche mit der erſteren parallel läuft. Iſt der Abſtand $HH_1 = KK_1$ beider Axen $= d$, und ſind die Abſtände der Flächenelemente F_1, F_2 u. ſ. w. von der neutralen Axe $NO = z_1$, z_2 u. ſ. w., ſo hat man die Abſtände von der Axe $N_1O_1 = d + z_1$, $d + z_2$ u. ſ. w., und es iſt nun das Biegungsmoment $W_1 E = [F_1(d + z_1)^2 + F_2(d + z^2_2) + ..] E = [F_1(d^2 + 2dz_1 + z^2_1) + F_2(d^2 + 2dz_2 z^2_2 + ...)] E = [d^2(F_1 + F_2 + ...) + 2d(F_1 z_1 + F_2 z_2 + ...) + (F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + ...)]$. Nun iſt aber $F_1 + F_2 + ...$ als Summe aller Elemente $=$ Querſchnittt F des ganzen Körpers, ferner $F_1 z_1 + F_2 z_2 + ...$ als Summe der ſtatiſchen Momente in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt gehende Axe $=$ Null, und $F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + ...$ das Biegungsmoment WE in Beziehung auf die neutrale Axe NO; es folgt daher $W_1 E = (Fd^2 + W) E$, oder $W_1 = Fd^2 + W$ und umgekehrt $W = W_1 - Fd^2$.

Fig. 262.



Es iſt alſo das Maaß W des Biegungsmomentes in Beziehung auf die neutrale Axe gleich dem Maaße W_1 des Biegungsmomentes in Beziehung auf eine zweite Parallelaxe minus Produkt aus Querſchnitt F und Quadrat (d^2) des Abſtandes beider Axen. Auch folgt hieraus, daß unter allen Biegungsmomenten das in Hinſicht auf die neutrale Axe am kleinſten iſt.

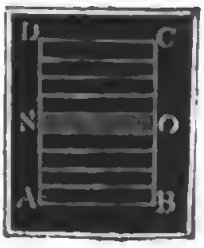
Von vielen Körpern laſſen ſich die Biegungsmomente in Hinſicht auf irgend eine Axe leicht finden, man kann daher dieſe dazu benutzen, um mittels der gefundenen Formel die Momente in Hinſicht auf die neutrale Axe zu beſtimmen.

Parallelepipediſcher Balken.

§. 196. Um die Biegungsverhältniſſe eines Balkens oder andern prismatiſchen Körpers und die durch ſeine neutrale Axe gebildete elaſtiſche Linie angeben zu können, muß der Querſchnitt dieſes Körpers bekannt ſein, und daraus das Biegungsmoment WE berechnet werden.

Iſt der Querſchnitt des Balkens ein Rechteck $ABCD$, Fig. 263, von der Breite $AB = CD = b$ und der Höhe $AD = BC = h$, ſo beſtimmt ſich das Biegungsmoment $WE = (F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + ...) E$, wenn man dieſen Querſchnitt durch Linien parallel zur neutralen Axe NO in $2n$ gleiche Streifen, jeden vom Inhalte $b \cdot \frac{h}{2n} = \frac{bh}{2n}$, zerſchneidet, die Momente dieſer Streifen beſtimmt und ſie durch Addition vereinigt. Setzen wir in

Fig. 263.



$\frac{bh}{2n} \cdot z^2 E$ statt z nach und nach die Werthe $\frac{1}{n} \cdot \frac{h}{2}$, $\frac{2}{n} \cdot \frac{h}{2}$, $\frac{3}{n} \cdot \frac{h}{2}$ u. s. w., so erhalten wir zunächst die Momente der Streifen auf der einen Seite der neutralen Axen, verdoppeln wir aber deren Summe, so ergiebt sich das vollständige Biegungsmoment Parallelepipedischer Balken.

$$WE = 2 \cdot \frac{bh}{2n}\left[\left(\frac{h}{2n}\right)^2 + \left(\frac{2h}{2n}\right)^2 + \left(\frac{3h}{2n}\right)^2 + \ldots\right] E =$$

$$\frac{bh}{n} \cdot \left(\frac{h}{2n}\right)^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + .. + n^2)\, E = \frac{bh^3}{4.3} E = \frac{bh^3}{12} \cdot E.$$

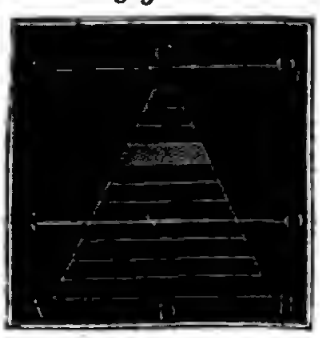
Bei einem parallelepipedischen Balken wächst also das Biegungsmoment wie die Breite und wie der Cubus der Höhe des Balkens.

Setzen wir diesen Werth für WE in die Formel $a = \frac{Pl^3}{3WE}$ des §. 192, so erhalten wir $a = 4 \cdot \frac{Pl^3}{bh^3E}$, setzen wir ihn aber in die Formel $a = \frac{1}{48}\frac{Pl^3}{WE}$ des §. 193, so stellt sich $a = \frac{Pl^3}{4bh^3E}$ heraus. Umgekehrt, folgt aus der Bogenhöhe a der Elasticitätsmodul $E = \frac{4Pl^3}{abh^3}$ für den einen, und $E = \frac{Pl^3}{4abh^3}$ für den andern Fall.

Beispiele. 1) Ein hölzerner Balken von 10 Fuß = 120 Zoll Länge, 8 Zoll Breite und 10 Zoll Höhe soll in beiden Enden aufruhen und eine gleichmäßig vertheilte Last $Q = 10000$ Pf. tragen, welche Biegung wird derselbe erleiden? Es ist die Bogenhöhe $a = \frac{5}{384}\frac{Ql^3}{bh^3E} = \frac{5}{32} \cdot \frac{10000.120^3}{8.10^3.E} = \frac{50000 \cdot 12^3}{32 \cdot 8E} = \frac{1350000}{4.E}$. Nun $E = 1800000$ Pf. eingesetzt, folgt $a = \frac{135}{4.180} = 0{,}1875$ Zoll.

2) Wenn sich eine parallelepipedisch geformte gußeiserne Stange von 2 Zoll Breite und $\frac{1}{8}$ Zoll Dicke durch ein in der Mitte aufliegendes Gewicht $P = 18$ Pf. um $\frac{1}{4}$ Zoll gesenkt hat, während die Entfernung l der Stützen 5 Fuß beträgt, so ergiebt sich der Elasticitätsmodul des Gußeisens $E = \frac{Pl^3}{4abh^3} = \frac{18 \cdot 60^3}{4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot (\frac{1}{8})^3} = \frac{18.60^3}{\frac{1}{4}} = 72 \cdot 216000 = 15552000$ Pf.

Fig. 264.



§. 197. Um das Biegungsmoment eines Prisma's mit dreiseitigem Querschnitte ABC, Fig. 264, zu finden, zerlegen wir diesen Querschnitt durch Parallellinien zur Grundlinie AB in n schmale Streifen und bestimmen die Momente dieser in Hinsicht auf die durch die Spitze C parallel zu AB gehende Axe N_1O_1. Ist h die Höhe CD, und b die Breite AB des triangulären Querschnitts ABC, so hat man die Höhe Reduction der Biegungsmomente.

Reduction der Biegungsmomente.

dieſer Streifen $= \frac{h}{n}$, ihre Längen $= \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}$ u. ſ. w. bis $\frac{nb}{n}$ und ihre Abſtände von $N_1O_1 = \frac{h}{n}, \frac{2h}{n}, \frac{3h}{n}$ u. ſ. w. bis $\frac{nh}{n}$. Hiernach ſind dann die Inhalte dieſer Streifen: $F_1 = \frac{bh}{n^2}$, $F_2 = \frac{2bh}{n^2}$, $F_3 = \frac{3bh}{n^2}$ u. ſ. w. und ihre Momente $F_1 z_1^2 = \frac{bh^3}{n^4}$, $F_2 z_2^2 = 2^3 . \frac{bh^3}{n^4}$, $F_3 z_3^2 = 3^3 . \frac{bh^3}{n^4}$ u. ſ. w., und es ergiebt ſich das Maaß des Biegungsmomentes in Beziehung auf die Axe N_1O_1:

$$W_1 = \frac{bh^3}{n^4}(1^3+2^3+3^3+..+n^3) = \frac{bh^3}{n^4} . \frac{n^4}{4} = \frac{bh^3}{4}.$$

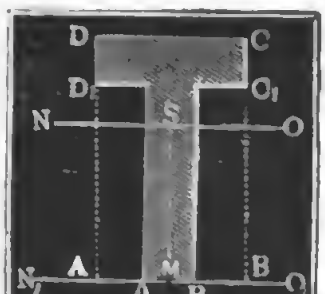
Der Abſtand des Schwerpunktes S von der Spitze C iſt aber $d = \frac{2}{3}h$, und der Inhalt des ganzen Dreieckes iſt $F = \frac{bh}{2}$; es folgt daher $Fd^2 = \frac{bh}{2} . \frac{4}{9}h^2 = \frac{2bh^3}{9}$ und das geſuchte Biegungsmoment in Hinſicht auf die neutrale Axe NO:

$$WE = (W_1 - Fd^2)\,E = \left(\frac{bh^3}{4} - \frac{2bh^3}{9}\right)E = \frac{1}{3} . \frac{bh^3}{12}\,E =$$

einem Drittel von dem Biegungsmomente des parallelipipediſchen Balkens, welcher mit dieſem dreiſeitigen gleiche Höhe und Breite hat. Da aber dieſer Balken nur doppelt ſo viel Volumen hat, ſo folgt, daß unter übrigens gleichen Umſtänden der triangulare Balken $\frac{2}{3}$mal ſo viel Biegungsmoment hat als der parallelepipediſche Balken.

Auf dieſelbe Weiſe kann man die Biegungsmomente vieler anderen in der Praxis häufig vorkommenden Körper finden. So iſt z. B. für den Körper mit T förmigem Querſchnitte A_1B_1CD, Fig. 265, und den Dimenſionen $AB = b$, $AB - A_1B_1 = AA_1 + BB_1 = b_1$, $AD = BC = h$ und $AD_1 = BC_1 = BC - CC_1 = h_1$, das Maaß des Biegungsmomentes in Beziehung auf die untere Kante A_1B_1: Moment des Rechteckes $ABCD$ minus Moment der Rechtecke A_1D_1 und B_1C_1, d. i. $W_1 = \frac{1}{2} . \frac{b(2h)^3}{12} - \frac{1}{2} . \frac{b_1(2h_1)^3}{12} = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{3}$, wie ſich ergiebt, wenn man jedes dieſer Rechtecke als die Hälfte von doppelt ſo hohen Rechtecken mit der neutralen Axe N_1O_1 anſieht. Nun iſt die Fläche $A_1C_1D = bh - b_1h_1$.

Fig. 265.



und ihr ſtatiſches Moment $Fd = bh \cdot \frac{h}{2} - b_1h_1 \cdot \frac{h_1}{2} = \frac{1}{2}(bh^2 - b_1h_1^2)$; es folgt daher der Hebelarm $MS = d = \frac{bh^2 - b_1h_1^2}{2(bh - b_1h_1)}$, das Moment $Fd^2 = \frac{1}{4}(bh^2 - b_1h_1^2)^2 : (bh - b_1h_1)$ und das Biegungsmoment in Beziehung auf die durch den Schwerpunkt S gehende neutrale Axe:

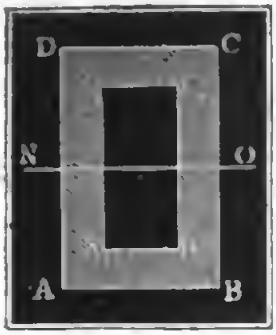
$$W = W_1 - Fd^2 = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{3} - \frac{1}{4}(bh^2 - b_1h_1^2)^2 : (bh - b_1h_1)$$

$$= \frac{4(bh^3 - b_1h_1^3)(bh - b_1h_1) - 3(bh^2 - b_1h_1^2)^2}{12(bh - b_1h_1)}$$

$$= \frac{(bh^2 - b_1h_1^2)^2 - 4bh\,b_1h_1(h - h_1)^2}{12(bh - b_1h_1)}.$$

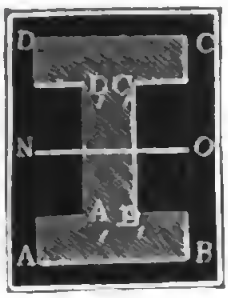
§. 198. Von einem hohlen parallelepipediſchen Balken $ABCD$, Fig. 266 beſtimmt ſich das Biegungsmoment, wenn man von dem Momente des vollſtändigen Balkens das Moment der Höhlung abzieht. Sind $AB = b$ und $BC = h$ die äußere Breite und Höhe und $A_1B_1 = b_1$ und $B_1C_1 = h_1$ die innere Breite und Höhe, ſo hat man die Maaße der Biegungsmomente beider $= \frac{bh^3}{12}$ und $\frac{b_1h_1^3}{12}$, und es giebt die Subtraction für das Biegungsmoment des hohlen Balkens: $W = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12}$. Hohle Balken.

Fig. 266.



Ganz auf gleiche Weiſe ergiebt ſich das Biegungsmoment des an den Seiten ausgehöhlten Körpers $ABCD$, Fig. 267. Sind $AB = b$ und $BC = h$ äußere Breite und Höhe, und iſt $AB - A_1B_1 = b_1$, ſowie $B_1C_1 = h_1$ die Summe der Breiten und die Höhe der beiden Höhlungen, ſo erhält man wieder durch Subtraction: $W = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12}$.

Fig. 267.



Ebenſo ergiebt ſich das Biegungsmoment des Körpers $ABCD$, Fig. 268, mit kreuzförmigem Querſchnitte. Iſt hier $AB = b$ und $BC = h$ die Breite und Höhe des Mittelſtückes, und iſt $A_1B_1 - AB = b_1$ und $A_1D_1 = h_1$ die Summe der Breiten und die Höhe der Seitenſtücke, ſo folgt durch Addition das Biegungsmoment: $W = \frac{bh^3 + b_1h_1^3}{12}$.

Fig. 268.

Es iſt übrigens leicht einzuſehen, daß die ho-

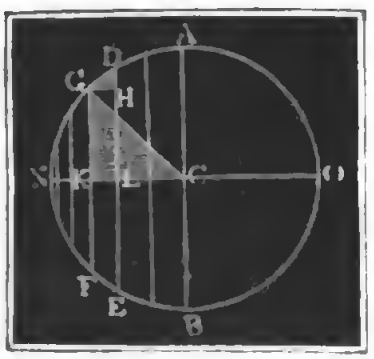
Hohle Balken

hen, ausgehöhlten und gefiederten Körper bei gleicher Maſſe ein größeres Biegungsmoment haben als die breiten, maſſiven Körper. Weil dieſes Moment mit dem Querſchnitte F und dem Quadrate (z^2) der Entfernung von der neutralen Axe wächſt, ſo hat eine und dieſelbe Faſer um ſo mehr Widerſtand gegen die Biegung, je entfernter ſie von der neutralen Axe iſt. Iſt z. B. bei einem maſſiven parallelepipediſchen Balken die Höhe $h =$ der doppelten Breite b, ſo fällt ſein Biegungsmoment $W = \frac{b.(2b)^3}{12} = \frac{2}{3}\ b^4$ oder $= \frac{2b.b^3}{12} = \frac{1}{6}\ b^4$ aus, je nachdem man dieſen Balken mit der kleinern Breite b oder mit der größern $2b$ auflegt; es iſt alſo im erſten Falle das Biegungsmoment viermal ſo groß, als im zweiten Falle. Wenn man ferner den maſſiven Balken vom Querſchnitte bh durch einen hohlen erſetzt, deſſen Höhlung bh gleich iſt dem maſſiven Theile, vom Querſchnitte $b_1h_1 - bh$, wenn alſo $b_1h_1 - bh = bh$, d. i. $b_1h_1 = 2bh$, oder $b_1 = b\sqrt{2}$ und $h_1 = h\sqrt{2}$ iſt, ſo erhält man für den letztern das Biegungsmoment $\frac{b_1h_1^3 - bh^3}{12} = \frac{b\sqrt{2}(h\sqrt{2})^3 - bh^3}{12} = \frac{3}{12}\ bh^3$, d. i. dreimal ſo groß als für den erſtern.

Cylinder.

§. 199. Das Biegungsmoment eines Cylinders beſtimmt ſich auf folgende Weiſe. Es ſei $AOBN$, Fig. 269, der kreisförmige Querſchnitt und NO die neutrale Axe des Cylinders. Da der Durchmeſſer AB dieſen Querſchnitt in zwei gleiche und gleiche Biegungsmomente beſitzende Theile theilt, ſo findet man das Biegungsmoment des Ganzen durch Verdoppelung des Momentes der Hälfte ANB. Dieſe Hälfte läßt ſich durch Schnitte DE, FG u. ſ. w. parallel zu AB und rechtwinklig auf NO in dünne, als Parallelepipede anzuſehende Platten zertheilen. Das Biegungsmoment eines ſolchen Theiles $DEFG$ iſt $= \frac{KL \,.\, \overline{DE}^3}{12}$. Bezeichnet nun r den Halbmeſſer $CA = CN$ des kreisförmigen Querſchnittes, ſo hat ein Quadrant AN den Umfang $\frac{\pi r}{2}$, und theilt man dieſen in n gleiche Theile, ſo mißt ein ſolcher Theil $DG = \frac{1}{n} . \frac{\pi r}{2} = \frac{\pi r}{2n}$. Dieſem Theile entſpricht die mit CN parallel laufende Projection $GH = KL$, welche ſich beſtimmt, indem man ſetzt: $GH : GD = GK : CG$, und die deshalb

Fig. 269.



$GH = \frac{GD.GK}{CG} = \frac{\pi}{2n}.GK$ ausfällt. Hiernach iſt denn für das Cylinder-

Biegungsmoment des Theiles $DEFG = \frac{\pi}{2n}.GK.\frac{(2GK)^3}{12} = \frac{\pi}{3n}(GK)^4$.

Setzen wir den veränderlichen und dem Schnitte GF entſprechenden Winkel $ACG = \varphi^0$, ſo erhalten wir die Ordinate $GK = r\ cos.\ \varphi$ und das letzte Biegungsmoment

$$= \frac{\pi}{3n} r^4\ cos.\ \varphi^4 = \frac{\pi}{3n} r^4 . \frac{3+4\,cos.2\varphi+cos.4\varphi}{8}.$$

Das Biegungsmoment des halben Cylinders ANB wird nun gefunden, wenn wir für φ nach und nach die Werthe $\frac{1}{n}.\frac{\pi}{2}, \frac{2}{n}.\frac{\pi}{2}, \frac{3}{n}.\frac{\pi}{2}$ u. ſ. w. bis $\frac{n}{n}.\frac{\pi}{2}$ einſetzen und die ſich herausſtellenden Ergebniſſe addiren. Nun iſt aber $\frac{\pi r^4}{3n}.\frac{1}{8} = \frac{\pi r^4}{24n}$ ein gemeinſchaftlicher Faktor, es handelt ſich daher nur um die Summe von Werthen wie $3+4\,cos.2\varphi+cos.4\varphi$. Die Zahl 3 n mal zu ſich ſelbſt addirt, giebt $3n$, alle Werthe von $cos.\ 2\varphi$, welche ſich herausſtellen, wenn man φ von Null nach und nach bis $\frac{\pi}{2}$, alſo 2φ von Null bis π wachſen läßt, geben zur Summe Null, weil die Coſinus im zweiten Quadranten gleich und entgegengeſetzt ſind den Coſinus im erſten Quadranten, auch iſt endlich die Summe der Coſinus aller Winkel von 0 bis 2π = Null, daher bleibt die Summe aller Werthe von $3+4\,cos.2\varphi+cos.4\varphi$ innerhalb der Grenzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ genommen, $= 3n$, und es iſt das Maaß des Biegungsmomentes vom halben Cylinder $= \frac{\pi r^4}{24n}.3n = \frac{\pi r^4}{8}$ und endlich das des ganzen Cylinders:

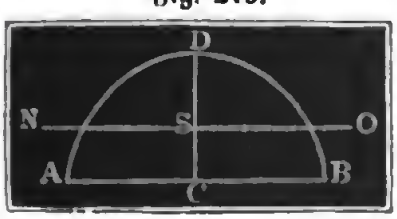
$$W = \frac{\pi}{4} r^4 = 0{,}7854\, r^4.$$

Für eine Röhre oder einen hohlen Cylinder mit dem äußeren Halbmeſſer r_1 und dem inneren Halbmeſſer r_2 iſt

$$W = \frac{\pi}{4}(r_1^4 - r_2^4).$$

Um das Biegungsmoment eines Körpers mit halbkreisförmigem Querſchnitte ADB, Fig. 270, zu finden, machen wir von der im §. 195 gefundenen Regel Gebrauch, wonach das Moment in Beziehung auf die durch den Schwerpunkt S gehende Axe NO gleich iſt dem Momente in Beziehung auf den als zweite

Fig. 270.



Cylinder. Axe anzuſehenden Durchmeſſer AB minus Querſchnitt $F\ (= \frac{1}{2}\pi r^2)$ mal Quadrat der Entfernung CS beider Axen. Dieſem zufolge erhalten wir das geſuchte Moment $= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} r^4 - \frac{1}{2}\pi r^2 \cdot \overline{CS}^2 = \frac{\pi r^4}{8} - \frac{1}{2}\pi r^2 \cdot \left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2$ (ſ. §. 108), d. i. $W_1 = \pi r^4 \left(\frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi^2}\right) = 0{,}110 \cdot r^4$.

Relative Feſtigkeit. §. 200. Kennt man das Biegungsmoment eines prismatiſchen Körpers, ſo läßt ſich hieraus durch eine einfache Multiplication das Tragvermögen und die Feſtigkeit dieſes Körpers beſtimmen. Iſt eine einzige Faſer oder Faſernſchicht bis zur Elaſticitätsgrenze ausgedehnt oder zuſammengedrückt, ſo hat der Körper die Grenze ſeines Tragvermögens erreicht; bezeichnet man wieder den Tragmodul durch T und die Entfernung der entfernteſten Faſer von der neutralen Axe durch e, ſo hat man auch wieder $T = \frac{\lambda}{l} E$ und $\frac{\lambda}{l}$, oder die relative Längenausdehnung, $= \frac{e}{r}$, daher $\frac{E}{r} = \frac{T}{e}$. Setzen wir alſo in der Formel für das Biegungsmoment ſtatt $\frac{E}{r}, \frac{T}{e}$ ein, ſo giebt uns dieſelbe das ſtatiſche Moment der Tragkraft. Es iſt $Px = SW = \frac{EW}{r}$, alſo auch $Px = \frac{TW}{e}$. Man ſieht, daß dieſes Moment am größten iſt, wenn der Hebelarm $x = l$ ausfällt, und folgert hieraus, daß an der Stelle, wo der Balken an einem Ende feſtgehalten wird, die größte Biegung vorhanden iſt, und die Elaſticitätsgrenze zuerſt erreicht wird. Dieſemnach beſtimmt ſich denn die Tragkraft eines Balkens durch die Formel

$$P = \frac{TW}{el}.$$

Ebenſo beſtimmt ſich die Feſtigkeit oder die Kraft zum Abbrechen des Balkens. Iſt eine Faſer bis zum Zerreißen geſpannt, ſo tritt auch das Abbrechen des ganzen Balkens ein, weil nun der Balken einen um den Faſerquerſchnitt kleineren Querſchnitt erhält, deshalb eine größere Biegung eintritt, und nun auch ein Zerreißen der folgenden Faſer oder Faſernſchichten nachfolgt. Iſt wieder der Feſtigkeitsmodul $= K$, ſo bleibt auch $\frac{E}{r} = \frac{K}{e}$ und deshalb wieder die Kraft zum Abbrechen eines Balkens:

$$P = \frac{KW}{el}.$$

Bei einem maſſiven parallelepipediſchen Balken iſt die Entfernung der äußerſten Faſernſchicht von der neutralen Axe $= \frac{h}{2}$, daher giebt die Formel

$Pl = \frac{E}{r} \cdot \frac{bh^3}{12}$ (§. 191) die Kraft zum Abbrechen Relative Feſtigkeit

$$P = \frac{2K}{h} \cdot \frac{bh^3}{12l} = \frac{bh^2}{6l} \cdot K.$$

Iſt der Balken hohl, wie Fig. 266, ſo hat man $P = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{6hl} \cdot K$, auch gilt dieſe Formel für einen an den Seiten ausgehöhlten Körper, wie Fig. 267.

Beim prismatiſchen Körper mit triangulärem Querſchnitte, wie Fig. 264, iſt $e = \frac{2}{3}h$, daher $P = \frac{K}{\frac{2}{3}h} \cdot \frac{bh^3}{36l} = \frac{bh^2}{24l} \cdot K$. Bei gleichem Querſchnitte trägt hiernach der parallelepipediſche Balken zweimal ſo viel als der triangulare.

Für einen Cylinder vom Halbmeſſer r iſt $e = r$, daher $Pl = \frac{K}{r} \cdot \frac{\pi}{4} r^4$

$= \frac{\pi}{4} r^3 K$. Iſt der Cylinder hohl, ſo hat man $Pl = \frac{\pi}{4}\left(\frac{r_1^4 - r_2^4}{r}\right) K$.

Vertauſcht man den Feſtigkeitsmodul durch den Tragmodul T oder führt man für K einen aliquoten Theil, z. B. $\frac{1}{10}$ ein, ſo beſtimmt ſich durch die jetzt gefundenen Formeln auch die Tragkraft.

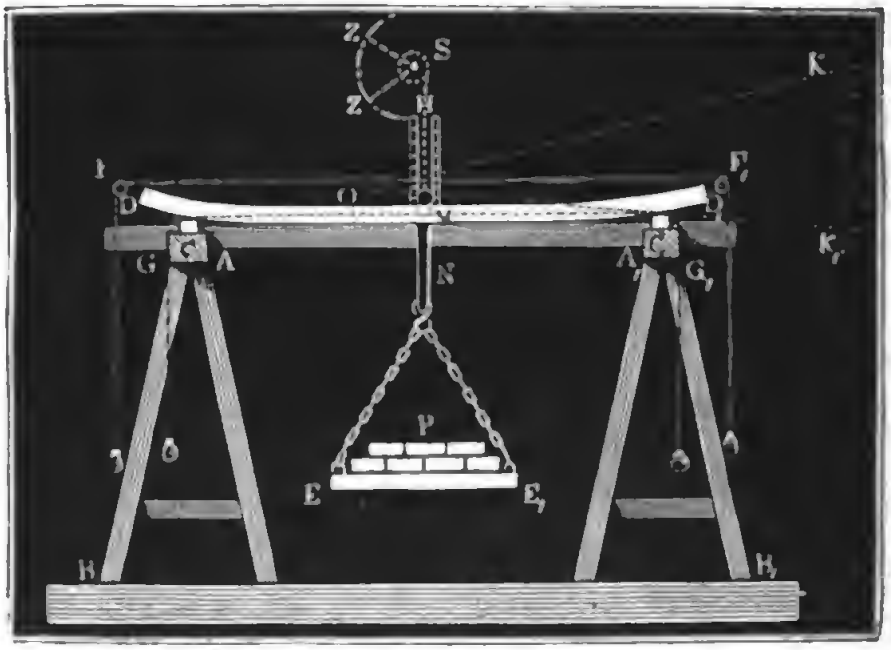
§. 201. Um die Biegung und Tragkraft der Balken zu finden, kann man die in §. 189 mitgetheilten Erfahrungswerthe für E und T benutzen; was aber die Feſtigkeit der Balken anlangt, ſo iſt es ſicherer, den dort angegebenen, durch Zerreißungsverſuche gefundenen Feſtigkeitsmodul K durch diejenigen Werthe von K_1 zu erſetzen, welche bei Zerbrechungsverſuchen gefunden worden ſind. Daß zwiſchen dieſen auf zweierlei Wegen gefundenen Moduln eine vollkommene Uebereinſtimmung nicht ſtattfinden kann, liegt ſchon darin, daß beim Zerbrechen nicht nur ein Ausdehnen, ſondern auch ein Comprimiren, und beides nicht allein in der Axenrichtung, ſondern auch im Querſchnitte, wenn auch hier nicht in ſo großem Maaße, ſtattfindet. Uebrigens wirken auf die Elaſticität, Tragkraft und Feſtigkeit der Körper vielerlei Umſtände ein, weshalb immer beträchtliche Abweichungen in den Ergebniſſen ſich herausſtellen. So iſt z. B. das Holz am Kerne und an der Wurzel ſtärker als am Splint und an dem Gipfel; auch trägt das Holz mehr, wenn die Kraft parallel zu den Jahresringen wirkt als winkelrecht darauf, endlich haben noch der Erdboden und die Lage des Ortes, wo das Holz gewachſen iſt, Temperatur, Zuſtand der Trockenheit, Alter u. ſ. w. Einfluß auf den Widerſtand der Hölzer. Uebrigens fällt die Biegung, welche ein Körper, nachdem er längere Zeit belaſtet geweſen iſt, immer etwas größer aus, als die Biegung, welche gleich anfangs beim Auflegen der Laſt eintritt. Verſuche.

Digitized by Google

Verſuche

Die Verſuche über die Elaſticität und Feſtigkeit wurden von Eytelwein und von Gerſtner mit einem in Fig. 271 abgebildeten Apparate

Fig. 271.



angeſtellt. AB und A_1B_1 ſind zwei Rüſtböcke, C und C_1 darauf befeſtigte Eiſenlager, DD_1 der darüber liegende, zur Unterſuchung beſtimmte parallelepipediſche Körper. Die Laſt P zum Biegen des Körpers liegt auf einer Waagſchale EE_1, die an einem Bügel MN hängt, deſſen oberer und abgerundeter Theil in der Mitte M des Balkens aufliegt. Um die einer Belaſtung P entſprechende Biegung a zu finden, wendete Eytelwein zwei feine Horizontalfäden FF_1 und GG_1, ſowie eine in der Mitte auf dem Balken aufſitzende Scala MH an. Gerſtner hingegen bediente ſich eines langen einarmigen Fühlhebels OK, der nahe bei ſeinem Drehpunkte in M auflag und mit ſeinem Ende, wie der Zeiger einer Uhr, an einer vertikalen Scala KK_1 die Senkung von M verfünfzehnfacht angab. Lagerhjelm wendete einen Zeiger SZ an, der mittels eines Fadens MS und einer Rolle S in Bewegung geſetzt wurde, und die Biegung des Balkens auf einer eingetheilten Kreisſcheibe vergrößert angab.

§. 202. Wenn man in der §. 196 entwickelten Formel

$$E = \frac{Pl^3}{48Wa} = \frac{Pl^3}{4abh^3}$$

für den Elaſticitätsmodul eines parallelepipediſchen Balkens die durch Biegungsverſuche mittels des im vorigen Paragraphen beſchriebenen Apparates gefundene Bogenhöhe a, die entſprechende Laſt P und die Dimenſionen b, h und l des Balkens ſubſtituirt, ſo erhält man dadurch neue Werthe

für die Elaſticitätsmodul. Bedient man ſich bei dieſen Verſuchen nicht ſehr dicker, ſondern mehr langer und dünner Körper, und wendet man mäßige, nur kleine Biegungen hervorbringende Belaſtungen an, ſo findet zwiſchen dieſen Werthen und denjenigen, welche die direkten Ausdehnungsverſuche geben, eine ziemliche Uebereinſtimmung Statt. So fand z. B. auf dieſem Wege: Verſuche.

Duleau für Schmiedeeiſen: $E = 29'000000$ Pf.,

Tredgold, ſowie auch Hodgkinſon für Gußeiſen: $E = 18'000000$ Pf.,

Barlow und andere für Holz im Mittel: $E = 1'500000$ Pf.

Werden aber die prismatiſchen Körper ſtärkeren Biegungen unterworfen, und wohl gar bis zum Zerbrechen gebogen, ſo ſtellt ſich, zumal nach den neueſten Verſuchen von Hodgkinſon, ein großer Unterſchied heraus. Der Grund dieſer Abweichung liegt aber darin, daß bei dem Biegen nicht eine bloße Ausdehnung der Faſern vorkommt, ſondern ein Theil des Körpers ausgedehnt und ein Theil comprimirt wird. Wenn daher bei größeren Formveränderungen der Widerſtand gegen die Ausdehnung ein anderer iſt, als der gegen die Zuſammendrückung, alſo der erſteren Veränderung ein anderer Elaſticitätsmodul zukommt als der letzteren, ſo muß der durch die Biegungsverſuche erhaltene Elaſticitätsmodul ein Mittel von den jener Module, und daher von dem Modul der einfachen Ausdehnung verſchieden ſein. Es hat ſich ergeben, daß Holz der Ausdehnung mehr widerſteht als der Zuſammendrückung, und daß bei Steinen und beim Gußeiſen das Gegentheil Statt hat. Die Verſuche mit prismatiſchen Körpern von T förmigen Querſchnitten, wie ſie zumal von Hodgkinſon angeſtellt worden ſind, geben hierbei das beſte Anhalten. Da beim Auflegen eines ſolchen Körpers auf zwei Stützen und beim Belaſten deſſelben in der Mitte, der untere Theil deſſelben ausgedehnt und der obere zuſammengedrückt wird, ſo folgt, daß das Holz bei dieſer Lage (T), dagegen das Gußeiſen bei dieſer Lage (I) des Querſchnittes den verhältnißmäßig größern Widerſtand leiſtet. So fand z B. Hodgkinſon, daß ein ſolcher Gußeiſenbarren in der letzteren Lage viermal ſo viel Kraft zum Zerbrechen erforderte als in der erſteren.

Anmerkung. Es iſt anzunehmen, daß eine Abweichung zwiſchen den Elaſticitätsmoduln der Ausdehnung und Zuſammendrückung eintritt, und daher die neutrale Are aus dem Schwerpunkte herauszutreten anfängt, wenn die Verlängerung oder Verkürzung beträgt:

für Holz, nach Ardant: 0,00117,
für Schmiedeeiſen, nach Duleau: 0,0006,
für Gußeiſen, nach Hodgkinſon: 0,0003.

§. 203. Folgende Tabelle enthält die Mittelwerthe der Brechungsmodul K_1 für einige in der Technik am häufigſten vorkommenden Körper. Um mit Hilfe derſelben die Kräfte zu finden, welche Körper auf längere Modul der relativen Feſtigkeit.

Modul der relativen Feſtigkeit.

Dauer mit Sicherheit tragen können, hat man für Holz den zehnten und für Metalle und Steine den dritten bis vierten Theil von K_1 einzuſetzen. Für Maſchinentheile, welche einer immerwährenden Bewegung ausgeſetzt ſind, hat man noch mehr Sicherheit nöthig, und daher K_1 noch kleiner anzunehmen.

Tabelle II.

Die Brechungsmodul oder Feſtigkeitsmodul bei Biegung der Körper.

Namen der Körper.	Brechungsmodul K.	Namen der Körper.	Brechungsmodul K.
Buchenholz . . .	10000 bis 24000	Ulmenholz . . .	6000 bis 12000
Eichenholz . . .	8000 " 24000	Gußeiſen . . .	24000 " 56000
Fichtenholz . . .	8000 " 13000	Kalkſtein . . .	700 " 1700
Kieſernholz . .	7000 " 17000	Sandſtein . . .	600 " 800
Tannenholz . . .	7000 " 14000	Ziegelſtein . . .	180 " 340

Hiernach kann man für Holz im Mittel $K = 12000$ und für Gußeiſen $K = 40000$ Pfund annehmen und bekommt ſo für den an einem Ende eingemauerten und am andern Ende belaſteten parallelepipediſchen Balken:

1) $Pl = 200 \, . \, bh^2$, wenn derſelbe aus Holz beſteht und zehnfache Sicherheit angenommen,
2) $Pl = 1700 \, . \, bh^2$, wenn derſelbe aus Gußeiſen beſteht und vierfache Sicherheit vorausgeſetzt wird

Iſt der Körper cylindriſch, ſo hat man für Holz

3) $Pl = 950 \, r^3$, und für Gußeiſen
4) $Pl = 8000 \, r^3$.

P, l, b, h und r haben die ſeither gebrauchten Bedeutungen.

Für Schmiedeeiſen nimmt man K_1 20 Procent kleiner an, weil ſich dieſes mehr biegt als Gußeiſen; es iſt deshalb hier $Pl = 1400 \, bh^2 = 6400 \, . \, r^3$ zu ſetzen.

Iſt die Laſt Q gleichförmig auf den Balken vertheilt, ſo trägt der Balken noch einmal ſo viel, weshalb die obigen Coefficienten zu verdoppeln ſind. Ruht der Balken an den Enden oder in Stützpunkten auf, deren Entfernung l iſt, und wirkt die Laſt P in der Mitte zwiſchen dieſen Punkten, ſo iſt ſtatt P, $\frac{P}{2}$ und ſtatt l, $\frac{l}{2}$ einzuſetzen, weshalb Pl in $\frac{Pl}{4}$ übergeht und die Tragkraft die vierfache wird. Iſt aber die Laſt Q zwiſchen den Stützpunkten auf den Balken gleichförmig vertheilt, ſo hat

man für die Kraft $\frac{Q}{2}$, welche in einem Stützpunkte von unten nach oben wirkt, das Moment $\frac{Q}{2}.\frac{l}{2}$ und für die Gegenkraft $-\frac{Q}{2}$, als die in ihrem Schwerpunkte niederziehende Hälfte der Last, das Moment $-\frac{Q}{2}.\frac{1}{2}.\frac{l}{2}$ $=-\frac{Ql}{8}$; es bleibt daher als Kraft zum Brechen in der Mitte das Moment $\frac{Ql}{4}-\frac{Ql}{8}=\frac{Ql}{8}$, und es ist deshalb

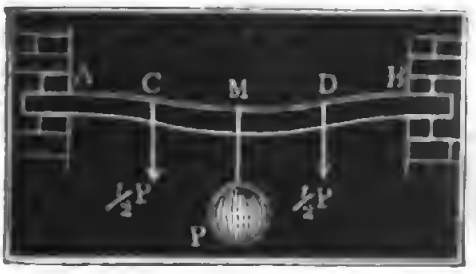
Modul der relativen Festigkeit.

$Ql=8.\frac{bh^2}{6}K$ auch $=8.\frac{\pi}{4}br^3K$, also die Festigkeit oder Tragkraft doppelt so groß, als wenn die Last in der Mitte wirkt, und 8mal so groß, als wenn sie an einem Ende niederzieht, während das andere Ende festgehalten wird.

Beispiele. 1) Ein parallelepipedischer Balken aus Fichtenholz von 7 Zoll Dicke und 9 Zoll Höhe soll mit beiden Enden aufruhen, so daß die Entfernung der Stützpunkte 20 Fuß beträgt. Welche in der Mitte aufzuhängende Last kann derselbe tragen? Es ist $b=7$, $h=9$, $l=20$ Fuß $=240$ Zoll, daher $240.P=4.200.7.9^2$, folglich diese Last $P=70.27=1890$ Pf. 2) Eine runde hölzerne Wasserradwelle von 10 Fuß Länge soll in dem Rade sammt eigenem Gewichte die ziemlich gleichförmig vertheilte Last $Q=10000$ Pf. tragen. Wie stark muß dieselbe ausgewählt werden? Es ist $Ql=10000.120=1200000$, $=8.950.r^3$, oder $r^3=\frac{1200000}{8.950}=157{,}9$, daher ist der gesuchte Halbmesser $r=\sqrt[3]{157{,}9}=5{,}4$ Zoll und die Wellenstärke $2r=10{,}8$ Zoll, wofür 1 Fuß angenommen werden kann.

§. 204. Ist ein Balken AB, Fig. 272, mit den Enden eingemauert, oder werden die Enden desselben festgehalten, so trägt der Balken noch einmal so viel, als wenn er in den Endpunkten frei aufliegt, denn in diesem Falle ist die größte Biegung nicht nur in der Mitte, sondern auch in den Enden, es zerbricht deshalb der Balken in der Mitte und an den Enden zugleich, während in den Zwischenpunkten C und D, wo Convexität in Concavität übergeht, gar keine Biegung eintritt. Es ist folglich für ein

Fig. 272.



Stück AC die Kraft $=\frac{P}{2}$, der Hebelarm $=\frac{l}{4}$ und das Moment $=\frac{P}{2}.\frac{l}{4}=\frac{Pl}{8}$. Ist endlich auch in diesem letzten Falle die Last Q gleichförmig auf den Balken ver-

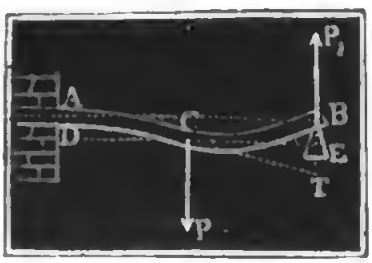
Modul der relativen Feſtigkeit.

theilt, ſo ſtellt ſich das Moment $\frac{Q\,l}{16}$ heraus, weil ſich annehmen läßt, daß die eine Hälfte von Q von den Stützpunkten unmittelbar aufgenommen wird, und nur die andere Hälfte in der Mitte von Q wirkt.

Das Gewicht G eines Balkens wirkt genau ſo, wie eine auf den Balken gleichförmig vertheilte Laſt Q; für einen mit einem Ende befeſtigten Balken iſt daher das Kraftmoment $= Pl + \frac{1}{2}Gl$; für einen an beiden Enden aufliegenden und in der Mitte belaſteten Balken iſt es aber $= \frac{P}{2}\cdot\frac{l}{2} + \frac{G}{2}\cdot\frac{l}{2} - \frac{G}{2}\cdot\frac{l}{4} = (P+\frac{1}{2}G)\frac{l}{4}$, u. ſ. w.

*) Iſt der Balken AB, Fig. 273, nur an einem Ende A eingemauert, während er am anderen Ende B frei aufliegt, ſo bildet ſeine neutrale Axe eine elaſtiſche Linie, welche bei A horizontal, in der Mitte, wo das Gewicht P hängt, abwärts, und am Ende B aufwärts läuft. Um denjenigen Theil P_1 von P zu finden, welchen die Stütze E aufnimmt, ſetzen wir die Bogenhöhe BT der zweiten Hälfte CB des Balkens gleich der Bogenhöhe $AD = BE$ der erſten Hälfte AC plus der Tangentenhöhe oder Vertikalprojection TE der Tangente CT. Nach §. 192 iſt, wenn man die ganze Balkenlänge $= l$, alſo $CA = CB = \frac{1}{2}l$ ſetzt,

Fig. 273.



$$BT = \frac{P_1 l^3}{24\,WE}.$$

Der Tangentenwinkel $TCE = \alpha$ ergiebt ſich aus der bekannten Grundgleichung $Mr = WE$, oder einfacher $M\,dx = -\,WE\,d\alpha$ ſehr leicht, wenn man für das Moment M die Summe $Px - P_1\left(\frac{l}{2} + x\right)$ ſubſtituirt. Es folgt dann

$$\left[Px - P_1\left(\frac{l}{2} + x\right)\right] dx = -\,WE\,d\alpha,$$

und daher durch Integriren:

$$\frac{Px^2}{2} - P_1\left(\frac{lx}{2} + \frac{x^2}{2}\right) = Con. - WE\alpha.$$

Da für $x = \frac{1}{2}l$, $\alpha = 0$ iſt, ſo folgt $Con. = \frac{Pl^2}{8} - \frac{3Pl_1^2}{8}$, und

$$\frac{P}{2}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) - \frac{P_1}{2}\left(\tfrac{3}{4}l^2 - lx - x^2\right) = WE\alpha.$$

Nimmt man $x = 0$, ſo erhält man für den Tangentenwinkel α des Mittelpunktes C:

$$\frac{Pl^2}{8} - \frac{3P_1l^2}{8} = WE\alpha, \text{ also}$$ Tragkraft der Balken

$$\alpha = \frac{Pl^2 - 3P_1l^2}{8WE};$$

und hieraus ergiebt sich die Vertikalprojection der Tangente CT:

$$ET = CT \,.\, \alpha = \tfrac{1}{2} l\alpha = \frac{(P - 3P_1)l^3}{16WE}.$$

Für eine Ordinate des Bogenstückes AC hat man

$$dy = \alpha\, dx = \frac{P(\tfrac{1}{4}l^2 - x^2) - P_1(\tfrac{3}{4}l^2 - lx - x^2)}{2WE}\, dx, \text{ oder}$$

$$y = \frac{P(\tfrac{1}{4}l^2x - \tfrac{1}{3}x^3) - P_1(\tfrac{3}{4}l^2x - \tfrac{1}{2}lx^2 - \tfrac{1}{3}x^3)}{2WE};$$

nimmt man $x = \frac{1}{2}l$, so folgt daher die Bogenhöhe

$$BE = AD = \frac{(P - \frac{5}{2}P_1)l^3}{24WE}.$$

Endlich diese Werthe für BT, ET und BE in die Formel

$$BT = BE + ET \text{ eingesetzt,}$$

so erhält man die Gleichung

$$\frac{P_1}{24} = \frac{P - \frac{5}{2}P_1}{24} + \frac{P - 3P_1}{16}, \text{ oder}$$

$$2P_1 = 2P - 5P_1 + 3P - 9P_1, \text{ d. i. } 16P_1 = 5P,$$

und sonach ist der Druck im Stützpunkte B:

$$P_1 = \tfrac{5}{16}P,$$

d. i. $\frac{5}{16}$ der in der Mitte wirkenden Last. Für das Abbrechen in C hat man nun das Moment $\frac{1}{2}P_1l = \frac{5}{32}Pl$, dagegen für das in A:

$$\tfrac{1}{2}Pl - P_1l = \tfrac{1}{2}Pl - \tfrac{5}{16}Pl = \tfrac{3}{16}Pl = \tfrac{6}{32}Pl.$$

Da dieser Werth der kleinere ist, so wird demnach ein Zerbrechen in A eher eintreten als in der Mitte. Wäre B frei und hinge die Last P an diesem Ende B, so würde das Moment zum Abbrechen $= Pl = \frac{32}{32}Pl$, d. i. $\frac{32}{6} = \frac{16}{3}$ mal so groß sein. Es trägt also hiernach der Balken in dem behandelten Falle $\frac{3}{16}$ mal so viel, als wenn er an einem Ende befestigt ist, oder $4 \,.\, \frac{3}{16} = \frac{3}{4}$ mal so viel, als wenn er an beiden Enden aufhängt.

Beispiel. Wie hoch läßt sich in einem Getreidemagazine das Korn aufschütten, wenn der Boden auf Balken von 25 Fuß Länge, 10 Zoll Breite und 12 Zoll Höhe ruht, die Entfernung zwischen den Axen von je zwei Balken $= 3$ Fuß beträgt und 1 Cubikfuß Kornmasse 48,5 Pfund wiegt? Wenden wir die Formel $Ql = 16.200.bh^2$ an, so müssen wir setzen: $b = 10$, $h = 12$, $l = 25.12 = 300$, folglich $Q = \frac{16.200.10.144}{300} = 15360$ Pfund. Nun wiegt aber ein Parallelepiped von 25 Fuß Länge, 3 Fuß Breite und x Fuß Höhe $= 25.3.x.48{,}5$ Pf.; setzen wir daher diesen Werth $= Q$, so folgt $x = \frac{15360}{75.48{,}5} = 4{,}22$ Fuß die fragliche Höhe der Aufschüttung.

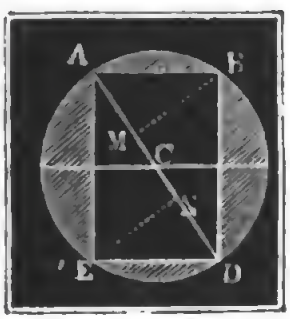
Stärkſter Balken.

§. 205. Körper von gleichem Querſchnitte haben oft ſehr verſchiedene relative Feſtigkeiten, die Formel $Pl = \frac{K}{6} . bh^2$ zeigt, daß die Feſtigkeit wie die Breite, wie das Quadrat der Höhe und umgekehrt wie die Länge des Balkens wächſt. Hiernach hat alſo die Höhe einen viel größeren Einfluß auf die Haltbarkeit als die Breite; der doppelt ſo breite Balken trägt doppelt, d. i. ſo viel, wie zwei einfache Balken, der doppelt ſo hohe Balken hingegen trägt das Vierfache des einfach hohen Balkens. Aus dieſem Grunde macht man die Balken, namentlich, wenn ſie aus Eiſen gegoſſen werden, viel höher als breit, höhlt ſie in der Nähe der Mitte aus und erſetzt das Ausgenommene durch Theile in größerer Entfernung von der neutralen Axe, beſonders aber iſt die Regel zu befolgen, die Balken ſtets mit der ſchmalen Seite aufzulegen, oder vielmehr ſo zu legen, daß die Kraft in der Richtung der längeren Seite wirkt.

Die Feſtigkeit des runden Stammes oder eines andern cylindriſchen Körpers iſt $P = \frac{\pi}{4} . \frac{r^3}{l} K$, die eines quadratiſchen mit gleicher Breite $2r$ und Höhe $2r$, $= P_1 = \frac{2r . (2r)^2}{l} . \frac{K}{6} = \frac{4}{3} . \frac{r^3}{l} K$; vergleicht man beide Kräfte mit einander, ſo ergiebt ſich $\frac{P}{P_1} = \frac{\pi}{4} . \frac{3}{4} = 0{,}588$; es hat alſo der cylindriſche Körper circa nur 59 Procent Feſtigkeit gegen den ihn einſchließenden Balken mit quadratiſchem Querſchnitte. Die hölzernen Balken werden aus runden Baumſtämmen gehauen oder geſchnitten und eben dadurch geſchwächt. Es iſt nun aber die Frage: welcher iſt von allen Balken, die ſich aus dem cylindriſchen Stamme hauen laſſen, der haltbarſte?

Es ſei $ABDE$, Fig. 274, der Querſchnitt des Stammes, $AD = d$ der Durchmeſſer deſſelben, ferner $AB = DE = b$ die Breite und $AE = BD = h$ die Höhe des Balkens. Dann iſt $b^2 + h^2 = d^2$, oder $h^2 = d^2 - b^2$, und das Brechungsmoment $Pl = \frac{K}{6} . bh^2 = \frac{K}{6} b (d^2 - b^2)$. Es kommt nun darauf an, $b (d^2 - b^2) = bd^2 - b^3$ ſo groß wie möglich zu machen. Setzen wir ſtatt b, $b \pm x$, wo x ſehr klein iſt, ſo bekommen wir für den letzten Ausdruck $(b \pm x) d^2 - (b \pm x)^3 = bd^2 - b^3 \pm (d^2 - 3b^2) x - 3bx^2$, inſofern wir x^3 vernachläſſigen, und die Differenz beider $= \mp (d^2 - 3b^2) x + 3bx^2$.

Fig. 274.



Damit der erſte Werth $b d^2 - b^3$ in jedem Falle größer ausfällt als der letzte, muß die Differenz $\mp (d^2 - 3b^2) x + 3 b x^2$ poſitiv ſein, man mag b um x größer oder um x kleiner nehmen. Dies iſt aber nur möglich, wenn $d^2 - 3b^2 = 0$ wird, denn dann iſt die Differenz $= 3 b x^2$, alſo poſitiv, wogegen, wenn $d^2 - 3b^2$ ein poſitiver oder negativer reeller Werth iſt, $3 b x^2$ vernachläſſigt werden kann, und jene Differenz $= \mp (d^2 - 3b^2) x$, d. i. mit x gleichbezeichnet, alſo bald negativ, bald poſitiv ausfällt. Setzen wir aber $d^2 - 3b^2 = 0$, ſo bekommen wir die geſuchte Breite $b = d\sqrt{1/3}$ und die entſprechende Höhe $h = \sqrt{d^2 - b^2} = d\sqrt{2/3}$; alſo das Verhältniß der Höhe zur Breite: $\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} = 1{,}414$ oder ungefähr wie $7/5$. Stärkſter Balken.

Man ſoll alſo den Baumſtamm ſo zimmern, daß ein Balken hervorgeht, deſſen Höhe zur Breite ſich wie 7 zu 5 verhält. Um den der größten Feſtigkeit entſprechenden Querſchnitt zu finden, theilen wir den Durchmeſſer AD in drei gleiche Theile, errichten in den Theilpunkten M und N Perpendikel MB und NE, und verbinden die ſich ergebenden Durchſchnittspunkte B und E im Kreiſe mit den Endpunkten A und D durch gerade Linien. $ABDE$ iſt endlich der Querſchnitt des größten Widerſtandes, denn da $AM : AB = AB : AD$ und $AN : AE = AE : AD$, ſo iſt $AB = b = \sqrt{AM \,.\, AD} = \sqrt{1/3\, d \,.\, d} = d\sqrt{1/3}$ und $AE = h = \sqrt{AN \,.\, AD} = \sqrt{2/3\, d \,.\, d} = d\sqrt{2/3}$, alſo $\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{2}}{1}$, wie auch wirklich verlangt wird.

Anmerkung. Der Baumſtamm hat das Brechungsmoment $Pl = \frac{\pi K}{4} \,.\, r^3$, der daraus gezimmerte Balken von größtem Widerſtande aber $Pl = \frac{K}{6}\, d\sqrt{1/3} \,.\, 2/3\, d^2 = \frac{K}{\sqrt{243}} \,.\, d^3 = \frac{8K}{\sqrt{243}}\, r^3$, es verliert folglich der Stamm durch das Beſchlagen um $1 - \frac{8}{\sqrt{243}} \,.\, \frac{4}{\pi} = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$, d. i. 35 Procent von ſeiner Feſtigkeit. Um dieſen Verluſt zu mäßigen, behaut man den Stamm oft nicht ganz vierkantig, ſondern läßt ihn noch mit abgeſtumpften Kanten. Ein aus demſelben Stamme gezimmerter Balken mit quadratiſchem Querſchnitte hat das Moment $Pl = \frac{K}{6} \,.\, d\sqrt{1/2} \,.\, \frac{d^2}{2}$, weil hier Breite = Höhe $= d\sqrt{1/2} = 0{,}707\, d$ iſt, daher fällt hier jener Verluſt gar $= 1 - \frac{8}{6 \,.\, 2\sqrt{2}} \,.\, \frac{4}{\pi} = 1 - \frac{8}{3\pi\sqrt{2}} = 1 - 0{,}60 = 0{,}40$, d. i. 40 Procent aus.

§. 206. Sehr häufig werden Körper mit inneren oder äußeren Höhlungen oder mit Rippen oder Federn angewendet, um an Material zu Hohl- und elliptiſche Balken.

Hohle und elliptiſche Balken.

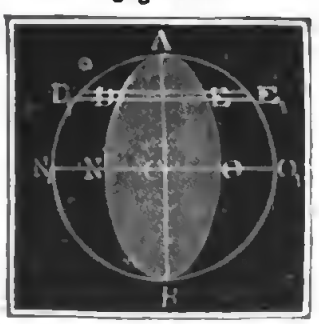
erſparen oder, was am Ende auf eins hinauskommt, um an Feſtigkeit zu gewinnen. Für einen hohlen parallelepipediſchen Balken aus Eiſen iſt $P = 1700 \cdot \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{lh}$, mag die Höhlung von der Höhe h_1 und Breite b_1 im Innern oder äußerlich an den Seiten angebracht ſein. Für den hohlen cylindriſchen Körper iſt $P = 8000 \cdot \frac{r_1^4 - r_2^4}{lr_1}$. Gewöhnlich macht man in ſolchen Fällen die Dicke des maſſiven Theiles $r_1 - r_2 = {}^2/_5$ des äußeren Halbmeſſers r_1, weshalb folgt:

$$P = 8000 \cdot \frac{r_1^4 - (0{,}6r_1)^4}{lr_1} = 8000 \cdot \frac{0{,}8704 r_1^3}{l} = 6963 \frac{r_1^3}{l}.$$

Ein gleich ſchwerer maſſiver Cylinder hat den Halbmeſſer $r = \sqrt{r_1^2 - r_2^2} = \sqrt{r_1^2 - 0{,}36r_1^2} = 0{,}8r_1$; daher iſt ſein Widerſtandsmoment $= 8000 \cdot (0{,}8r)^3 = 4096 r^3$, um beinahe 41 Procent kleiner als das des hohlen Cylinders.

Man gewinnt auch an Feſtigkeit, wenn man ſtatt der Cylinder prismatiſche Körper mit elliptiſchen Querſchnitten anwendet und dabei die große Axe aufrecht oder parallel zur Kraftrichtung ſtellt. Denkt man ſich um dieſen elliptiſchen Querſchnitt $AOBN$, Fig. 275, einen Kreis AO_1BN_1 gelegt, deſſen Halbmeſſer der großen Halbaxe $CA = CB = a$ iſt, ſo läßt ſich der Feſtigkeitswiderſtand des Körpers mit elliptiſchem Querſchnitte einfach aus dem mit kreisförmigem Querſchnitte berechnen. Die Länge eines jeden Elementes DE der Ellipſe parallel zur kleinen Axe $NO = 2b$ iſt ſtets $\frac{b}{a}$ der Länge des Kreiselementes D_1E_1; nun ſind aber die Elaſticität und Feſtigkeit dieſer Dimenſion einfach proportional, es verhält ſich alſo auch die Feſtigkeit des Ellipſenelementes zu der des Kreiselementes, wie b zu a, und es iſt endlich die Feſtigkeit für die ganze Ellipſe $= \frac{b}{a}$ mal Feſtigkeit des ganzen Kreiſes, d. i.

Fig. 275.



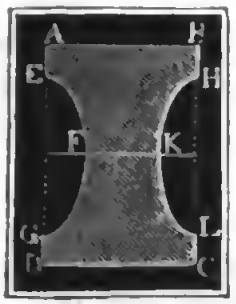
$$Pl = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b}{a} \cdot a^3 K = \frac{\pi}{4} b a^2 K, \text{ für Gußeiſen} = 8000 a^2 b.$$

Iſt nun noch eine elliptiſche Höhlung mit den Halbaxen a_1 und b_1 vorhanden, ſo bleibt

$$Pl = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{ba^3 - b_1a_1^3}{a} K, \text{ für Gußeiſen}$$

$$= 8000 \cdot \frac{a^3b - a_1^3b_1}{a}.$$

Fig. 276.



Hohle und elliptische Balken.

Ist endlich ein Körper mit rectangulärem Querprofile $ABCD = bh$, Fig. 276, in den Flanken durch halbe Ellipsen, wie EFG, HKL ausgenommen, und sind die Halbaxen dieser halben Ellipsen $= a_1$ und b_1, so hat man

$$Pl = bh^2 \frac{K}{6} - \frac{\pi b_1 a_1^3}{4} K = \frac{2bh^3 - 3\pi b_1 a_1^3}{12h} \cdot K,$$

für Gußeisen

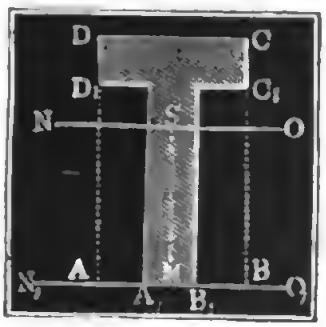
$$Pl = 1700 \cdot \frac{bh^3 - 4{,}712\, a_1^3 b_1}{h}.$$

Beispiele. 1) Ein Tragbalken aus Eichenholz von 9 Zoll Breite und 11 Zoll Höhe, welcher seither hinreichende Tragkraft gewährt hat, soll durch einen hohlen gußeisernen Balken von 5 Zoll äußerer Breite und 10 Zoll Höhe ersetzt werden, von welcher Eisenstärke wird man denselben gießen lassen müssen? Setzt man die doppelte Stärke $= x$, so hat man die Breite der Höhlung $= 5 - x$, und die Höhe derselben $10 - x$, folglich ist für den hohlen Balken $b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3 = 5 \cdot 10^3 - (5-x)(10-x)^3 = 2500\, x - 450\, x^2 + 35\, x^3 - x^4$. Da für den massiven hölzernen Balken das Widerstandsmoment $= 200 \cdot 9 \cdot 11^2 = 217800$ ist, so hat man zu setzen: $\frac{1700}{10}(2500\, x - 450\, x^2 + 35\, x^3 - x^4) = 217800$, oder $2500\, x - 450\, x^2 + 35\, x^3 - x^4 = 1281$. Zunächst ist annähernd $x = \frac{1281}{2500} = 0{,}5$ Zoll. Dieser Werth giebt aber $450 \cdot x^2 = 450 \cdot 0{,}25 = 112{,}5$; $35\, x^3 = 4{,}4$, $x^4 = 0.1$; daher läßt sich setzen:

$$x = \frac{1281 + 112{,}5 - 4{,}4 + 0.1}{2500} = \frac{1389{,}2}{2500} = 0{,}56 \text{ Zoll},$$

also die gesuchte Eisendicke $\frac{x}{2} = 0{,}28$ Zoll. 2) Wenn bei einer T förmigen Schiene aus Gußeisen die Breite $AB = CD = b$ gleich der Höhe h und die Dicke $A_1 B_1 = CC_1 = \frac{1}{5} b$, also $b_1 = \frac{4}{5} b$ und $h_1 = \frac{4}{5} h$ ist, so hat man für deren Widerstandsmoment (§. 197):

Fig. 277.



$$Pl = \frac{K}{12} \cdot \frac{(bh^3 - b_1 h_1^3)^2 - 4bhb_1 h_1 (h - h_1)^2}{(bh - b_1 h_1)e}$$ oder

$e = \frac{1}{2} \cdot \frac{bh^2 - b_1 h_1^2}{bh - b_1 h_1}$ substituirt,

$$Pl = \frac{K}{6} \cdot \frac{(bh^3 - b_1 h_1^3)^2 - 4bb_1 hh_1 (h - h_1)^2}{bh^2 - b_1 h_1^2} =$$

$$1000 \cdot \frac{(b^3 - 0{,}512\, b^3)^2 - 4 \cdot 0{,}64\, b^4 \cdot (b - 0.8\, b)^2}{b^3 - 0{,}512\, b^3} =$$

$$1700 \cdot \frac{0{,}2381 - 2{,}56 \cdot 0{,}04}{0.488} \cdot b^3 = \frac{230{,}5}{0{,}488} \cdot b^3 = 472 \cdot b^3.$$

Sollte nun eine solche Schiene bei einer Länge von 4 Fuß mit beiden Enden aufruhen und in der Mitte eine Last von 7400 Pf. tragen, so wäre $Pl = 7400 \cdot 4 \cdot 12 = 355200$ und daher $4 \cdot 472\, b^3 = 355200$ zu setzen, woraus denn die äußere Höhe und Breite $b = h = \sqrt[3]{\frac{355200}{1888}} = 5{,}73$ Zoll und die Eisendicke $\frac{1}{5} b = 1.15$ Zoll sich ergäbe. Diese Dimensionen sind nur mittlere, bei der Stellnng (T) müssen sie reichlich, bei der Stellung (I) aber knapp genommen werden (vergl. §. 202).

Schiefer Druck

§. 207. Wir haben ſeither angenommen, daß der Balken, welcher dem Biegen oder Brechen ausgeſetzt iſt, horizontal liege, und die Kraft vertikal wirke; es iſt jedoch leicht zu ermeſſen, daß die gefundenen Regeln und Formeln auch in allen den Fällen gültig ſind, wenn der Balken AB, Fig. 278, eine geneigte Lage gegen den Horizont hat, und die Kraft P

Fig. 278.

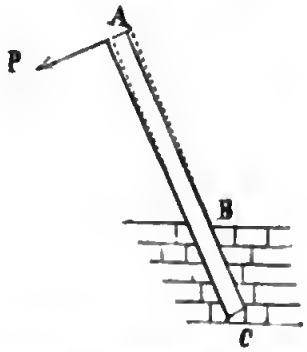
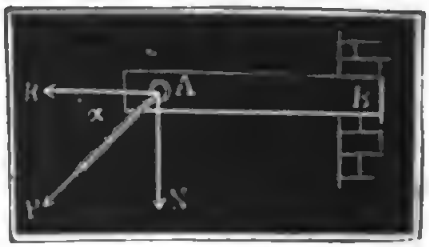


Fig. 279.



winkelrecht gegen ſeine Axe wirkt. Ganz anders iſt das Verhältniß dagegen, wenn die Kraft P, Fig. 279, den Balken AB ſchief zieht; hier hat man es mit der weiter unten zu behandelnden zuſammengeſetzten Feſtigkeit zu thun, da aus P zwei Seitenkräfte N und R hervorgehen, wovon die eine eine Biegung und die andere eine bloße Ausdehnung verurſacht. Wird eine der beiden Seitenkräfte von einem andern Körper aufgenommen, ſo bleibt natürlich die Theorie der einfachen Feſtigkeit ebenfalls in Anwendung. Trägt z. B. der ſchiefſtehende Stempel AB, Fig. 280, die über ihm aufgeſchüttete Laſt Q, ſo zerlegt ſich dieſe in die Seitenkräfte Q_1 und N, und es iſt bei einer Neigung α des Stempels gegen den Horizont, die Kraft Q_1, welche der Stempel aufnimmt $= Q \,.\, cos.\,\alpha$ und die Kraft N, welche die Seitenwand (das Liegende) BC aufnimmt $= Q\, sin.\,\alpha$. Mit Berückſichtigung der Reibung iſt

Fig. 280.

$$Q_1 = Q\,.\,(cos.\,\alpha - \varphi\, sin\,\alpha)$$

und daher bei einem runden Stempel:

$$Q\,(cos.\,\alpha - \varphi\, sin.\,\alpha) = 8\,.\,\frac{950\,r^3}{l},$$

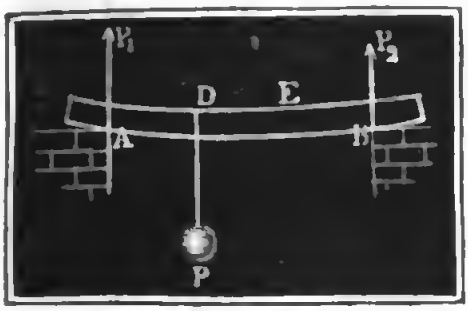
wenn r den Halbmeſſer und l die Länge des Stempels bezeichnet.

Beiſpiel. In welcher Entfernung von einander müſſen die 10 Zoll ſtarken Tragſtempel eines Förſtenbaues ASB, Fig. 280, von einander gelegt werden, wenn derſelbe $4\frac{1}{2}$ Fuß weit iſt und ſich 60 Fuß auf einem 70 Grad fallenden Gange in die Höhe zieht, das Gewicht eines Cubikfußes der abzuhaltenden Berge

65 Pf. beträgt, der Coefficient der Reibung auf dem Liegenden aber $\frac{1}{3}$ angenommen wird? Die gesuchte Entfernung zweier Stempel $= x$ Fuß gesetzt, ergiebt sich das über einem Stempel ruhende Gewicht $= 4{,}5 \cdot 60 \cdot 65\ x = 17550 . x$ Pf., und der Theorie der schiefen Ebene zufolge hat hiervon der Stempel nur die Kraft $Q_1 = (\sin. 70° - \frac{1}{3}\cos. 70) \cdot 17550\ x = (0{,}9397 - 0{,}1140) \cdot 17550\ x = 0{,}8257 \cdot 17550\ x = 14492\ x$ Pf. aufzunehmen. Der Stempel trägt aber $8 \cdot 950 \cdot \frac{r^3}{l} = 8 \cdot \frac{950 \cdot 5^3}{54} = 17592$, es ist daher zu setzen: $14492\ x = 17592$, und $x = \frac{17592}{14492} = 1{,}214$ Fuß $= 14{,}6$ Zoll. Man wird also hier zwischen je zwei Stempeln nur 4,6 Zoll Zwischenraum lassen dürfen. Schiefer Druck.

§. 208. Wirkt die Kraft P auf einen mit seinen Enden A und B aufliegenden Balken, Fig. 281, nicht in der Mitte, sondern steht der Angriffspunkt D um die Abstände $DA = l_1$ und $DB = l_2$ von den Stützpunkten ab, so besitzt der Balken eine größere Tragkraft. Der Gleichheit gewisser statischer Momente zufolge trägt der Stützpunkt A die Kraft $P_1 = \frac{l_2}{l_1 + l_2} P$, und der Stützpunkt B: $P_2 = \frac{l_1}{l_1 + l_2} P$, es ist daher das statische Moment zum Abbrechen in dem Angriffspunkte D, $= DA . P_1 = DB . P_2 = \frac{l_1 l_2 P}{l_1 + l_2}$. Für jeden andern Punkt E ist aber dieses Moment $EB . P_1$ kleiner, weil der Hebelarm EB kleiner als der Hebelarm $DB = l_2$ ist; es findet daher auch in D die größte Biegung statt und es tritt der Bruch in diesem Punkte zuerst ein. Diesemnach setzen wir $\frac{Pl_1 l_2}{l_1 + l_2} = \frac{KW}{e}$, oder, die ganze Länge $l_1 + l_2$ mit l bezeichnet, $\frac{Pl_1 l_2}{l} = \frac{K}{6} . bh^2$, wenn der Balken parallelepipedisch geformt ist. Die Kraft $P = \frac{K}{6} . \frac{l}{l_1 l_2} . bh^2$ ist übrigens $=$ Unendlich, wenn l_1 oder $l_2 =$ nahe Null ist; wird aber um so kleiner, je mehr sich l_1 und l_2 einander gleichkommen; ist endlich $l_1 = l_2$, d. h. wirkt die Kraft P in der Mitte des Balkens, so ist P ein Minimum, weil, wenn man $l_1 = \frac{l}{2} + x$ und $l_2 = \frac{l}{2} - x$ setzt, das den Nenner bildende Product $l_1 l_2 = \frac{l^2}{4} - x^2$ stets kleiner ausfällt, als $\frac{l^2}{4}$, man mag $\frac{l}{2}$ um etwas (x) größer oder kleiner annehmen. Belastung außerhalb der Mitte.

Fig. 281.

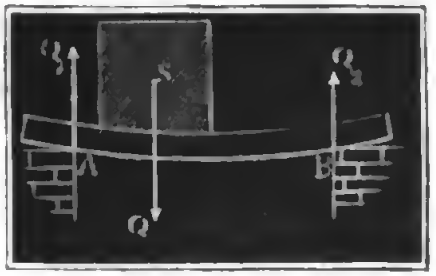


Belaſtung außerhalb der Mitte.

Es trägt alſo ein an den Enden unterſtützter Balken in der Mitte am wenigſten, und immer mehr und mehr, je näher die Laſt einem der Stützpunkte kommt.

Iſt eine Laſt Q über die Länge c gleichmäßig vertheilt, während die Mitte dieſer um l_1 und l_2 von den Stützpunkten A und B, Fig. 282, abſteht, ſo hat man als Brechungsmoment die Differenz $\frac{Q l_1 l_2}{l} - \frac{Q}{2} \cdot \frac{c}{4}$ anzunehmen, weil die Kraft $Q_1 = \frac{Q l_2}{l}$ am Hebelarm l_1 und ihr entgegen das halbe Gewicht $\frac{Q}{2}$ am Hebelarm $\frac{c}{4}$ wirkt. Es iſt alſo

Fig. 282.



$$Q\left(\frac{l_1 l_2}{l} - \frac{c}{8}\right) = \frac{K}{6} \cdot bh^2 \text{ zu ſetzen.}$$

Beiſpiel. Welche Laſt trägt ein hohler Balken aus Gußeiſen, wenn deſſen äußere Höhe und Breite 8 Zoll und 4 Zoll und innere Höhe und Weite 6 Zoll und 2 Zoll beträgt, wenn ferner die Mitte der auf 3 Fuß Länge gleichförmig vertheilten Laſt vom einen Stützpunkt 4 und vom andern 2 Fuß abſteht? Es iſt

$\frac{b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3}{h_1} = \frac{4.512 - 2.216}{8} = 202$, ferner $\frac{l_1 l_2}{l} - \frac{c}{8} = \left(\frac{4.2}{6} - \frac{3}{8}\right) . 12$ $= {}^{23}/_{2}$ Zoll, daher zu ſetzen: ${}^{23}/_{2} Q = 1700.202$ und folglich $Q = 29860$ Pf.

Brechungsebene.

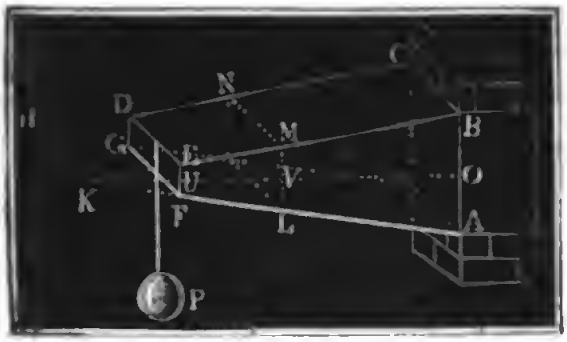
§. 209. Sind die Tragbalken nicht prismatiſch geformt, haben ſie alſo an verſchiedenen Stellen verſchiedene Querſchnitte, ſo iſt die Brechungsebene, d. h. die Ebene, in welcher der Bruch erfolgt, nicht mehr dieſelbe, wie bei einem prismatiſchen Körper: weil dieſe Stelle nicht allein vom Hebelarme x, ſondern auch vom Querſchnitte abhängig iſt. Setzen wir einen rectangulären Querſchnitt von der veränderlichen Breite w und Höhe z voraus; nehmen wir an, daß der Balken an einem Ende feſtgehalten und am andern Ende von einer Kraft P ergriffen wird, und ſetzen wir den Abſtand des Querſchnittes wz von dem Kraftende $= x$, ſo iſt $P = \frac{K}{6} \cdot \frac{w z^2}{x}$ zu ſetzen, und der Minimalwerth von $\frac{w z^2}{x}$ zu ermitteln, um die ſchwächſte Stelle oder Brechungsebene des Balkens zu finden.

Es können hier ſehr verſchiedene Fälle vorkommen; betrachten wir indeſſen nur folgenden. Der Körper $ABEG$, Fig. 283 (a. f. S.), ſei ein abgeſtumpfter Keil oder habe die Form eines Prismas mit trapezoidaler Baſis. Setzen wir die Breite $DE = FG = b$, die Höhe $EF = DG$

am Ende $= h$ und die Entfernung UK der abgeschnittenen Kante HK von der Endfläche EG, $= c$. Nehmen wir nun an, daß die Brechungsebene NL um $UV = x$ von der Endfläche abstehe, so erhalten wir für dieselbe die Höhe

Brechungsebene.

Fig. 283.



$$ML = z = h + \frac{x}{c}h = h\left(1 + \frac{x}{c}\right),$$

während die unveränderliche Breite $MN = w = b$ ist. Der Werth $\frac{wz^2}{x} = \frac{bh^2}{x}\left(1 + \frac{x}{c}\right)^2$ $= bh^2\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{c} + \frac{x}{c^2}\right)$ nimmt mit $\frac{1}{x} + \frac{x}{c^2}$ gleichzeitig zu und ab, ist also auch ein Minimum, wenn es der letzte Werth ist. Setzen wir aber in diesem statt x, $c + u$, wo u eine kleine Zahl bedeutet, so bekommen wir für ihn $\frac{1}{c+u} + \frac{c+u}{c^2} = \frac{1}{c\left(1 + \frac{u}{c}\right)} + \frac{1}{c} + \frac{u}{c^2}$

$= \frac{1}{c}\left(2 - \frac{u}{c} + \frac{u^2}{c^2} - \ldots\right) + \frac{u}{c^2} = \frac{2}{c} + \frac{u^2}{c^3}$. Da nun in diesem letzten Ausdrucke u nur im Quadrat vorkommt, so folgt, daß jeder andere Werth, den man erhält, wenn man die Entfernung x größer oder kleiner als c annimmt, mehr giebt, als $x = c$, daß folglich für $x = c$, $\frac{1}{x} + \frac{x}{c^2}$, und also auch $\frac{wz^2}{x} = bh^2\left(\frac{1}{c} + \frac{2}{c} + \frac{1}{c}\right) = \frac{4bh^2}{c}$ ein Minimum ist. Es folgt hiernach die Größe der Brechungsfläche $= b.2h$ $= 2bh$, und es steht dieselbe von der Endfläche $EG = bh$ ebenso viel ab als die Kante HK des abgeschnittenen Stückes.

Auf ähnliche Weise findet man für eine abgekürzte Pyramide oder einen abgekürzten Kegel den Abstand der Brechungsebene von der Endfläche gleich der halben Höhe der Ergänzungspyramide oder des Ergänzungskegels.

§. 210. Ein Körper, welcher in allen Querschnitten dem Zerbrechen einerlei Widerstand entgegensetzt, von dem also jeder Querschnitt als Brechungsebene angesehen werden kann, heißt ein Körper von gleichem Widerstande (franz. corps d'égale résistance, engl. body of the strongest form). Unter allen Körpern von gleicher Festigkeit hat der Körper von gleichem Widerstande die kleinste Menge an Materie, ist deshalb auch der zweckmäßigste und derjenige, welchen man bei den Con-

Körper von gleichem Widerstande.

Körper von gleichem Widerſtande.

ſtructionen der Architektur und des Maſchinenweſens auswählen ſollte, nicht nur aus Oekonomie, ſondern auch, um Belaſtungen nicht unnöthig zu vergrößern.

Setzen wir den Abſtand einer Brechungsebene von dem äußeren Ende $= x$ und das Maaß des Biegungsmomentes für jenen Querſchnitt $= W$, ſo haben wir die Kraft zum Abbrechen $P = \frac{WK}{ex}$. Da K ein conſtanter Factor iſt, ſo muß bei einem Körper von gleichem Widerſtande $\frac{W}{ex}$ conſtant, d. h. für alle mögliche Querſchnitte ein und derſelbe Werth ſein. Iſt für einen Balken mit rectangulärem Querſchnitte die veränderliche Breite $= u$ und Höhe $= v$; die Breite am Anfange aber $= b$ und die Höhe daſelbſt $= h$, ſo hat man überhaupt $W = \frac{uv^3}{12}$ und $e = \frac{v}{2}$, daher $P = \frac{uv^2}{x} \cdot \frac{K}{6}$ und für den Anfangspunkt, für welchen x in l übergegangen iſt, $P = \frac{bh^2}{l} \cdot \frac{K}{6}$. Setzt man dieſe beiden Werthe für P einander gleich, ſo erhält man die Gleichung $\frac{uv^2}{x} = \frac{bh^2}{l}$ für den Körper von gleichem Widerſtande. Bei einem Körper mit gleicher Breite $u = b$ iſt $\frac{v^2}{x} = \frac{h^2}{l}$, daher $\frac{v^2}{h^2} = \frac{x}{l}$, welche Proportion nur der Parabel zukommt (§. 35, Anmerkung) und nachweiſ't, daß das Längenprofil ABE, Fig. 284, eines ſolchen Körpers die Form einer Parabel haben muß, deren Scheitel der End- oder Aufhängepunkt E der Laſt iſt. Ruht der Balken AB, Fig. 285, in ſeinen Enden auf und trägt eine Laſt P in der Mitte C, oder wird ein Balken AB, Fig. 286, in der

Fig. 284.

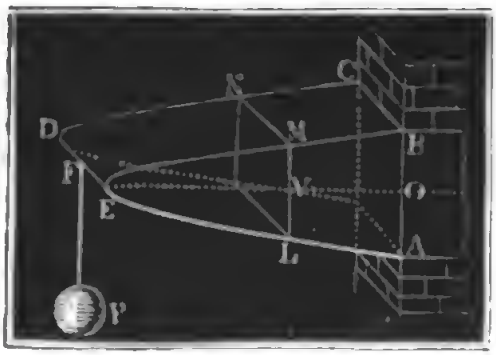


Fig. 285.

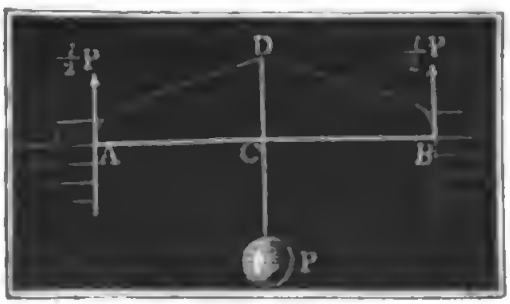
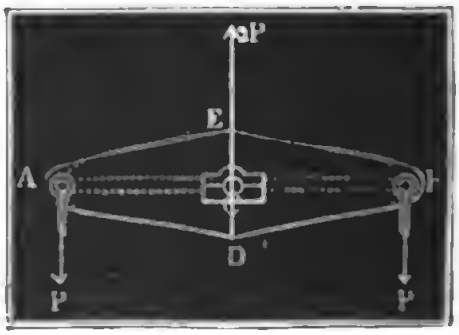


Fig. 286.



Mitte C unterstützt und an den Enden A und B durch zwei sich das Gleichgewicht haltende Kräfte ergriffen, so hat das Längenprofil die Gestalt von zwei in der Mitte zusammenstoßenden Parabeln. Der letzte Fall kommt bei Balanciers vor. Da dieselben durch die Zapfenlöcher A, C, B geschwächt werden, so versieht man sie noch mit Rippen, oder giebt ihnen noch ein Mittelstück AB. Körper von gleichem Widerstande.

Ist die Höhe $v = h$ constant, so hat man $\frac{u}{x} = \frac{b}{l}$ oder $\frac{u}{b} = \frac{x}{l}$, dann ist also die Breite u ihrer Entfernung von dem Ende proportional, es bildet deshalb die Horizontalprojection des Balkens ABD, Fig. 287, ein Dreieck BCD und der ganze Balken einen Keil mit ver-

Fig. 287.

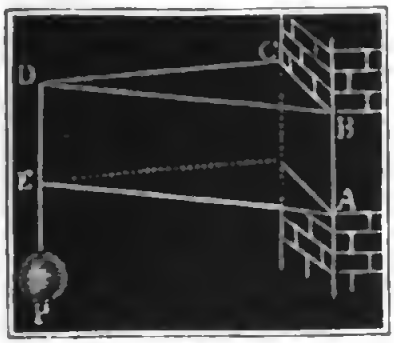
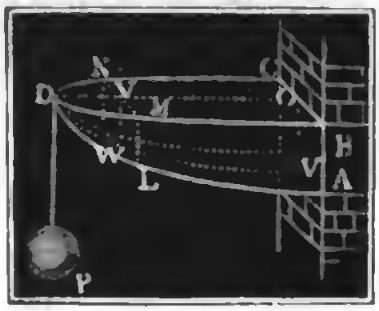


Fig. 288.



tikaler, in die Kraftrichtung fallender Schärfe. Soll der Körper ABD, Fig. 288, lauter ähnliche Querschnitte haben, so hat man

$\frac{v}{h} = \frac{u}{b}$, daher $\frac{u.u^2h^2}{b^2x} = \frac{bh^2}{l}$, d. i. $\frac{u^3}{b^3} = \frac{x}{l}$; dann wachsen also die Breiten und Höhen wie die Cubikwurzeln aus den entsprechenden Hebelarmen. Der achtfachen Entfernung vom Ende entspricht z. B. nur die doppelte Höhe und Breite von der in der einfachen Entfernung.

Ist ein Balken gleichförmig belastet, so hat man die veränderliche Last $Q = qx$ und ihren Hebelarm $= \frac{x}{2}$, daher statt Px, $xq \,.\, \frac{x}{2} = \frac{x^2q}{2}$ zu setzen, weshalb nun $\frac{x^2q}{2} = uv^2 \,.\, \frac{K}{6}$ und auch $\frac{l^2q}{2} = bh^2\frac{K}{6}$ anzunehmen ist, und folglich $\frac{uv^2}{bh^2} = \frac{x^2}{l^2}$.

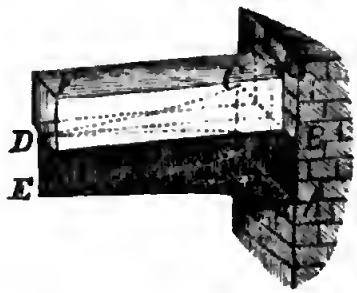
Wäre die Breite unveränderlich, also $u = b$, so hätte man $\frac{v^2}{h^2} = \frac{x^2}{l^2}$, also auch $\frac{v}{h} = \frac{x}{l}$, und deshalb ein Dreieck ABE zum Längenprofil, und einen Keil $ABED$, Fig. 289 (auf folgender Seite), als Körper von gleichem Widerstande. Nehmen wir die Höhe $v = h$ unveränderlich, so

Körper von gleichem Widerſtande.

bekommen wir $\frac{u}{b} = \frac{x^2}{l^2}$, und daher zum Grundriß eine von umgekehrtem Parabelbogen begränzte Fläche BDC, wie Fig. 290. Macht

Fig 289.

Fig. 290.



man wieder ähnliche Querſchnitte, ſo iſt $\frac{u^3}{b^3} = \frac{x^2}{l^2}$, dann hat man es alſo ſowohl im Vertikal- als auch im Horizontalprofile mit der cubiſchen Parabel, bei welcher die Cuben der Ordinaten wie die Quadrate der Abſciſſen wachſen, zu thun.

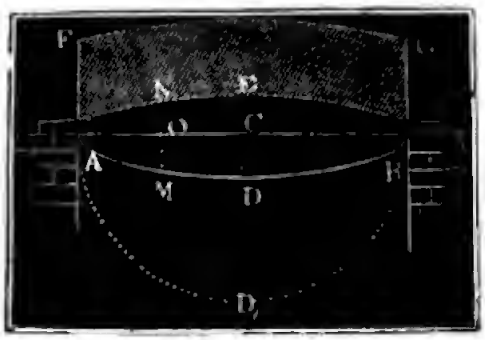
Wird ein in beiden Enden aufruhender Körper AB, Fig. 291, auf die ganze Länge gleichförmig belaſtet, ſo hat man für das Brechungsmoment in einer Entfernung $AO = x$ von einem Stützpunkte:

$$\frac{Q}{2} . x - qx . \frac{x}{2} = \frac{q}{2} (lx - x^2),$$

dagegen für die Mitte:

$$= \frac{Q}{2} . \frac{l}{2} - \frac{Q}{2} . \frac{l}{4} = \frac{Ql}{8} = \frac{ql^2}{8}.$$

Fig. 291.



Setzen wir einen Körper von unveränderlicher Breite voraus, ſo haben wir zu ſetzen: $\frac{q}{2}(lx - x^2) = bv^2 . \frac{K}{6}$ und $\frac{ql^2}{8} = bh^2 . \frac{K}{6}$, und es folgt nun durch Diviſion $\frac{v^2}{h^2} = \frac{lx - x^2}{\frac{1}{4}l^2}$, oder $v^2 = \left(\frac{h}{\frac{1}{2}l}\right)^2 (lx - x^2)$. Wäre $h = \frac{1}{2}l$, ſo würde $v^2 = lx - x^2$ und deshalb das Längenprofil der mit $\frac{1}{2}l$ als Halbmeſſer conſtruirte Kreis AD_1B ſein, weil aber $lx - x^2$ noch durch $\left(\frac{h}{\frac{1}{2}l}\right)^2$ zu multipliciren iſt, um das Quadrat v^2 der jedesmaligen Höhe MN zu erhalten, ſo geht dieſer Kreis in eine Ellipſe ADB über, deren Halbaxen $CA = a_1 = \frac{1}{2}l$ und $CD = b_1 = \frac{1}{2}h$ ſind.

Bei Körpern mit kreisförmigen Querſchnitten treten dieſelben Verhältniſſe ein wie bei Körpern mit ähnlichen rectangulären Querſchnitten. Bei dem an einem Ende eingemauerten und am andern Ende belaſteten Körper iſt $\frac{u^3}{r^3} = \frac{x}{l}$ oder $\frac{u}{r} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$, d. h. es wachſen die Halbmeſſer wie die Cubikwurzeln aus den Entfernungen vom Angriffspunkte.

§. 211. Bei Maſchinentheilen, z. B. bei Wellen, Radaxen u. ſ. w. können Biegungen nachtheilig auf den Gang der Maſchine wirken, indem ſie zu Schwingungen und Erſchütterungen Veranlaſſung geben, es iſt deshalb hier oft angemeſſener, die Querſchnitte nicht nach der Feſtigkeit, ſondern nach dem Grade der Biegung zu beſtimmen. Gerſtner und Tredgold geben an, daß ein mit beiden Enden aufliegender und in der Mitte belaſteter Balken von Holz eine Biegung $a = \frac{1}{288} \cdot l$ und ein ſolcher Balken von Guß- oder Schmiedeeiſen nur die Biegung oder Bogenhöhe $a = \frac{1}{480} \cdot l$ ohne Nachtheile ertragen kann. Nun iſt aber nach §. 193: $a = \frac{Pl^3}{48\,WE}$ und nach §. 196: $W = \frac{bh^3}{12}$, es folgt daher die Bogenhöhe: $a = \frac{Pl^3}{4\,bh^3E}$ und $\frac{a}{l} = \frac{Pl^2}{4\,bh^3E}$. Setzen wir nun $\frac{a}{l} = \frac{1}{288}$ und $E = 1'800000$ ein, ſo bekommen wir für hölzerne Balken die Tragkraft in der Mitte:

Wellenſtärke.

$$P = \frac{a}{l} \cdot \frac{4\,bh^3E}{l^2} = \frac{1}{288} \cdot \frac{4\,bh^3 . 1'800000}{l^2} = 25000 \cdot \frac{bh^3}{l^2}.$$

Für Gußeiſen $\frac{a}{l} = \frac{1}{480}$ und $E = 17'000000$ geſetzt, folgt:

$$P = \frac{1}{480} \cdot \frac{4\,bh^3}{l^2} \cdot 17'000000 = 142000 \cdot \frac{bh^3}{l^2}.$$

Nimmt man noch für Schmiedeeiſen $\frac{a}{l} = \frac{1}{480}$ und $E = 29'000000$ Pf. an, ſo erhält man für parallelepipediſche Balken aus dieſem Materiale:

$$P = 242000 \cdot \frac{bh^3}{l^2}.$$

Die Coefficienten 25000, 142000, 242000 ſind durch $3\pi = 9{,}42$ zu multipliciren, und es iſt b und h durch r zu erſetzen, wenn man es mit cylindriſchen Balken, z. B. runden Wellen u. ſ. w., zu thun hat. Folgende Tabelle giebt die Querſchnittsverhältniſſe unter der Vorausſetzung, daß l in Fußen, b, h, r in Zollen und P in Pfunden ausgedrückt ſind.

Wellenſtärke.

Materie.	Rectangulärer Querſchnitt.	Kreisförmiger Querſchnitt.
Holz	$bh^3 = \frac{Pl^2}{170}$	$r^4 = \frac{Pl^2}{1600}$
Gußeiſen	$bh^3 = \frac{Pl^2}{980}$	$r^4 = \frac{Pl^2}{9250}$
Schmiedeeiſen . .	$bh^3 = \frac{Pl^2}{1680}$	$r^4 = \frac{Pl^2}{15800}$

Iſt die Laſt Q gleichförmig auf den Balken vertheilt, ſo hat man ſtatt P, $\frac{5}{8}Q$, §. 193, zu ſetzen, und will man auf das Gewicht des Balkens Rückſicht nehmen, ſo ſetze man ſtatt P, $P+\frac{5}{8}G$. Hat man es mit einem Balken zu thun, welcher an einem Ende feſtgehalten und am andern belaſtet wird, ſo hat man P und l doppelt zu nehmen, daher Pl^2 zu verachtfachen; trägt endlich der mit einem Ende feſtgehaltene Balken eine gleichmäßig vertheilte Laſt Q, ſo hat man ſtatt Pl^2, $\frac{3}{8} \cdot 8Ql^2 = 3Ql^2$ einzuſetzen.

Beiſpiele. 1) Welche Laſt trägt ein hölzerner, an beiden Enden aufliegender Balken von 20 Fuß Länge, 7 Zoll Dicke und 9 Zoll Höhe auf die Dauer? Es iſt dieſe Laſt $P = 170 \cdot \frac{bh^3}{l^2} = 170 \cdot \frac{7 \cdot 9^3}{20^2} = 1190 \cdot \frac{729}{400} = 2170$ Pf.

In §. 203 wurde $P = 1890$ Pf. gefunden. 2) Wie ſtark iſt eine eiſerne Welle von 12 Fuß Länge zu ſchmieden, wenn dieſelbe eine gleichförmig vertheilte Laſt $Q = 40000$ Pf., ohne eine nachtheilige Biegung zu erleiden, tragen ſoll? Es iſt $r^4 = \frac{\frac{5}{8}Ql^2}{15800}$, alſo hier $r^4 = \frac{5}{8} \cdot \frac{40000 \cdot 12^2}{15800} = 228$ und $r = \sqrt[4]{228} = 3{,}89$ Zoll, folglich die Wellenſtärke $2r = 7{,}78$ oder circa $7\frac{3}{4}$ Zoll. Nach der Feſtigkeitsformel ergiebt ſich, wenn der Tragmodul des Schmiedeeiſens $1\frac{1}{2}$mal ſo groß als für Gußeiſen angenommen wird: $r^3 = \frac{Ql}{8 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 8000}$ $= \frac{40000 \cdot 144 \cdot 9}{8 \cdot 14 \cdot 8000} = 57{,}8$, daher $r = \sqrt[3]{57{,}8} = 3{,}86$ Zoll und $2r = 7{,}72$ Zoll.

Zerdrücken.

§. 212. Werden prismatiſche Körper in ihrer Axenrichtung ſo ſtark zuſammengedrückt, daß dieſelben zerbrechen, ſo hat man die rückwirkende Feſtigkeit derſelben zu überwinden. Dieſes Zerbrechen kann aber auf zweierlei Weiſe vor ſich gehen. Iſt der Körper kurz, nähert er ſich z. B. einem Würfel, ſo zerfällt derſelbe in Theile ohne eine vorausgegangene Biegung; iſt aber der Körper viel länger als breit und dick, ſo geht dem Zerbrechen eine Biegung voraus, wie ſie bei der relativen Feſtigkeit

vorkommt. Jene Art des Zerbrechens besteht in einem Zerdrücken, Zermalmen, Zerquetschen oder Zersplittern des Körpers oder der Theile desselben, diese aber in einem Abbrechen oder Zerknicken in einem Querschnitte des Körpers. Man unterscheidet hiernach Festigkeit des Zerdrückens von der Festigkeit des Zerknickens. Zerdrücken.

Die Festigkeit des Zerdrückens (franz. résistance à l'écrasement; engl. crushing force) ist bei ähnlichen Querschnitten den Inhalten dieser proportional, bei regelmäßigen Querschnitten aber etwas größer als bei unregelmäßigen, und beim Kreise am größten. Sie ist übrigens von der Länge des Körpers ziemlich unabhängig. Kurze Holzprismen zerspalten der Länge nach oder bilden eine Wulst; Steine aber zerspringen entweder in mehrere Stücke oder zertrennen sich in einer schiefen Ebene. Man giebt dem Holze und Steinen zehnfache, dem Eisen aber nur fünffache Sicherheit, Mauern von Bruchsteinen aber erhalten gar die zwanzigfache Sicherheit. Ist K der Modul der Festigkeit des Zerdrückens, K_1 der entsprechende Sicherheitsmodul und F der Querschnitt des Körpers, so hat man

$$K_1 = 1/5\ K \text{ bis } 1/20\ K,$$

die Tragkraft $P = FK_1$ und umgekehrt $F = \frac{P}{K_1}$.

Tabelle

der Festigkeitsmodul für das Zerdrücken.

Namen der Körper.	Festigkeitsmodul K.	Namen der Körper.	Festigkeitsmodul K.
Basalt . . .	27000	Ziegelstein . .	580 bis 2200
Gneis . . .	5100	Eichenholz . .	2800 = 6800
Granit . . .	6000 bis 11000	Fichtenholz .	6800 = 8000
Kalkstein . .	1500 = 6000	Tannenholz .	2000
Marmor . .	3200 = 12000	Gußeisen . .	82000 = 45000
Mörtel . . .	450 = 900	Schmiedeeisen	72000
Sandstein . .	1400 = 13000	Kupfer . . .	60000

Nach den neuesten Erfahrungen kann man von den Werthen für K in der vorstehenden Tabelle auch dann noch Gebrauch machen, wenn die Säulen eine mehr als zwölffache Länge zur Dicke haben. Ist die kleinste Dicke d der Säule in der Länge l derselben

1 12 24 36 48 60 72 mal enthalten,

so soll man nur den

1 5/6 1/2 1/3 1/6 1/12 1/24 fachen

Zerdrücken. Werth von K einſetzen. Nimmt man für Holz eine zehnfache und für Eiſen eine fünffache Sicherheit, ſo erhält man hiernach folgenden Sicherheitsmodul (K_1) für das Zerdrücken:

Namen der Körper.	Werthe von $\frac{l}{d}$							
	1	12	18	24	36	48	60	72
Eichenholz . .	500	400	330	250	170	80	40	20
Fichtenholz .	750	600	500	380	250	120	60	30
Gußeiſen. . .	20000	16700	13300	10000	6700	3300	1700	800
Schmiedeeiſen	14000	11700	9300	7000	4700	2300	1200	600

Beiſpiele. 1) Welche Laſt kann eine 12 Fuß lange runde Säule von 11 Zoll Durchmeſſer aus Fichtenholz tragen? Es iſt $F = \frac{\pi . 11^2}{4} = 95$ □Zoll; nimmt man nun für K den Mittelwerth $\frac{6800+8000}{2} = 7400$, vermindert man dieſen Werth, weil die Länge 13mal ſo groß als die Dicke iſt, um ein Sechstel, ſetzt man alſo $K = 7400 . \frac{5}{6} = 6200$ Pf. und giebt man noch zehnfache Sicherheit, ſo hat man $P = \frac{6200 . F}{10} = 620 . 95 = 58900$ Pf. 2) Wie ſtark hat man die Grundmauern eines außen 60 Fuß langen und 40 Fuß breiten und 20 Millionen Pfund ſchweren Gebäudes aufzuführen, wenn man hierzu gut bearbeitete Gneisſtücke verwendet? Setzen wir die geſuchte Mauerdicke $= x$, ſo können wir die mittlere Länge $60-x$ und Breite $40-x$, alſo den mittleren Umfang $2\,(60-x+40-x) = 200-4x$ ſetzen; hiermit x multiplicirt, erhält man die Baſis der Mauern $(200-4x)\,x$ □ Fuß $= 144\,(200-4x)\,x = 576\,(50-x)\,x$ □ Zoll. Bei zwanzigfacher Sicherheit trägt ein □ Zoll Gneis $= \frac{5100}{20} = 255$ Pf., daher iſt zu ſetzen: $255 . 576\,(50-x)\,x = 20000000$, oder $50\,x - x^2 = \frac{20000000}{146880} = 136$. Es folgt nun $x = \frac{136+x^2}{50}$, oder ungefähr $x = \frac{136}{50} = 2{,}7$ Fuß. Nun $x^2 = 2{,}7^2 = 7$ geſetzt, folgt genauer $x = \frac{136+7}{50} = \frac{143}{50} = 2{,}86$ Fuß, wofür 2,9 Fuß $= 35$ Zoll zu nehmen iſt.

Zerknicken. §. 213*). Wird ein prismatiſcher Körper $ABCD$, Fig. 292 (a.f.S.), an einem Ende feſtgehalten und an dem andern Ende von einer Kraft P ergriffen, die in der Axenrichtung des Körpers ſelbſt wirkt, ſo ſtellen ſich die Biegungsverhältniſſe anders heraus, als wenn die Kraft winkelrecht zur Axe wirkt. Die neutrale Axe KL nimmt eine andere Geſtalt an, weil die Hebelarme der Kraft P nicht durch die Abſciſſen, ſondern durch die Ordi-

naten, z. B. HK, gebildet werden. Nach §. 191 hat man für den Krüm- Biegungen.
mungshalbmesser QO einer elastischen Linie KL, Fig. 293, die Formel $Mr = WE$; nun ist aber bei einer kleinen Biegung $r = -\frac{dx}{d(tang.\alpha)}$.

Fig. 292.

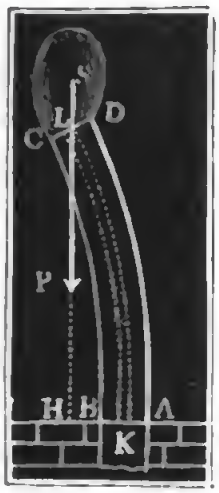
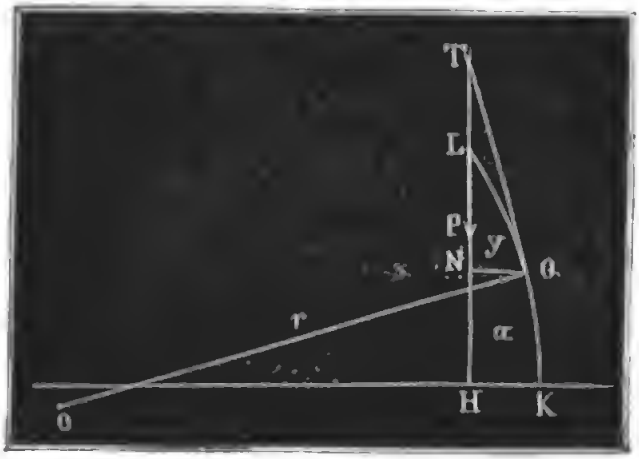


Fig. 293.



wenn dx ein Element der Abscisse $LN = x$ und α den Tangentenwinkel QTN, ferner M das Moment Py und y die Ordinate NQ eines Punktes Q der Curve bezeichnet; daher hat man die Gleichung

$$-\frac{Py\,dx}{d(tang.\alpha)} = WE;$$ oder, da $tang.\alpha = \frac{dy}{dx}$, also $dx = \frac{dy}{tang\,\alpha}$ ist,

$$Py\,dy = -\,WE\,tang.\,\alpha\,.\,d\,(tang.\,\alpha),$$

und es folgt nun durch Integriren:

$$\tfrac{1}{2}Py^2 = Con. - \tfrac{1}{2}\,WE\,(tang.\alpha)^2.$$

Für den festgehaltenen Punkt K ist $\alpha =$ Null und y die ganze Bogenhöhe $KH = a$, daher hat man auch

$$\tfrac{1}{2}\,Pa^2 = Con. - 0,$$

und es folgt durch Subtraction

$$P\,(a^2 - y^2) = WE\,(tang.\,\alpha)^2, \text{ also}$$

$$tang.\,\alpha = \sqrt{\frac{P\,(a^2-y^2)}{WE}}.$$

Führen wir jetzt wieder $tang.\,\alpha = \frac{dy}{dx}$ ein, so erhalten wir

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}} = dx\,\sqrt{\frac{P}{WE}}, \text{ oder}$$

$$\frac{d\left(\frac{y}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2}} = dx\,\sqrt{\frac{P}{WE}},$$

Zerknicken und es folgt nun nach Artikel 19 der analytiſchen Vorlehren:

$$arc.\left(sin. = \frac{y}{a}\right) = x\sqrt{\frac{P}{WE}},$$

oder umgekehrt,

$$\frac{y}{a} = sin.\left(x\sqrt{\frac{P}{WE}}\right),$$

d. i. die Gleichung $y = a\ sin.\left(x\sqrt{\frac{P}{WE}}\right)$ für die elaſtiſche Linie.

Für $x =$ der Länge $BC = KL = l$, iſt $y =$ der Bogenhöhe $HK = a$, und daher

$$a = a\ sin.\left(l\sqrt{\frac{P}{WE}}\right), \text{ d. i. } sin.\left(l\sqrt{\frac{P}{WE}}\right) = 1;$$

da aber dem Sinus 1 der Quadrant $\frac{\pi}{2}$ als Bogen zukommt, ſo folgt

$$l\sqrt{\frac{P}{WE}} = \frac{\pi}{2}, \text{ und folglich die Kraft}$$

$$P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 WE.$$

Da dieſe Formel die Bogenhöhe a nicht enthält, ſo folgt, daß die Kraft P bei jeder Biegung dem Körper das Gleichgewicht zu halten vermag. Dieſes auffallende Verhältniß erklärt ſich dadurch, daß mit der Zunahme der Biegung auch ein Wachſen des Hebelarmes oder des ſtatiſchen Momentes verbunden iſt. Hiernach iſt alſo auch die Kraft zum Abbrechen:

$$P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 WE.$$

Säulen. §. 214. Setzen wir in der Formel $P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 . WE$ für $W = \frac{bh^3}{12}$, ſo erhalten wir die rückwirkende Feſtigkeit einer parallelepipediſchen Säule

$$P = \frac{\pi^2}{48} \cdot \frac{bh^3}{l^2} E.$$

Es wächſt alſo die rückwirkende Feſtigkeit eines Parallelepipedes wie die Breite oder größere Dimenſion, wie der Cubus der Dicke oder kleinern Dimenſion des Querſchnittes, und umgekehrt wie das Quadrat der Länge.

Setzen wir dagegen $W = \frac{\pi}{4} r^4$, ſo erhalten wir für eine cylindriſche Säule $P = \frac{\pi^3}{16} \cdot \frac{r^4 E}{l^2}$.

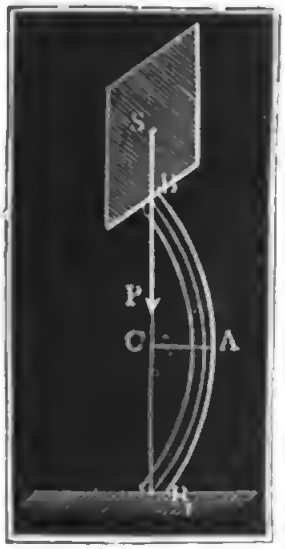
Die rückwirkende Festigkeit eines Cylinders wächst also wie das Quadrat des Durchmessers und umgekehrt wie das Quadrat der Länge. Säulen.

Für eine hohle Säule mit den Halbmessern r_1 und r_2 ist

$$P = \frac{\pi^3}{16} \cdot \frac{(r_1^4 - r_2^4)\,E}{l^2}.$$

Wird die Säule am untern Ende nicht festgehalten, so nimmt sie eine Krümmung wie BAB_1, Fig. 294, an, wobei die untere Hälfte ebenso stark wie die obere gebogen wird, und in der Mitte die stärkste Krümmung stattfindet. Deshalb ist dieser Balken als das Doppelte eines eingemauerten anzusehen und statt l, $\frac{l}{2}$ einzuführen, so daß für die parallelepipedische Säule $P = \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{b h^3}{l^2} E$ und für die cylindrische $P = \frac{\pi^3}{4} \cdot \frac{r^4}{l^2} E$, in beiden Fällen aber die vierfache Tragkraft folgt.

Fig. 294.



Setzen wir die Kraft des Zerknickens der des Zerdrückens gleich, also z. B. für eine cylindrische Säule

$\frac{\pi^3}{4} \cdot \frac{r^4 E}{l^2} = \pi r^2 K$, so bekommen wir die Formel

$$\frac{l}{r} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{E}{K}},$$

oder statt dem Halbmesser r die Dicke $d = 2r$ eingeführt:

$$\frac{l}{d} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{E}{K}}.$$

Nun ist aber für Holz im Mittel $E = 1'800000$ und K im Mittel $= 6000$ zu setzen, daher folgt denn hier

$$\frac{l}{d} = \frac{\pi}{4}\sqrt{300} = \frac{11 \,.\, 17{,}3}{7 \,.\, 2} = 13{,}6.$$

Für Gußeisen können wir $E = 17'000000$ und $K = 100000$ setzen, weshalb für dasselbe

$$\frac{l}{d} = \frac{\pi}{4}\sqrt{170} = 10{,}2 \text{ sich herausstellt.}$$

Für Schmiedeeisen ist endlich $E = 29'000000$ und $K = 72000$, folglich $\frac{l}{d} = \frac{\pi}{4}\sqrt{403} = 15{,}7$.

Säulen. Bei dieſen Längenverhältniſſen iſt alſo, wenn man in beiden Fällen einerlei Sicherheitsmaaß vorausſetzt, die Kraft des Zerknickens gleich der des Zerdrückens, und nur erſt bei längeren Säulen übertrifft der letztere Widerſtand den erſten, ſind alſo die Dimenſionen nach den ſo eben gefundenen Formeln für das Zerknicken zu berechnen.

Beiſpiele. 1) Für eine 12 Fuß lange und 11 Zoll dicke Säule aus Fichtenholz iſt die Tragkraft nach der letzten Formel, bei 10facher Sicherheit

$$P = \frac{\pi^3}{4} \cdot \frac{r^4}{l^2} \cdot \frac{E}{10} = {}^{31}/_{4} \cdot ({}^{11}/_{24})^4 \cdot 180000 = {}^{31}/_{4} \cdot 0{,}044 \cdot 180000 = 61600 \text{ Pf.};$$

nach dem Beiſpiel Nr. 1 des §. 212 aber nur $P = 58900$ Pf.

2) Wie ſtark muß eine 30 Fuß hohe Säule aus Eichenholz ſein, damit ſie eine Laſt von 60000 Pfund tragen könne? Hier iſt

$$r = \sqrt[4]{\frac{4Pl^2}{\pi^3 E}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 60000 \cdot (30 \cdot 12)^2}{31 \cdot 180000}} = \sqrt[4]{\frac{4\,(360)^2}{31 \cdot 3}} = \frac{26{,}8}{3{,}1} = 8{,}7 \text{ Zoll},$$

und die geſuchte Stärke $d = 2r = 17{,}4$ Zoll. Die Feſtigkeit des Zerdrückens erfordert, wenn man $K = {}^{1}/_{10} \cdot \frac{2800 + 6800}{2} = 480$ Pf. ſetzt, den Querſchnitt $F = {}^{60000}/_{480} = 125$ Quadratzoll, und hiernach die Stärke

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi}} = \sqrt{\frac{500}{\pi}} = 12{,}6 \text{ Zoll}.$$ Nach der Tabelle in §. 212, $K = 300$ genommen, erhält man die Stärke $d = \sqrt{\frac{800}{\pi}} = 16$ Zoll, alſo nahe ſo groß wie die dem Zerdrücken entſprechende.

§. 215. Die Verſuche, welche in den neueren Zeiten Hodgkinſon über die rückwirkende Feſtigkeit angeſtellt hat (ſ. Barlow's Bericht in den Philosophical Transactions, 1840), beſtätigen wenigſtens eine angenäherte Richtigkeit der im Vorſtehenden entwickelten Formeln. Nach dieſem Experimentator iſt die Formel $P = \frac{\pi^3}{4} \cdot \frac{r^4}{l^2} E = \frac{d^4}{l^2} \cdot \frac{\pi^3 E}{64}$, wenn man nur ſtatt $\frac{\pi^3}{64} E$ einen beſonderen Erfahrungswerth einſetzt, unbedingt richtig, dagegen für Guß- und Schmiedeeiſen darin ſtatt d^4 eine kleinere Potenz von d einzuführen, und zwar $d^{3{,}76}$, wenn die Säulenenden abgerundet, und $d^{3{,}55}$, wenn die Enden flach ſind. Im letztern Falle iſt überhaupt die Tragkraft größer, weil durch das flache Aufliegen der Säulenenden das Biegen ſehr erſchwert wird. Auch iſt beim Gußeiſen ſtatt l^2, $l^{1{,}7}$ einzuſetzen.

Folgendes ſind die Hauptergebniſſe der Hodgkinſon'ſchen Verſuche an cylindriſchen Säulen. Es wird hier vorausgeſetzt, daß die Säulendurchmeſſer d oder Dicke b in Zollen, die Säulenlängen l aber in Fußen gegeben ſind.

Beſchaffenheit der Säulen.	Die Säulenenden abgerundet $\frac{l}{d} > 15$.	Die Säulenenden flach $\frac{l}{d} > 30$.
Maſſiver Cylinder aus Gußeiſen.	$P = 34300 \frac{d^{3,76}}{l^{1,7}}$	$P = 101600 \frac{d^{3,55}}{l^{1,7}}$
Hohler Cylinder aus Gußeiſen.	$P = 29900 \frac{d^{3,76} - d_1^{3,76}}{l^{1,7}}$	$P = 102000 \frac{d^{3,55} - d_1^{3,55}}{l^{1,7}}$
Maſſiver Cylinder aus Schmiedeeiſen.	$P = 98400 \frac{d^{3,76}}{l^2}$	$P = 307600 \frac{d^{3,55}}{l^2}$
Quadratiſche Säule aus trocknem Danziger Eichenholze.	— —	$P = 25200 \frac{b^4}{l^2}$
Quadratiſche Säule aus trocknem Fichtenholze.	— —	$P = 18000 \frac{b^4}{l^2}$.

Noch hat Hodgkinſon gefunden, daß gußeiſerne Säulen eher zerknickt als zerdrückt werden, bei abgerundeten Enden, wenn $l > 15\,d$, und bei flachen Enden, wenn $l > 30\,d$ iſt; daß ferner gußeiſerne Säulen, welche in der Mitte $^3/_2$ bis 2 mal ſo dick ſind als an den Enden bei gleichem Gewichte und gleicher Länge unter gleichen Umſtänden ungefähr $^1/_8$ mehr tragen als cylindriſche Säulen, und daß hohle cylindriſche Säulen unter übrigens gleichen Verhältniſſen ſtets mehr tragen als gleich ſchwere Säulen mit polygonalen oder ſternförmigen Querſchnitten. Ferner ſoll die Tragkraft des trocknen Holzes doppelt ſo groß ſein als die des friſch gefällten. Wenn das eine Ende der Säule flach und das der andern abgerundet iſt, ſo ſoll endlich die Tragkraft das arithmetiſche Mittel ſein, zwiſchen der Tragkraft, wenn beide Enden abgerundet, und der, wenn beide Enden flach ſind.

Beiſpiel. Welche Stärke ſoll eine gußeiſerne Säule von 20 Fuß Länge erhalten, wenn dieſelbe eine Laſt P von 20000 Pf. tragen ſoll? Nach der Tabelle iſt $20000 = \frac{34300 \cdot d^{3,76}}{20^{1,7}}$, daher umgekehrt $d^{3,76} = \frac{20000}{34300} \cdot 20^{1,7}$, oder $3{,}76\ Log.\, d = 0{,}76574 - 1 + 1{,}7\ .\ Log.\ 20$, d. i.

$$Log.\, d = \frac{1{,}9775}{3{,}76} = 0{,}526, \text{ alſo } d = 3{,}36 \text{ Zoll.}$$

Giebt man aber 5fache Sicherheit, ſo hat man $d^{3,76} = \frac{100000}{34300} \cdot 20^{1,7}$, daher $Log.\, d = \frac{2{,}676}{3{,}76} = 0{,}712$, und $d = 5{,}15$ Zoll.

Nach der theoretiſchen Formel iſt, bei 5facher Sicherheit:

$$d = 2\sqrt[4]{\frac{4 \cdot 20000 \cdot 240^2}{31 \cdot \frac{1}{3} \cdot 17000000}} = 2\sqrt[4]{\frac{40 \cdot 24^2}{31 \cdot 17}} = 5{,}14 \text{ Zoll.}$$

Nach der Tabelle in §. 212 wäre, da hiernach $\frac{l}{d}$ ungefähr 48 iſt, der Querſchnitt $F = \frac{20000}{3300} = 6{,}06$, und daher die Stärke um 2,78 Zoll, alſo viel zu klein.

Torſion

§. 216. Wird ein an einem Ende befeſtigter Körper ABC, Fig. 295, von einer Kraft ergriffen, deren Richtung in eine Normalebene zur Axe fällt und deshalb den Körper um die Axe zu drehen ſucht, oder wirken zwei

Fig. 295.

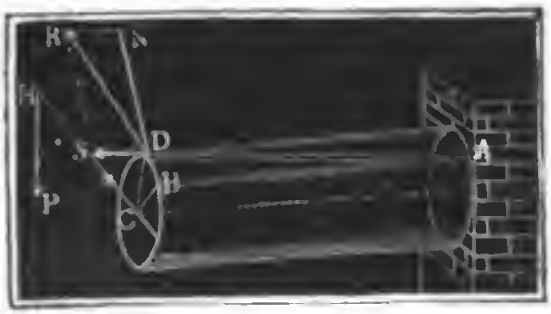
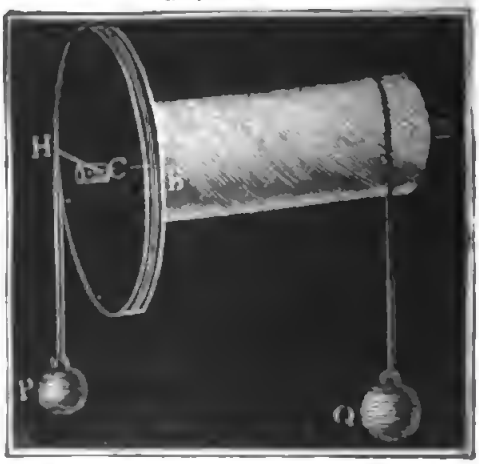


Fig. 296.

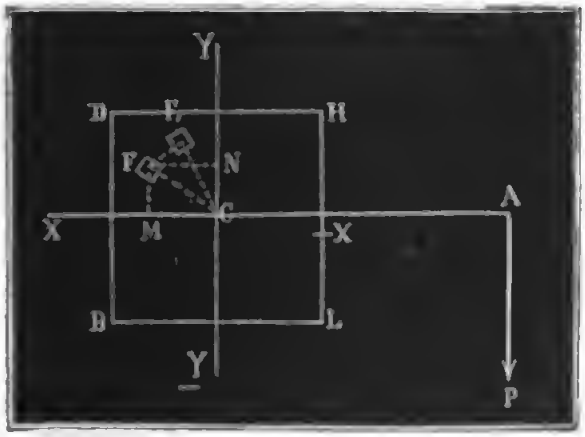


Umdrehungskräfte P und Q in verſchiedenen Normalebenen auf einen in ſeiner Axe feſtgehaltenen Körper AB, Fig. 296, ſo nehmen die urſprünglich parallel mit der Axe laufenden Faſern eine Verdrehung oder Torſion an, deren Größe wir eben beſtimmen wollen. Es ſei AB, Fig. 295, eine Faſer vor, und AD dieſelbe Faſer während der Torſion, es ſei alſo in Folge der Torſionskraft das Ende B der Faſer nach D gerückt. Iſt nun l die anfängliche Länge AB, und λ die Ausdehnung derſelben, alſo $l + \lambda$ die Länge AD während der Torſion, und iſt s die entſprechende Torſion BD, ſo hat man nach dem pythagoriſchen Lehrſatze, $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2$, d. i.: $(l + \lambda)^2 = l^2 + s^2$, oder $l^2 + 2l\lambda + \lambda^2 = l^2 + s^2$, weshalb ſich annähernd $\lambda = \frac{s^2}{2l}$ ſetzen läßt. Iſt noch F der Querſchnitt einer ſolchen Faſer, ſo hat man die in der Richtung der Faſer nöthige Kraft zur Hervorbringung dieſer Ausdehnung: $S = \frac{s^2}{2l^2} . F . E$. Dieſe Kraft oder Spannung S einer Faſer iſt aber nur eine Seitenkraft von der Torſionskraft R, die außerdem noch einen Normaldruck N zwiſchen den Faſern hervorbringt. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke RDS und BDA folgt $S : R = s : l$, daher iſt $S = \frac{Rs}{l}$ und es giebt das Gleichſetzen beider Werthe für S, $R = \frac{s}{2l} F . E$.

Es wächst also die Torsionskraft einer Faser wie die Torsion (*s*), wie der Querschnitt (*F*) und umgekehrt wie die Länge (*l*) der Faser. Torsion.

Ist *r* der Abstand *CF* des Querschnittes *F* von der Umdrehungsaxe *C*, Fig. 297, so hat man das Moment der Kraft *R*:

Fig. 297.



$$Rr = \frac{s}{2l} Fr \, E,$$

und bezeichnet endlich α den Torsionswinkel FCF_1, um welchen jeder Faserquerschnitt verdreht ist, so hat man $s = \alpha r$, und daher

$$Rr = \frac{Fr^2}{2l} \alpha E.$$

Wenn man nun die sämmtlichen Querschnittselemente mit F_1, F_2, F_3 ... und ihre Abstände von der Drehungsaxe mit r_1, r_2, r_3 u. s. w. bezeichnet, und annimmt, daß die Umdrehungskraft *P* an einem Hebelarme $CA = a$ wirkt, so hat man die Formel:

$$Pa = (F_1 r_1^2 + F_2 r_2^2 + ..) \frac{\alpha E}{2l};$$

oder, da sich in Uebereinstimmung mit dem Obigen, $F_1 r_1^2 + F_2 r_2^2 + \ldots$ als Maaß des Drehungsmomentes, $= W$ setzen läßt:

$$Pa = \frac{\alpha W E}{2l}.$$

Es wächst also das Torsionsmoment wie der Torsionswinkel α, wie der Elasticitätsmodul *E*, umgekehrt wie die Länge *l* des Körpers und endlich noch wie das vom Querschnitte des Körpers abhängige Maaß *W* des Drehungs- oder Biegungsmomentes.

Das entsprechende Arbeitsquantum ist:

$$L = \frac{P.\alpha a}{2} = \frac{\alpha^2 WE}{4l} = \frac{P^2 a^2 l}{WE}.$$

§. 217. Das Drehungsmoment *W* einer Fläche *BDHL*, Fig. 297, in Hinsicht auf die normale Axe *C* läßt sich leicht durch die Biegungsmomente W_1 und W_2 in Hinsicht auf zwei rechtwinkelige Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ in der Ebene der Fläche ausdrücken. Da

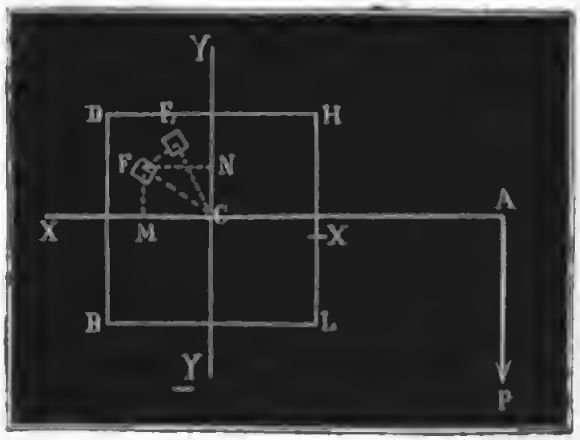
$$C\overline{F}^2 = C\overline{M}^2 + C\overline{N}^2, \text{ oder } r^2 = x^2 + y^2 \text{ ist,}$$

wenn *r* den Abstand *CF* des Elementes *F* von der Axe *C*, *x* den Abstand $CM = NF$ desselben von der Axe $Y\overline{Y}$, und *y* den Abstand $CN = MF$ von der Axe $X\overline{X}$ bezeichnet, so hat man $Fr^2 = Fx^2 + Fy^2$, und auch

Torſion. $$F(r_1^2+r_2^2+..) = F(x_1^2+x_2^2+..) + F(y_1^2+y_2^2+..), \text{ d. i.}$$
$$W = W_1 + W_2.$$

Für eine parallelepipediſche Welle $BDHL$, Fig. 298, von der Breite $BL = DH = b$ und Höhe $AD = HL = h$ hat man nach § 196:

Fig. 298.



$$W_1 = \frac{bh^3}{12} \text{ und } W_2 = \frac{hb^3}{12};$$

daher iſt

$$W = \frac{bh^3+hb^3}{12} = (b^2+h^2)\frac{bh}{12},$$

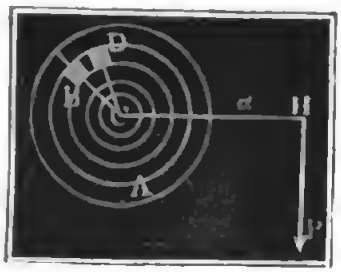
und das Torſionsmoment für dieſe Welle:

$$Pa = \alpha E \cdot \frac{(b^2+h^2)\,bh}{24\,l}.$$

Für einen quadratiſchen Schaft von der Seitenlänge $b = h$ iſt:

$$Pa = \frac{\alpha E b^4}{12\,l} = 0{,}0833\,\frac{\alpha E b^4}{l}.$$

Fig. 299.



Für eine cylindriſche Welle ABC, Fig. 299, vom Halbmeſſer r hat man

$$W_1 = W_2 = \frac{\pi r^4}{4}, \text{ daher}$$

$$Pa = \frac{\alpha E \pi r^4}{4\,l} = 0{,}785\,\frac{\alpha E r^4}{l}.$$

Iſt die Welle hohl und ſind ihre Halbmeſſer r_1 und r_2, ſo gilt die Formel

$$Pa = \frac{\alpha E \pi (r_1^4 - r_2^4)}{4\,l}.$$

Die vorſtehende Theorie giebt uns von der Wahrheit etwas abweichende Torſionsmomente, weil bei ihrer Entwickelung vorausgeſetzt worden iſt, daß die Endflächen des Prismas, welches eine Torſion erleidet, während der Torſion eben bleiben, dieſelben aber in Wirklichkeit windſchief ausfallen. Nach den Unterſuchungen von Saint-Venant, Wertheim u. ſ. w. (ſiehe Comptes rendus de séances de l'académie des sciences à Paris, T. 24 und T. 27) iſt für einen quadratiſchen Schaft:

$$Pa = 0{,}841 \cdot \frac{\alpha E b^4}{16\,l} = 0{,}0526\,\frac{\alpha E b^4}{l},$$

und für eine cylindriſche Welle:

$$Pa = \frac{3\pi}{16}\,\frac{\alpha E r^4}{l} = 0{,}59\,\frac{\alpha E r^4}{l}.$$

Bei Körpern, deren Querſchnittsdimenſionen ſehr von einander abwei-

chen, fallen die Abweichungen größer aus. Z. B. für ein Parallelepiped, dessen Höhe h die Breite vielfach übertrifft, ist nach Saint-Venant und Cauchy: Torsion.

$$Pa = \frac{2}{0{,}841}\,\frac{\alpha E b^3 h}{16 l} = 0{,}149\,\frac{\alpha E b^3 h}{l}.$$

Legt man die letzten Formeln von Wertheim zu Grunde und verwandelt man die Torsionsbogen α in Winkel, setzt also:

$$\alpha = \frac{\pi\,\alpha^0}{180} = 0{,}01745\,\alpha^0,$$

so läßt sich mit Hülfe der in §. 189 mitgetheilten Werthe der Elasticitätsmodul leicht folgende Tabelle zusammenstellen.

Materie der Welle.	Kreisförmiger Querschnitt.	Quadratischer Querschnitt.
Holz	$Pa = 18500\,\frac{\alpha^0 r^4}{l}$	$Pa = 1650\,\frac{\alpha^0 b^4}{l}$
Gußeisen	$Pa = 175000\,\frac{\alpha^0 r^4}{l}$	$Pa = 15600\,\frac{\alpha^0 b^4}{l}$
Stahl und Schmiedeeisen . . .	$Pa = 310000\,\frac{\alpha^0 r^4}{l}$	$Pa = 27500\,\frac{\alpha^0 b^4}{l}$

Beispiele. 1) Welches Umdrehungsmoment kann ein quadratischer Schaft aus Schmiedeeisen von 10 Fuß Länge und 5 Zoll Stärke aufnehmen, ohne eine Torsion über $\frac{1}{4}$ Grad zu erleiden? Es ist nach dieser Tabelle:

$$Pa = 27500 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \frac{5^4}{10.12} = 2750 \cdot \frac{25^2}{48} = 36000 \text{ Fußzoll} = 3000 \text{ Fußpf.}$$

2) Welche Torsion erleidet eine hohle gußeiserne Welle von der Länge $l = 100$ Zoll und den Halbmessern $r_1 = 6$ Zoll und $r_2 = 4$ Zoll, durch ein Kraftmoment $Pa = 10000$ Fußpfund? Es ist hier:

$$Pa = 175000\,\frac{\alpha^0 (r_1^4 - r_2^4)}{l}, \text{ folglich}$$

$$\alpha = \frac{Pal}{175000\,(r_1^4 - r_2^4)} = \frac{10000.12.100}{175000\,(6^2+4^2)(6^2-4^2)} = \frac{12000}{175.52.20} = \frac{6^0}{91}$$
$$= 4 \text{ Minuten.}$$

§. 218. Ueberschreitet die Torsion eine gewisse Grenze, so werden die Fasern zerrissen, und es wird, wie man sagt, die Welle abgewürgt. Für den Augenblick des Zerreißens der von der Umdrehungsaxe entferntesten Fasern ist das Ausdehnungsverhältniß $\frac{\lambda}{l} = \frac{K}{E}$; aber $\frac{\lambda}{l}$ ist auch $= \frac{s^2}{2l^2}$, daher hat man für eine cylindrische Welle, wo $s = \alpha r$ zu setzen ist, Torsionsfestigkeit.

$$\frac{\alpha^2 r^2}{2l^2} = \frac{K}{E}, \text{ oder } \frac{\alpha r}{l} = \sqrt{\frac{2K}{E}},$$

Torſionsfeſtigkeit.

und daher das Moment zum Abwürgen dieſer Welle:

$$Pa = \frac{\alpha E \pi r^4}{4l} = \frac{\alpha r}{l} \cdot \frac{\pi E r^3}{4} = \sqrt{\frac{2K}{E}} \cdot \frac{\pi E r^3}{4}$$
$$= \frac{\pi r^3}{2} \sqrt{\frac{KE}{2}}.$$

Für eine quadratiſche Welle von der Seitenlänge b iſt dagegen der Abſtand der entfernteſten Faſer von der Axe $= b\sqrt{1/2}$, daher

$$s = \alpha b \sqrt{1/2}, \frac{\lambda}{l} = \frac{\alpha^2 b^2}{4l^2} \text{ und } \frac{\alpha b}{2l} = \sqrt{\frac{K}{E}};$$

demnach iſt das Moment zum Abwürgen dieſer Welle:

$$Pa = \frac{\alpha E b^4}{12l} = \frac{\alpha b}{2l} \cdot \frac{E b^3}{6} = \sqrt{\frac{K}{E}} \cdot \frac{E b^3}{6} = \frac{b^3}{6} \sqrt{KE}.$$

Für eine hohle Welle mit den Halbmeſſern r_1 und r_2 iſt:

$$Pa = \frac{\pi (r_1^4 - r_2^4)}{2 r_1} \sqrt{\frac{KE}{2}}.$$

Da außerhalb der Elaſticitätsgrenze die Proportionalität zwiſchen den Kräften und den von ihnen hervorgebrachten Ausdehnungen aufhört, ſo iſt zu erwarten, daß die hier gefundenen Formeln wenigſtens in quantitativer Beziehung mit den Erfahrungen nicht übereinſtimmen, und deshalb nöthig, ſtatt $\sqrt{KE}$ einen beſondern, durch Verſuche zu ermittelnden Werth zu ſetzen. Nach den Verſuchen von Bramah und Rennie iſt für Gußeiſen $K_1 = \sqrt{\frac{KE}{2}} = 30000$ bis 66000 Pf., nimmt man den mittleren Werth und 5fache Sicherheit, ſo erhält man:

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{KE}{2}} = 12600,$$

und daher für runde Wellen aus Gußeiſen:

$$Pa = 12600\, r^3, \text{ dagegen für quadratiſche:}$$
$$Pa = 1900\, b^3.$$

Für Wellen aus Schmiedeeiſen gelten dieſelben Formeln, für ſolche aus Kanonenmetall nimmt man K_1 nur halb, und für ſolche aus Holz K_1 nur ein Zehntel ſo groß. Hiernach hat man alſo für jene:

$$Pa = 6300\, r^3 = 950\, b^3, \text{ und für dieſe}$$
$$Pa = 1260\, r^3 = 190\, b^3.$$

Beiſpiele. 1) Die eiſerne ſtehende Welle einer Turbine übt am Umfange eines auf ihr ſitzenden Zahnrades von 15 Zoll Halbmeſſer eine Kraft von 2500 Pf. aus, welche Dicke muß man derſelben geben? Es iſt $Pa = 2500 \cdot 15 = 37500$, und ſetzen wir $r^3 = \frac{Pa}{12600} = \frac{37500}{12600} = \frac{375}{126}$, ſo bekommen wir $r = \sqrt[3]{\frac{375}{126}} = 1{,}44$ Zoll, daher die Wellenſtärke $2r = 2{,}88$ Zoll, wofür 3 Zoll

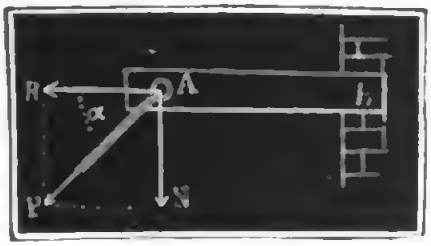
zu nehmen sein möchte. Ist die Entfernung des Zahnrades vom Wasserrade 60 Zoll, so fällt die Verdrehung dieser Welle $= \alpha^0 = \frac{Pal}{175000\,r^4} = \frac{37500.60}{175000.1{,}44^4}$ Torsions-festigkeit.

$= \frac{375.6}{175.4{,}28} = \frac{45}{14{,}98} = 3^0$, also sehr bedeutend aus. 2) Bei einer vierkantigen Welle aus Fichtenholz wirkt die Kraft $P = 500$ Pf. an einem Hebelarme von 20 Fuß, während die Last an einem Hebelarme von 2 Fuß in einer nach der Axenrichtung gemessenen Entfernung $l = 10$ Fuß angreift; wie dick ist diese Welle zu machen und wie groß ist diese Verdrehung? Es ist $Pa = 500.20.12 = 120000$ Zollpf. Die Seite b der Welle ist bestimmt durch $b^3 = \frac{Pa}{190} = \frac{120000}{190} = 632$, daher $b = \sqrt{632} = 8{,}6$ Zoll. Die Verdrehung beträgt $\alpha^0 = \frac{Pal}{1650.b^4} = \frac{120000.12.10}{1650.8{,}6^4} = \frac{144000}{165.547} = 1{,}6^0$. In der Regel läßt man kleinere Torsionen zu, und macht deshalb die Wellen viel stärker. Meist beträgt dieser Winkel noch nicht $\frac{1}{2}$ Grad. Setzen wir $\alpha^0 = \frac{1}{4}^0$, so bekommen wir für diesen Fall $b^4 = \frac{1440000}{165.\frac{1}{4}} = 34950$, daher

$b = \sqrt[4]{34900} = 13{,}5$ Zoll. Nach Gerstner soll der Torsionswinkel einer Welle nicht mehr als 0,1 Grad betragen.

§. 219. Wenn ein an einem Ende B festgehaltener Körper AB, Fig. 300, von einer Kraft P ergriffen wird, die weder in der Axenrichtung des Körpers, noch rechtwinkelig darauf wirkt, so werden zweierlei Festigkeiten, nämlich die relative und die absolute oder, nach Befinden, die rückwirkende Festigkeit, in Anspruch genommen. Schließt die Kraft P mit der verlängerten Axenrichtung des Körpers den spitzen Winkel $PAR = \alpha$ ein, so ist die von der relativen Festigkeit aufzunehmende oder die den Körper biegende Kraft $N = P \sin.\alpha$, und die von der absoluten Festigkeit auszuhaltende, den Körper dehnende Kraft, $R = P \cos.\alpha$. Behalten wir nun die seither gebrauchten Bezeichnungen bei, so erhalten wir für die Ausdehnung λ_1 der äußersten Faser in Folge der Wirkung von N: Zusammengesetzte Festigkeit.

Fig. 300.



$$\frac{\lambda_1}{l} = \frac{e}{r} = \frac{Nel}{WE} = \frac{Pel \sin.\alpha}{WE},$$

und dagegen für die Ausdehnung aller Fasern durch die Zugkraft R:

$$\frac{\lambda_2}{l} = \frac{R}{FE} = \frac{P \cos.\alpha}{FE}.$$

Hiernach ist die ganze Ausdehnung:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{l} = \frac{Pel \sin.\alpha}{WE} + \frac{P \cos.\alpha}{FE}.$$

Zuſammengeſetzte Feſtigkeit

Soll nun $\frac{\lambda}{l}$ die Elaſticitätsgrenze erreichen, ſo hat man $\frac{\lambda}{l} = \frac{T}{E}$, wo T den Tragmodul bezeichnet, daher

$$\frac{T}{E} = \left(\frac{e\,l\,sin.\,\alpha}{W} + \frac{cos.\,\alpha}{F}\right)\frac{P}{E}, \text{ oder}$$

$$T = \left(\frac{e\,l\,sin.\,\alpha}{W} + \frac{cos.\,\alpha}{F}\right) P \text{ ſich ergiebt}$$

Für ein Parallelepiped hat man $W = \frac{bh^3}{12}$, $F = bh$, $e = \frac{h}{2}$, daher

$$T = \left(\frac{6\,l\,sin.\,\alpha}{bh^2} + \frac{cos.\,\alpha}{bh}\right) P$$

$$= \left(\frac{6\,l\,sin.\,\alpha}{h} + cos.\,\alpha\right)\frac{P}{bh};$$

für den Cylinder hingegen ſtellt ſich, da $e = r$, $W = \frac{\pi r^4}{4}$ und $F = \pi r^2$ iſt,

$$T = \left(\frac{4\,l\,sin.\,\alpha}{r} + cos.\,\alpha\right)\frac{P}{\pi r^2} \text{ heraus.}$$

Mit Hülfe dieſer Formeln kann man entweder die Kraft beſtimmen, bei welcher ein Körper von gegebenen Dimenſionen bis zur Elaſticitätsgrenze verändert wird, oder Dimenſionen berechnen, bei welchen der Körper von einer gegebenen Kraft bis zur Elaſticitätsgrenze geſtreckt wird.

Führen wir ſtatt des Tragmoduls T die Sicherheitsmodul K_1 und K_2 für das Zerreißen und für das Abbrechen ein, ſo erhalten wir die Ausdrücke

$$bh = \left(\frac{cos.\,\alpha}{K_1} + \frac{6\,l\,sin.\,\alpha}{hK_2}\right) P \text{ und}$$

$$r^2 = \left(\frac{cos.\,\alpha}{K_1} + \frac{4\,l\,sin.\,\alpha}{rK_2}\right)\frac{P}{\pi}.$$

Für Holz iſt $K_1 = 1200$ und $\frac{K_2}{6} = 200$ einzuſetzen, weshalb man erhält:

$$bh = \left(\frac{cos.\,\alpha}{1200} + \frac{l\,sin.\,\alpha}{200h}\right) P \text{ und}$$

$$r^2 = \left(\frac{cos.\,\alpha}{3770} + \frac{l\,sin.\,\alpha}{940r}\right) P.$$

Für Gußeiſen iſt $K_1 = 3000$ und $\frac{1}{6}K_2 = 1700$, daher

$$bh = \left(\frac{cos.\,\alpha}{3000} + \frac{l\,sin.\,\alpha}{1700h}\right) P \text{ und}$$

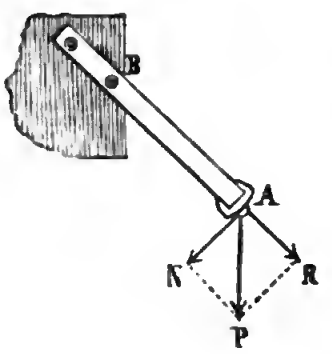
$$r^2 = \left(\frac{cos.\,\alpha}{9400} + \frac{l\,sin.\,\alpha}{8000r}\right) P.$$

Digitized by Google

Zusammengesetzte Festigkeit.

Beispiel. Welche Stärken muß man einem schief liegenden Balken AB, Fig. 301, aus Fichtenholz geben, wenn derselbe eine Länge von 9 Fuß und eine Neigung α_1 von 50 Grad gegen den Horizont hat und an seinem Ende A eine Last P von 6000 Pfund tragen soll? Bei dem Dimensionsverhältnisse $\frac{h}{b} = \frac{7}{5}$ hat man nach dem ersten der vorstehenden vier Ausdrücke, da hier $\alpha = 90 - \alpha_1 = 40$ ist:

Fig. 301.



$$\tfrac{5}{7} h^2 = \left(\frac{cos.40}{1200} + \frac{108 \,.\, sin.\,40^0}{200\,h}\right) . 6000,$$

folglich

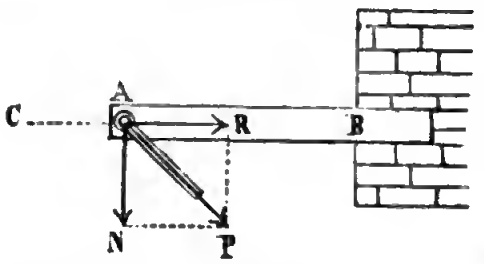
$$h^2 = \frac{7.30}{5}\left(\frac{0{,}766}{6} + \frac{108.0{,}643}{h}\right) = 5{,}36 + \frac{2917}{h}$$

oder $h^3 - 5{,}36\,h = 2917$. Nimmt man annähernd $h = \sqrt[3]{2917} = 14{,}3$, so erhält man $5{,}36 \,.\, h = 77$ und nun genauer

$$h = \sqrt[3]{2917 + 77} = \sqrt[3]{2994} = 14{,}4 \text{ Zoll, und } b = \tfrac{5}{7} h = 10{,}31 \text{ Zoll.}$$

§. 220. Wenn die Richtung der Kraft P, Fig. 302, mit der Axenrichtung BC des Balkens einen stumpfen Winkel einschließt, wenn also der eine Component R dieser Kraft nach dem Befestigungspunkte B hinwirkt, so wird außer der relativen Festigkeit noch die rückwirkende Festigkeit des Balkens in Anspruch genommen; es wird nämlich der Balken durch die Kraft $N = P\,sin.\,\alpha$ gebogen und durch die Kraft $R = P\,cos.\,\alpha$ zusammengedrückt. Bezeichnen wir wieder den spitzen Winkel PAB durch α, so haben wir für die größte Zusammendrückung der untersten Faserschicht:

Fig. 302.



$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{l} = \frac{P\,e\,l\,sin.\,\alpha}{WE} + \frac{P\,cos.\,\alpha}{FE},$$

und es stellen sich so genau dieselben Formeln heraus, wie im vorigen Paragraphen, nur müssen wir hier für K_1 den Coefficienten K_3 der rückwirkenden Festigkeit einsetzen, da der Balken in diesem Falle nicht dem Zerreißen, sondern dem Zerdrücken ausgesetzt ist.

Für Holz $K_3 = 500$ und für Gußeisen $K_3 = 20000$ eingesetzt, erhalten wir:

$$\text{für Holz} \quad bh = \left(\frac{cos.\,\alpha}{500} + \frac{l\,sin.\,\alpha}{200\,h}\right) P \text{ und}$$

$$r^2 = \left(\frac{cos.\,\alpha}{1570} + \frac{l\,sin.\,\alpha}{940\,r}\right) P,$$

Excentriſche Kraft.

dagegen für Gußeiſen $bh = \left(\frac{cos.\alpha}{20000} + \frac{l\,sin\,\alpha}{1700h}\right) P$ und

$$r^2 = \left(\frac{cos.\alpha}{62800} + \frac{l\ sin.\alpha}{8000\,r}\right) P.$$

Für die größte Ausdehnung der obern Faſernſchicht haben wir, da die Zuſammendrückung von R die Ausdehnung von N zum Theil aufhebt, nur

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{l} = \frac{P\,e\,l\ sin.\,\alpha}{WE} - \frac{P\,cos.\,\alpha}{FE},$$

und daher hierauf nicht weiter Rückſicht zu nehmen.

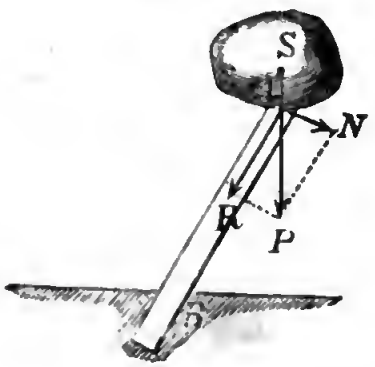
Die vorſtehenden Formeln reduciren ſich natürlich auf die einfachen Ausdrücke für die einfache Ausdehnung, Zuſammendrückung und Biegung, wenn man in ihnen $\alpha = 0$ oder 90^0, alſo

$sin.\,\alpha = 0$ und $cos.\,\alpha = 1$, oder

$sin\ \alpha = 1$ und $cos.\,\alpha = 0$ ſetzt.

Beiſpiel. Welche Stärke hat man einer runden Säule AB, Fig. 303, von Tannenholz zu geben, welche bei einer Länge l von 7 Fuß und einer Neigung α_1 von 75° gegen den Horizont eine Laſt P von 5000 Pfund zu tragen hat? Es iſt hier $\alpha = 90 - \alpha_1 = 15°$ und $l = 84$ Zoll, daher

Fig. 303.



$$r^2 = \left(\frac{cos.\,15^0}{1570} + \frac{84\,sin.\,15^0}{940\,r}\right) . 5000$$

$$= 3{,}08 + \frac{115{,}64}{r}, \text{ oder}$$

$$r^3 - 3{,}08\,r = 115{,}64.$$

Setzt man annähernd $r = \sqrt[3]{115{,}64} = 4{,}87$, und hiernach $3{,}08 . r = 3{,}08 . 4{,}87 = 15$, ſo bekommt man ſchärfer

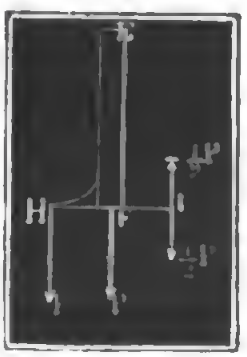
$$r = \sqrt[3]{115{,}64 + 15} = \sqrt[3]{130{,}64} = 5{,}07 \text{ Zoll},$$

und daher die geſuchte Stempelſtärke $d = 2\,r = 10{,}15$ Zoll.

Excentriſche Kräfte.

§. 221. Wenn Säulen Kräfte aufnehmen, deren Richtungen nur mit den Säulenaxen parallel laufen, nicht aber mit dieſen Axen zuſammenfallen, ſo wird die zuſammengeſetzte Feſtigkeit ebenfalls in Anſpruch genommen. Es ſei EF, Fig. 304, eine Hängeſäule mit einer excentriſch wirkenden Zugkraft P, und a der Abſtand FH der Kraftrichtung von der Axenrichtung dieſer Säule, übrigens aber ſeien die Bezeichnungen die ſeither ſtets in Anwendung gekommenen. Verlängern wir FH rückwärts, machen wir $FL = FH = a$, und denken wir uns in L noch zwei entgegengeſetzte und ſich ſelbſt wieder aufhebende Kräfte $+\frac{P}{2}$ und $-\frac{P}{2}$ parallel

Fig. 304.



zu P wirkend. Aus $+\frac{P}{2}$ und der einen Hälfte von P entſpringt dann eine in der Axenrichtung des Körpers ziehende Kraft $\frac{P}{2}+\frac{P}{2}=P$, und aus $-\frac{P}{2}$ und der andern Hälfte von P entſpringt ein Kräftepaar $\left(\frac{P}{2}, -\frac{P}{2}\right)$ mit dem Momente Pa. Die Axenkraft P dehnt die ſämmtlichen Faſern des Körpers gleichmäßig um $\frac{\lambda_1}{l}=\frac{P}{FE}$ aus, das Kräftepaar hingegen dehnt die Faſern auf der einen Seite aus und drückt dieſelben auf der andern Seite zuſammen, und es iſt die von demſelben hervorgebrachte größte Ausdehnung oder Zuſammendrückung

$$\frac{\lambda_2}{l}=\frac{Pae}{WE}.$$

Zuſammengeſetzte Feſtigkeit.

Durch Addition bekommen wir nun die größte Ausdehnung der von der neutralen Axe der Säule am meiſten abſtehenden Faſer:

$$\frac{\lambda}{l}=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{l}=\frac{P}{FE}+\frac{Pae}{WE}.$$

Durch Einführung eines Tragmoduls T oder durch Gleichſetzen von $\frac{\lambda}{l}$ und $\frac{T}{E}$, erhalten wir nun

$$T=\frac{P}{F}+\frac{Pae}{W}.$$

Für eine parallelepipediſche Säule iſt, wenn a in der Ebene bh liegt,

$$bh=\left(1+\frac{6a}{h}\right)\frac{P}{T},$$

und für eine cylindriſche Säule

$$r^2=\left(1+\frac{4r}{h}\right)\frac{P}{\pi T}.$$

Führt man aber, um der praktiſchen Anwendung mehr zu entſprechen, ſtatt des Tragmoduls, Sicherheitscoefficienten K_1 und K_2 ein, ſo erhält man die Ausdrücke

$$bh=\left(\frac{1}{K_1}+\frac{6a}{K_2h}\right)P \text{ und}$$

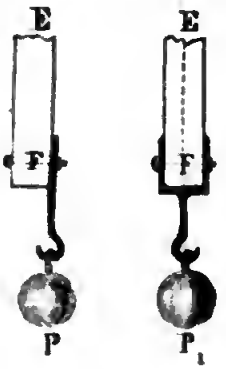
$$r^2=\left(\frac{1}{K_1}+\frac{4a}{K_2r}\right)\frac{P}{\pi}.$$

Es läßt ſich hiernach ermeſſen, daß durch die excentriſche Wirkung einer Zugkraft P, Fig. 305 (a. folg. S.), die Feſtigkeit weit ſtärker in An-

Excentriſche Kräfte.

ſpruch genommen wird, als durch eine Zugkraft P_1, Fig. 306, in der Axenrichtung EF. Wirkt z. B. die Kraft am Umfange einer parallelepipediſchen Säule, und zwar im Abſtande $\frac{h}{2}$ von der Axe, ſo hat man

Fig. 305. Fig. 306.



$$bh = (1+3)\frac{P}{T}, \text{ daher } P = \frac{bhT}{4};$$

es iſt alſo die Tragkraft P in dieſem Falle nur ein Viertel von der Kraft, welche die Säule auszuhalten vermag, wenn ihr Angriffspunkt in die Axe der Säule fällt.

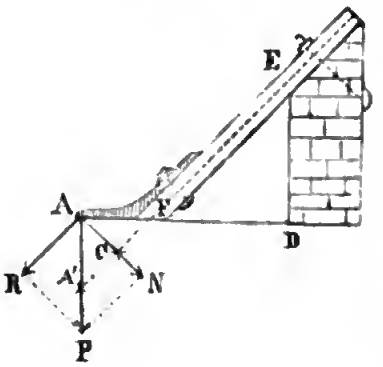
Für eine cylindriſche Säule mit einer am Umfange derſelben angreifenden Zugkraft iſt $a = r$ und daher

$$r^2 = (1+4)\frac{P}{\pi T}, \text{ d. i. } P = \tfrac{1}{5}\pi r^2 T,$$

alſo die Tragkraft nur ein Fünftel von der unmittelbar in der Axe ziehenden Kraft.

§. 222. Wirkt die Kraft P, Fig. 307, ſchief und excentriſch zugleich auf einen Balken EF, ſo erleiden deſſen äußerſte Fibern eine dreifache Ausdehnung. Der Component

Fig. 307.



$$N = P \sin.\alpha$$

dieſer Kraft, welcher rechtwinkelig gegen die Axe EF des Balkens wirkt, bringt die gewöhnliche Biegung hervor, und der Component $R = P \cos.\alpha$ bewirkt eine Dehnung und Biegung, wie wir ſie bereits im vorigen Paragraphen kennen gelernt haben. Die größte Ausdehnung, welche $N = P \sin.\alpha$ bewirkt, iſt

$$\frac{\lambda_1}{l} = \frac{Nel}{WE} = \frac{Pel \sin.\alpha}{WE},$$

die Ausdehnungen der Kraft $R = P \cos.\alpha$ aber ſind

$$\frac{\lambda_2}{l} = \frac{R}{FE} = \frac{P \cos.\alpha}{FE} \text{ und}$$

$$\frac{\lambda_3}{l} = \frac{Rea}{WE} = \frac{Pea \cos.\alpha}{WE},$$

wofern nur a der Normalabſtand AC des Angriffspunktes A von der Axenrichtung des Körpers und l das durch N von der Axe des Balkens abgeſchnittene Stück EC bezeichnet, α, e u. ſ. w. aber die alten Bedeutungen behalten.

Hiernach folgt die größte Ausdehnung, und zwar der äußerſten Faſerſchicht Excentriſche Kraft.

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{l} = \left[\frac{e\,l\,sin.\alpha}{W} + \left(\frac{e\,a}{W} + \frac{1}{F}\right) cos.\alpha\right]\frac{P}{E};$$

und da für den Fall, daß mit dieſer Ausdehnung die Elaſticitätsgrenze erreicht wird, $\frac{\lambda}{l} = \frac{T}{E}$ iſt, ſo erhält man für den Tragmodul

$$T = \left[\frac{e\,l\,sin.\alpha}{W} + \left(\frac{e\,a}{W} + \frac{1}{F}\right) cos.\alpha\right] P.$$

Iſt der Balken parallelepipediſch, und führt man ſtatt T einen Sicherheitsmodul (K_1) für das Zerreißen und einen für das Zerbrechen (K_2) ein, ſo erhält man für deſſen Querſchnitt den Ausdruck

$$bh = \left(\frac{cos.\alpha}{K_1} + \frac{6\,(l\,sin.\alpha + a\,cos.\alpha)}{h\,K_2}\right) P.$$

Denſelben Ausdruck würden wir auch erhalten haben, wenn wir uns den Angriffspunkt A der Kraft nach A_1, in die Axenrichtung des Körpers verlegt gedacht und dann in den Formeln des §. 219 ſtatt l, $A_1E = l_1$, alſo ſtatt $l\,sin.\alpha$, $AD = l_1\,sin.\alpha$ eingeführt hätten. Thun wir das letztere, ſo erhalten wir die Formel

$$bh = \left(\frac{cos.\alpha}{K_1} + \frac{6\,l_1\,sin.\alpha}{h\,K_2}\right) P,$$

daher für Holz

$$bh = \left(\frac{cos.\alpha}{1200} + \frac{l_1\,sin.\alpha}{200\,h}\right) P,$$

und für Gußeiſen

$$bh = \left(\frac{cos.\alpha}{3000} + \frac{l_1\,sin.\alpha}{1700\,h}\right) P.$$

Beiſpiel. Wenn der Angriffspunkt der Kraft $P = 6000$ Pfd. des im Beiſpiele zu §. 219 angegebenen Balkens, für welchen $l = 108$ Zoll, $\alpha = 40°$, und $\frac{h}{b} = \frac{7}{5}$ iſt, um $a = 20$ Zoll von der Axe dieſes Balkens abſteht, ſo hat man nach einer der letzten Formeln

$$\tfrac{7}{5}\,h^2 = \left(\frac{cos.\,40°}{1200} + \frac{108\,sin.\,40 + 20\,cos.\,40°}{200\,h}\right) \cdot 6000, \text{ oder}$$

$$h^3 = \frac{7\,.\,30}{5}\left(\frac{0{,}766}{6} + \frac{69{,}4 + 15{,}3}{h}\right) = 5{,}36 + \frac{3557}{h}, \text{ alſo}$$

$$h^3 - 5{,}36\,h = 3557.$$

Hiernach iſt annähernd $h = \sqrt[3]{3557} = 15{,}3$ Zoll, daher genauer

$h = \sqrt[3]{3557 + 5{,}36\,.\,15{,}3} = \sqrt[3]{3639} = 15{,}38$ Zoll und
$b = \frac{5}{7}\,h = 10{,}98$ Zoll.

Säulen. §. 223. Für Trag- oder Standſäulen, wie EF, Fig. 308, 309 und 310, laſſen ſich ähnliche Formeln angeben, wie im Vorſtehenden für Hängeſäulen.

Fig. 308.

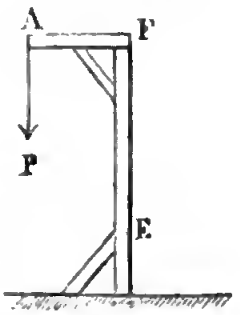


Fig. 309.

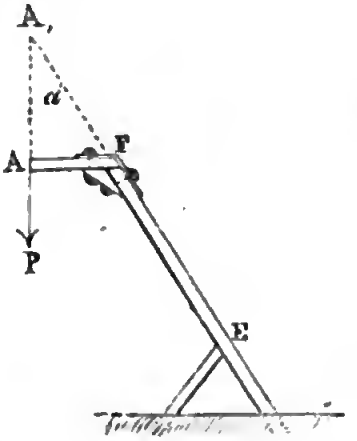
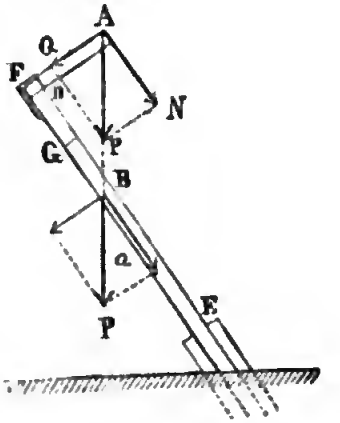


Fig 310.



Bei der vertikalen Säule EF, Fig. 308, hat man ſtatt der Ausdehnungskraft eine Zuſammendrückungskraft P, übrigens aber noch ein Kräftepaar, welches die bekannte Biegung oder einſeitige Ausdehnung und Zuſammendrückung hervorbringt, in Betracht zu ziehen; es iſt daher die größte Zuſammendrückung

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{P}{FE} + \frac{Pae}{WE},$$

und hiernach genau wie im §. 221

$$T = \frac{P}{F} + \frac{Pae}{W},$$

folglich für ein Parallelepiped

$$bh = \left(1 + \frac{6a}{h}\right)\frac{P}{T},$$

und für einen Cylinder

$$r^2 = \left(1 + \frac{4r}{h}\right)\frac{P}{T};$$

oder, wenn man die Sicherheitsmodul K_2 für das Abbrechen und K_3 für das Zerdrücken einführt:

$$bh = \left(\frac{1}{K_3} + \frac{6a}{K_2 h}\right) P \text{ und}$$

$$r^2 = \left(\frac{1}{K_3} + \frac{4a}{K_2 r}\right)\frac{P}{\pi}.$$

Steht die Säule ſchief, wie in Fig. 309, ſchließt alſo die Kraftrichtung mit der Axenrichtung einen Winkel $PA_1F = \alpha$ ein, ſo tritt im Weſentlichen wieder der Fall in Fig. 307 ein, nur hat man es hier mit einer

Zuſammendrückung zu thun und daher ſtatt K_1 den Coefficienten K_3 des Zerdrückens einzuführen. Es gelten daher hier die Formeln Säulen.

$$bh = \left(\frac{cos.\alpha}{K_3} + \frac{6\,(l\,sin.\alpha + a\,cos.\alpha)}{h\,K_2}\right) P \text{ und}$$

$$r^2 = \left(\frac{cos.\alpha}{K_3} + \frac{4\,(l\,sin.\alpha + a\,cos.\alpha)}{r\,K_2}\right) \frac{P}{\pi}.$$

In dem Falle, welcher Fig. 310 abgebildet iſt, müſſen wir in den letzten Formeln $FA = a$ negativ, oder ſtatt $l_1 sin.\alpha = l\,sin.\alpha + a\,cos.\alpha$, $l_1 sin.\alpha = BE\,sin.\alpha = l\,sin.\alpha - a\,cos.\alpha$ ſetzen. Wir erhalten ſo die Formeln für das Abbrechen an der Befeſtigungsſtelle E:

$$bh = \left(\frac{cos.\alpha}{K_3} + \frac{6\,(l\,sin.\alpha - a\,cos.\alpha)}{h\,K_2}\right) P,$$

$$r^2 = \left(\frac{cos.\alpha}{K_3} + \frac{4\,(l\,sin.\alpha - a\,cos.\alpha)}{r\,K_2}\right) \frac{P}{\pi}.$$

Für das Abbrechen in dem Punkte B, wo die Kraftrichtung durch die Säulenaxe geht, iſt der Hebelarm von P = Null, und daher nur

$$bh = \frac{P\,cos.\alpha}{K_3} \text{ und } r^2 = \frac{P\,cos.\alpha}{\pi K_3}.$$

Für eine Stelle G zwiſchen B und F iſt, wenn $FG = l_2$ geſetzt wird,

$$bh = \left(\frac{cos.\alpha}{K_3} - \frac{6\,(a\,cos.\alpha - l_2\,cos.\alpha)}{h\,K_2}\right) P \text{ u. ſ. w.,}$$

und endlich für das Abbrechen des Armes oder Schnabels AF in F iſt wenn b_1 und h_1 die Querſchnittsdimenſionen deſſelben ſind,

$$b_1 h_1 = \left(\frac{sin.\alpha}{K_3} + \frac{6\,a\,cos.\alpha}{h_1 K_2}\right) P.$$

Beiſpiel. Welche Querſchnittsdimenſionen ſind den Hölzern galgenartiger Gerüſte in Fig. 310 zu geben, wenn die Laſt P = 7500 Pfd., die Balkenlänge $EF = l$ = 20 Fuß, die Armlänge $FA = a$ = 5 Fuß, und der Neigungswinkel α_1 der Säule gegen den Horizont = 70° iſt? Iſt der Querſchnitt der Säule kreisförmig, ſo erhalten wir für den Halbmeſſer derſelben in E:

$$r^2 = \left(\frac{cos.\,20^0}{1570} + \frac{240\,sin.20^0 - 60\,cos.20^0}{940\,r}\right) . 7500 = 4{,}5 + \frac{25{,}70\,.\,750}{94\,r},$$

daher $r^3 - 4{,}5\,r = 205$, und hieraus annähernd

$r = \sqrt[3]{205} = 5{,}9$, und genauer

$r = \sqrt[3]{231} = 6{,}14$ Zoll, alſo die Stärke = 12,28 Zoll.

An der Stelle B, und zwar $x = 60\,cotg.\,20^0 = 165$ Zoll über E iſt r^2 nur $= \frac{P\,cos.\alpha}{\pi K_3} = 4{,}5$, daher $r = 1{,}65$, alſo die Stärke = 2,3 Zoll nöthig, endlich iſt für den Querſchnitt des Schnabels AF, wenn wir $h_1 = {}^7/_8\,b_1$ nehmen,

$$^7/_7\,h_1^2 = \left(\frac{sin.\,20^0}{1570} + \frac{60\,cos.\,20^0}{940\,h_1}\right) . 7500$$

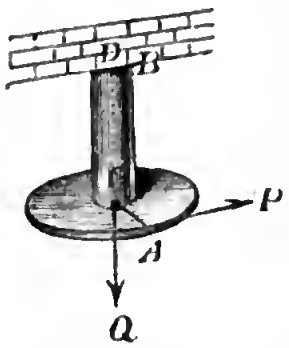
$$= 1{,}63 + \frac{450}{h_1}, \text{ daher}$$

$h_1^3 - 2{,}28\,h_1 = 630$, woraus nun

$h_1 = 8{,}66$ Zoll und $b_1 = 6{,}19$ Zoll folgt.

Säulen. §. 224. Wenn eine Säule CD, Fig. 311, von einer Axenkraft Q und von einer an einem Hebelarme $CA = a$ wirkenden Umdrehungskraft P zugleich ergriffen wird, ſo findet eine Zuſammenſetzung der abſoluten und der Torſionselaſticität ſtatt, indem ſich die Ausdehnungen, welche beide Kräfte hervorbringen, vereinigen. Es iſt die Ausdehnung, welche Q gleichmäßig im ganzen Querſchnitte von CD bewirkt, $\frac{\lambda_1}{l} = \frac{Q}{FE}$, und dagegen die Ausdehnung, welche die Torſionskraft am Umfange von CD hervorbringt, da der Torſionsbogen nach §. 216

Fig 311.



$\alpha = \frac{2Pal}{WE}$, alſo $s = e\alpha = \frac{2Pael}{WE}$ und $\lambda_1 = \frac{s^2}{2l} = \frac{(e\alpha)^2}{2l}$ iſt,

$\frac{\lambda_2}{l} = 2\left(\frac{Pae}{WE}\right)^2$; daher die vollſtändige oder Maximal-Ausdehnung

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{l} = \frac{Q}{FE} + 2\left(\frac{Pae}{WE}\right)^2.$$

Setzen wir jetzt $\frac{\lambda}{l} = \frac{T}{E}$, ſo erhalten wir für dieſen Fall der zuſammengeſetzten Feſtigkeit

$$T = \frac{Q}{F} + \frac{2}{E}\left(\frac{Pae}{W}\right)^2.$$

Für eine parallelepipediſche Säule iſt

$$F = bh,\ W = (b^2+h^2)\frac{bh}{12} \text{ und } e = \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2+h^2},$$

daher folgt hier

$$T = \frac{Q}{bh} + \frac{2}{E}\,\frac{P^2a^2(b^2+h^2)}{4(b^2+h^2)^2\frac{b^2h^2}{144}} = \frac{Q}{bh} + \frac{72\,P^2a^2}{(b^2+h^2)b^2h^2E},$$

und hiernach

$$bh = \frac{Q}{T} + \frac{72\,P^2a^2}{(b^2+h^2)bhE},$$

oder, wenn man ſtatt T zwei Sicherheitscoefficienten, einen, nämlich K_1, für das Zerreißen, und einen zweiten, nämlich $\sqrt{EK} = K_4$ für die Torſionsfeſtigkeit annimmt, ſo erhält man

$$bh = \frac{Q}{K_1} + \frac{72\,P^2a^2}{(b^2+h^2)bhK_4^2}.$$

Für einen Cylinder iſt $F = \pi r^2$, $W = \frac{\pi r^4}{2}$ und $e = r$, daher

$$r^2 = \frac{Q}{\pi K_1} + \frac{8\,P^2a^2}{\pi^2 r^4 K_4^2}.$$

Durch Substitution der gegebenen Werthe von K_1 und K_4 erhalten Säulen.
wir nun folgende Ausdrücke:

1) für Holz, bei quadratischem Querschnitte, wo $h = b$ ist,

$$b^6 = \frac{Q b^4}{1200} + \left(\frac{Pa}{190}\right)^2,$$

und bei kreisförmigem Querschnitte

$$r^6 = \frac{Q r^4}{3770} + \left(\frac{Pa}{1260}\right)^2.$$

2) für Gußeisen im ersten Falle:

$$b^6 = \frac{Q b^4}{3000} + \left(\frac{Pa}{1900}\right)^2, \text{ und im zweiten}$$

$$r^6 = \frac{Q r^4}{9400} + \left(\frac{Pa}{12600}\right)^2.$$

Wirkt die Axenkraft zusammendrückend, so hat man die Ausdehnung am äußeren Umfange

$$\frac{\lambda}{l} = 2\left(\frac{Pae}{WE}\right)^2 - \frac{Q}{FE} \text{ und daher } T = \frac{2}{E}\left(\frac{Pae}{W}\right)^2 - \frac{Q}{F},$$

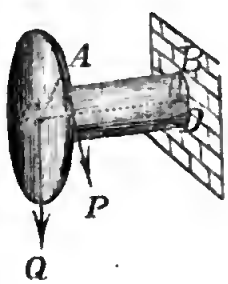
und dagegen die Zusammendrückung im Kerne

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{Q}{FE}, \text{ folglich } T = \frac{Q}{F}, \text{ oder } F = \frac{Q}{K_3}.$$

Es wirkt also hier jedenfalls die Axenkraft der Torsion entgegen.

§. 225. Liegende Radwellen haben nicht allein das Gewicht der Rä- Wellen
der, sondern auch die Umdrehungskräfte derselben aufzunehmen, und müs-
sen deshalb nicht allein durch ihre relative, sondern auch durch ihre
Torsionsfestigkeit widerstehen. Denken wir uns, um die Verhält-
nisse des Zusammenwirkens dieser zwei Kräfte zu erforschen, einen pris-
matischen Körper CDB, Fig. 312, welcher an einem Ende BD festgehal-

Fig. 312.



ten wird, und am anderen Ende C zwei Kräfte P und Q aufnimmt, von denen die eine als Umdre-
hungskraft am Hebelarme $CA = a$ wirkt, die andere aber als Biegungskraft in der Axe CD des Körpers selbst angreift. Es ist, nach dem Vorhergehenden, die von der ersten Kraft hervorgebrachte Ausdehnung $\frac{\lambda_1}{l} = 2\left(\frac{Pae}{WE}\right)^2$, und, nach dem Frühern, die der zweiten Kraft entsprechende Ausdehnung:

$\frac{\lambda_2}{l} = \frac{Q e_1 l}{W_1 E}$, und daher die größte Ausdehnung:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{l} = 2\left(\frac{Pae}{WE}\right)^2 + \frac{Q e_1 l}{W_1 E}, \text{ und}$$

$$T = \frac{2}{E}\left(\frac{Pae}{W}\right)^2 + \frac{Q e_1 l}{W_1}.$$

Wellen. folglich für einen parallelepipediſchen Balken, da hier $W = \frac{(b^2+h^2)bh}{12}$ und $e = \frac{\sqrt{b^2+h^2}}{2}$, ferner $W_1 = \frac{bh^3}{12}$ und $e_1 = \frac{h}{2}$ iſt,

$$T = \frac{72\,P^2a^2}{(b^2+h^2)b^2h^2E} + \frac{6\,Ql}{bh^2},$$

und für einen Cylinder, wo $W = \frac{\pi r^4}{2}$, $W_1 = \frac{\pi r^4}{4}$ und $e = e_1 = r$ iſt,

$$T = \frac{8\,P^2a^2}{\pi^2 r^6 E} + \frac{4\,Ql}{\pi r^3}.$$

Führt man zweierlei Sicherheitscoefficienten K_2 und K_4 ein, ſo erhält man im erſten Falle

$$(bh)^3 = \frac{6\,Qlb^2h}{K_2} + \frac{72\,P^2a^2}{\left(\frac{b}{h}+\frac{h}{b}\right)K_4},$$

und im zweiten

$$r^6 = \frac{4\,Qlr^4}{\pi K_2} + \frac{8\,P^2a^2}{\pi^2 K_4}.$$

Hiernach für Holz, wenn man noch $b = h$ ſetzt:

$$b^6 = \frac{Ql}{200}b^3 + \left(\frac{Pa}{190}\right)^2 \text{ und}$$

$$r^6 = \frac{Ql}{940}r^3 + \left(\frac{Pa}{1260}\right)^2;$$

dagegen für Gußeiſen:

$$b^6 = \frac{Ql}{1700}b^3 + \left(\frac{Pa}{1900}\right)^2 \text{ und}$$

$$r^6 = \frac{Ql}{8000}r^3 + \left(\frac{Pa}{12600}\right)^2.$$

Beiſpiel. Welche Stärke muß eine cylindriſche Radwelle aus Gußeiſen erhalten, wenn dieſelbe eine Länge von 10 Fuß hat, ein Gewicht von 20000 Pfd. und ein Kraftmoment von 40000 Fußpf. beſitzt. Wir haben hier $Pa = 20000$, und Ql, wenn wir annehmen, daß jeder der Stützpunkte die Hälfte des Radgewichtes trägt $= 10000 \,.\, 60 = 600000$, daher

$$r^6 = \frac{600000}{8000}r^3 + \left(\frac{40000\,.\,12}{12600}\right)^2, \text{ d. i. } r^6 - 75\,r^3 = (38{,}10)^2$$

und nun (nach Ingenieur S. 125)

$$r = \sqrt[3]{37{,}5 + \sqrt{(37{,}5)^2 + (38{,}1)^2}} = \sqrt[3]{37{,}5 + \sqrt{2857}}$$

$$= \sqrt[3]{90{,}95} = 4{,}5, \text{ alſo die Wellenſtärke}$$

$$d = 2r = 9 \text{ Zoll.}$$

Aus dem Radgewicht allein folgt

$$r = \sqrt[3]{75} = 4{,}22, \text{ alſo } d = 8{,}44 \text{ Zoll,}$$

und aus der Umdrehungskraft allein

$$r = \sqrt[3]{38{,}10} = 3{,}36 \text{ Zoll.}$$

Schlußanmerkung. Obgleich über keinen Gegenſtand der Mechanik bis jetzt ſo viele Verſuche angeſtellt worden ſind, als über die Elaſticität und Feſtigkeit, ſo bleibt doch noch Vieles zu unterſuchen und manche Unſicherheit zu beſeitigen übrig. Wir haben Verſuche hierüber von Ardant, Banks, Barlow, Bevan, Brix, Buffon, Burg, Duleau, Ebbels, Eytelwein, Finchan, Gerſtner, Girard, Gauthey, Fairbairn und Hodgkinſon, Lagerjhelm, Muſſchenbroek, Morveau, Navier, Rennie, Rondelet, Tredgold, Wertheim u. ſ. w. Die älteren Verſuche werden ſehr ausführlich abgehandelt in Eytelwein's Handbuch der Statik feſter Körper, Bd. II., nächſtdem in von Gerſtner's Handbuch der Mechanik, Bd. I. Eine umfänglichere Abhandlung über dieſen Gegenſtand liefert auch Burg im 19ten und 20ſten Bande der Jahrbücher des polytechn. Inſtituts zu Wien. Man findet in dieſen Schriften zum Theil auch abweichende Theorien abgehandelt. Der Verſuche von Brix und Lagerhjelm iſt ſchon oben (S. 250) gedacht worden. Eine einfache Theorie der Biegung von Brix findet man in der Abhandlung »elementare Berechnung des Widerſtandes prismatiſcher Körper gegen die Biegung«, welche aus den Verhandlungen des preußiſchen Gewerbevereins beſonders abgedruckt iſt. Der neueſten Unterſuchungen über die Elaſticität von Wertheim iſt ebenfalls ſchon oben (S. 296) gedacht worden. Ueber Hodgkinſon's Verſuche findet man einen Auszug in Moseley's Mechanical Principles of Engineering and Architecture. Tredgold handelt in einer beſondern Abhandlung »über die Stärke des Gußeiſens und anderer Metalle«, welche in Leipzig 1826 auch deutſch erſchienen iſt. Uebrigens iſt zum Studium zu empfehlen: Poncelet's Introduction à la Mécanique industrielle, ferner Navier's Résumé des leçons sur l'application de la Mécanique, Part. I., zu welcher Schrift Poncelet in ſeiner Theorie von dem Widerſtande feſter Körper (S. deſſen Lehrbuch der Anwendung der Mechanik, deutſch von Schnuſe) Ergänzungen liefert. Die Theorie der zuſammengeſetzten Feſtigkeit iſt zuerſt von dem Verfaſſer in der Zeitſchrift für das geſammte Ingenieurweſen (dem Ingenieur) von Bornemann u. ſ. w. Bd. I., abgehandelt worden. Weitere Ausführungen der Lehre von der Elaſticität und Feſtigkeit kommen im Folgenden bei der Theorie der Schwingungen und der des Stoßes vor.

Vierter Abſchnitt.

Dynamik feſter Körper.

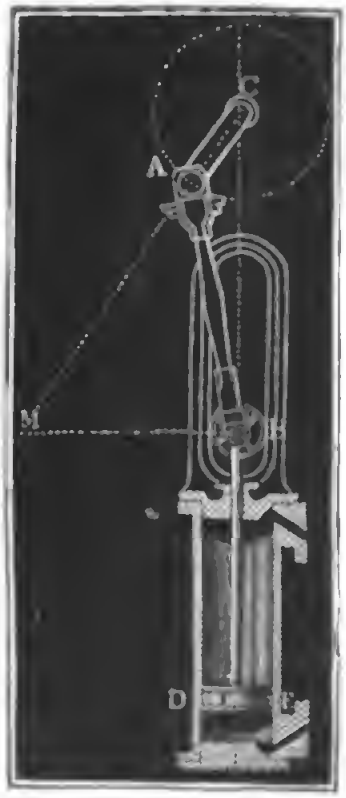
Erſtes Kapitel.

Die Lehre von den Trägheitsmomenten.

Bewegungsarten.

§. 226. Die Bewegung eines feſten Körpers iſt entweder fortſchreitend, oder drehend, oder beides zugleich. Bei der fortſchreitenden oder progreſſiven Bewegung (franz. mouvement de translation, engl. motion of translation) ſind die gleichzeitig zurückgelegten Wege der Körpertheile unter ſich parallel und gleich, bei der drehenden oder rotirenden Bewegung (franz. mouvement de rotation, engl. motion of rotation) hingegen beſchreiben die Theile des Körpers um eine gewiſſe gerade Linie, die man die Umdrehungsaxe (franz. axe de rot., engl. axis of revolution) nennt, concentriſche Kreisbögen. Die zuſammengeſetzte Bewegung läßt ſich als eine drehende Bewegung um eine bewegliche Axe anſehen. Letztere iſt wieder entweder veränderlich oder unveränderlich

Fig. 313.



In progreſſiver Bewegung befindet ſich der Kolben *DE* und die Kolbenſtange *BF* einer Pumpe oder Dampfmaſchine, Fig. 313, in drehender Bewegung aber iſt die Kurbel oder der Krummzapfen *AC*, in zuſammengeſetzter Bewegung endlich die Kurbelſtange *AB*, denn

das eine Ende B derſelben hat eine fortſchreitende, und das andere Ende A eine drehende Bewegung. Bei einem ſich wälzenden Cylinder iſt die Umdrehungsaxe unveränderlich, bei der Kurbelſtange AB hingegen iſt dieſelbe veränderlich, denn ſie iſt der Durchſchnitt M zwiſchen dem Perpendikel BM zur Axenrichtung CB der Kolbenſtange und der Verlängerung des Kurbelarmes CA (ſiehe §. 96).

§. 227. Bei der geradlinig fortſchreitenden Bewegung eines Körpers finden die §. 81 u. ſ. w. gefundenen Bewegungsgeſetze eines materiellen Punktes ihre unmittelbare Anwendung. Die Maſſentheile M_1, M_2, M_3 u. ſ. w. eines mit der Acceleration p fortſchreitenden Körpers widerſtehen der Bewegung vermöge ihrer Trägheit mit den Kräften M_1p, M_2p, M_3p u. ſ. w. (§. 53), und da die Bewegungen aller dieſer Theile in parallelen Linien erfolgen, ſo ſind auch die Richtungen dieſer Kräfte unter ſich parallel; es iſt daher die Mittelkraft von allen dieſen aus der Trägheit entſpringenden Kräften gleich der Summe $M_1p + M_2p + M_3p + \ldots = (M_1 + M_2 + M_3 + \ldots)\, p = Mp$, wo M die Maſſe des ganzen Körpers bezeichnet, und es fällt auch der Angriffspunkt derſelben mit dem Schwerpunkte des Körpers zuſammen. Um alſo einen übrigens frei beweglichen Körper von der Maſſe M oder dem Gewichte $G = Mg$ in eine geradlinig fortſchreitende Bewegung von der Acceleration p zu verſetzen, iſt eine Kraft $P = Mp = \frac{Gp}{g}$ nöthig, deren Richtung den Schwerpunkt S des Körpers enthält. Geht in Folge der Einwirkung der Kraft P die Geſchwindigkeit c während der Zurücklegung des Weges s in die Geſchwindigkeit v über, ſo iſt die von der Maſſe in ſich aufgenommene mechaniſche Arbeit (§. 71):

Geradlinige Bewegung.

$$Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M = \left(\frac{v^2 - c^2}{2g}\right) G = (h - h_1)\, G.$$

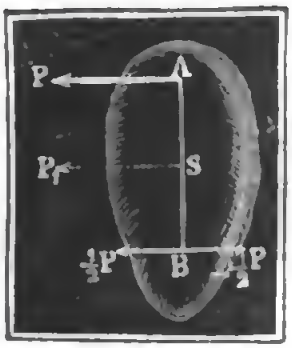
Beiſpiel. Der Kolben ſammt Stange von einer Pumpe, Dampfmaſchine, Gebläſemaſchine u. ſ. w. hat eine ungleichförmige Bewegung, bei ſeinem höchſten und tiefſten Stande iſt er ohne Geſchwindigkeit, und nahe bei ſeinem mittleren Stande iſt die Geſchwindigkeit deſſelben am größten. Iſt das Gewicht des Kolbens und ſeiner Stange $= G$, und ſeine größte Geſchwindigkeit in der Mitte ſeines Auf- oder Niederganges $= v$, ſo iſt hiernach die Arbeit, welche er vermöge ſeiner Trägheit in der erſten Hälfte ſeines Weges in ſich aufnimmt und in der zweiten Hälfte deſſelben wieder ausgiebt $= \frac{v^2}{2g} G$. Für $G = 800$ Pf. und $v = 5$ Fuß iſt dieſe Arbeit $= 0{,}016 \cdot 5^2 \cdot 800 = 320$ Fßpf.; wäre nun noch der halbe Kolbenweg $s = 4$ Fuß, ſo hätte man die mittlere Kraft, welche nöthig iſt, um den Kolben in der erſten Hälfte dieſes Weges zu beſchleunigen, und welche derſelbe in der zweiten Hälfte durch ſeine Verzögerung ausübt:

$$P = \frac{v^2}{2gs} \cdot G = \frac{320}{4} = 80 \text{ Pf.}$$

Drehende Bewegung.

§. 228. Geht die bewegende Kraft P eines Körpers AB, Fig. 314, nicht durch den Schwerpunkt S, ſo nimmt der Körper eine Drehung um dieſen Punkt an, und es ſchreitet dieſer fort, als wenn die Kraft unmittelbar in ihm angriffe, wie ſich folgendergeſtalt beweiſen läßt. Man fälle vom Schwerpunkte S ein Perpendikel SA gegen die Kraftrichtung, verlängere daſſelbe rückwärts, mache die Verlängerung SB dem Perpendikel gleich und laſſe zwei ſich das Gleichgewicht haltende und parallel mit P wirkende Kräfte, die eine $+ \frac{1}{2} P$ und die andere $- \frac{1}{2} P$ in B angreifen. Die Kraft $+ \frac{1}{2} P$ giebt in Vereinigung mit der einen Hälfte der in A angreifenden Kraft P die im Schwerpunkte S angreifende Kraft $P_1 = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} P = P$, wogegen die Kraft $- \frac{1}{2} P$ mit der zweiten Hälfte von der in A angreifenden Kraft P ein Kräftepaar bildet; es reſultirt alſo aus der excentriſch wirkenden Kraft P eine durch den Schwerpunkt gehende Kraft P, welche dieſen Punkt ſammt dem ganzen Körper progreſſiv bewegt, und ein Kräftepaar $(\frac{1}{2} P, - \frac{1}{2} P)$, welches den Körper um den Schwerpunkt dreht, ohne einen Druck in demſelben zu erzeugen. Das ſtatiſche Moment dieſes Kräftepaares iſt aber $= SA . \frac{1}{2} P + SB . \frac{1}{2} P = SA . P$ gleich dem ſtatiſchen Momente der in A angreifenden Kraft P, es iſt folglich auch die reſultirende Umdrehung dieſelbe, als wenn der Schwerpunkt S feſtgehalten würde, und P allein wirkte.

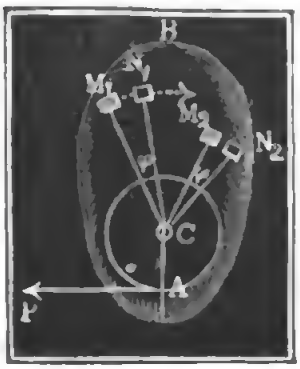
Fig. 314.



Dieſem zufolge ertheilt alſo jede beliebig gerichtete Kraft einem Körper zwei Bewegungen, eine progreſſive und eine drehende, und es iſt daher nöthig, die Geſetze der letzteren kennen zu lernen.

Wird endlich ein Körper durch eine Bahn oder eine Führung gezwungen, eine progreſſive Bewegung anzunehmen, ſo giebt eine excentriſche Kraft dieſelbe Wirkung, wie eine im Schwerpunkt angreifende, weil die Umdrehungskräfte durch die Führung aufgenommen werden.

Fig. 315.



Trägheitsmomente.

§. 229. Bei der Drehung eines Körpers AB, Fig. 315, um eine feſte Axe C legen alle Punkte deſſelben in gleichen Zeiten gleiche Winkel zurück. Dreht ſich der Körper in einer gewiſſen Zeit um den Winkel φ^0 oder Bogen $\varphi = \frac{\varphi^0}{180^0} \cdot \pi$, ſo legen die Körperelemente M_1, M_2... in den Abſtänden $CM_1 = y_1$, $CM_2 = y_2$ u. ſ. w. von der Axe die Wege φy_1, φy_2 u. ſ. w. zurück.

Trägheitsmomente.

Iſt ebenſo die Winkelgeſchwindigkeit (franz. vitesse angulaire, engl. angular velocity), d. i. die Geſchwindigkeit derjenigen Punkte des Körpers, welche um die Längeneinheit (einen Fuß) von der Umdrehungsaxe abſtehen, $= \omega$, ſo ſind die gleichzeitigen Geſchwindigkeiten der Maſſenelemente in den Entfernungen y_1, y_2 u. ſ. w. $= \omega y_1$, ωy_2 u. ſ. w., daher deren lebendige Kräfte $(\omega y_1)^2 M_1$, $(\omega y_2)^2 M_2$ u. ſ. w., und es iſt die Summe derſelben, oder die lebendige Kraft des ganzen Körpers:

$$(\omega y_1)^2 M_1 + (\omega y_2)^2 M_2 + \ldots = \omega^2 (M_1 y_1^2 + M_2 y_2^2 + \ldots).$$

Man nennt die Summe $M_1 y_1^2 + M_2 y_2^2 + \ldots$ der Producte aus den Maſſentheilen und den Quadraten ihrer Entfernungen von der Umdrehungsaxe das Trägheits-, Drehungs- oder Maſſenmoment (franz. moment d'inertie, engl. moment of inertia) des Körpers. Bezeichnen wir daſſelbe durch T, ſetzen wir alſo $T = M_1 y_1^2 + M_2 y_2^2 + \ldots$, ſo erhalten wir für die lebendige Kraft eines mit der Winkelgeſchwindigkeit ω ſich drehenden Körpers $= \omega^2 T$. Um daher einem vorher in Ruhe befindlichen Körper eine Winkelgeſchwindigkeit ω beizubringen, iſt die Arbeit $Ps = \frac{1}{2} \omega^2 T$ zu verrichten, ſowie umgekehrt ein Körper dieſe Arbeit vollbringt, wenn er aus dieſer Winkelgeſchwindigkeit in Ruhe übergeht. Iſt allgemein die anfängliche Winkelgeſchwindigkeit eines rotirenden Körpers $= \varepsilon$ und die endliche Winkelgeſchwindigkeit $= \omega$, ſo hat man für die conſumirte Arbeit $Ps = \left(\frac{\omega^2 - \varepsilon^2}{2}\right) T$, und umgekehrt, die einer aufgewendeten oder angehäuften Arbeit Ps entſprechende Endgeſchwindigkeit:

$$\omega = \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{2\,Ps}{T}}.$$

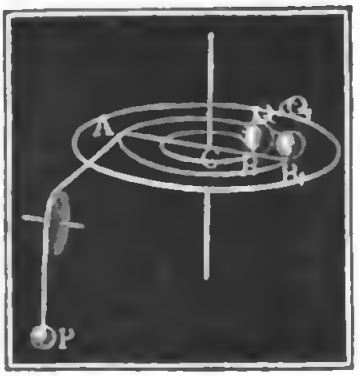
Beiſpiel. Wenn der um eine feſte Axe C drehbare und anfänglich ruhende Körper AB, Fig. 315, ein Trägheitsmoment von 50 Fßpf. beſitzt und mittels eines um eine Rolle liegenden Seiles mit einer Kraft $P = 20$ Pf. und auf einem Wege $s = 5$ Fuß in Umdrehung geſetzt wird, ſo iſt die erlangte Winkelgeſchwindigkeit dieſes Körpers $\omega = \sqrt{\frac{2Ps}{T}} = \sqrt{\frac{2.20.5}{50}} = \sqrt{4} = 2$ Fuß, d. h. jeder Punkt in der Entfernung eines Fußes von der Umdrehungsaxe legt nach Aufnahme dieſer Arbeit in jeder Secunde zwei Fuß zurück. Die Zeit einer Umdrehung iſt $t = \frac{2\pi}{\omega} = 3{,}1416$ Secunden, und die Zahl der Umdrehungen in der Minute $u = \frac{60}{t} = \frac{60}{3{,}1416} = 19{,}1$. Geht die gefundene Winkelgeſchwindigkeit $\omega = 2$ Fuß in die Geſchwindigkeit $\varepsilon = \frac{3}{4}$ Fuß über, ſo verrichtet dieſe Maſſe die Arbeit $P_1 s_1 = \left[2^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] \cdot \frac{50}{2} = \left(4 - \frac{9}{16}\right) 25$ $= \frac{55}{16} \cdot 25 = 85{,}93$ Fßpf.; hebt alſo z. B. ein Gewicht P_1 von 10 Pf., 8,593 Fuß hoch.

Reduction träger Maſſen.

§. 230. Sind die Winkelgeſchwindigkeiten zweier Maſſen M_1 und M_2 unter ſich gleich, gehören z. B. dieſe Maſſen einem und demſelben rotirenden Körper an, ſo verhalten ſich ihre lebendigen Kräfte, wie ihre Trägheitsmomente $T_1 = M_1 y_1^2$ und $T_2 = M_2 y_2^2$, und ſind nun auch dieſe unter ſich gleich, ſo beſitzen die Maſſen gleiche lebendige Kräfte. Zwei Maſſen haben alſo hiernach gleichen Einfluß auf den Bewegungszuſtand eines ſich umdrehenden Körpers, und es kann eine durch die andere erſetzt werden, ohne daß dadurch eine Aenderung im Bewegungszuſtande vor ſich geht, wenn ſie gleiche Trägheitsmomente $M_1 y_1^2$ und $M_2 y_2^2$ beſitzen, ſich alſo zu einander umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Umdrehungsaxe verhalten. Mit Hülfe der Formel $M_1 y_1^2 = M_2 y_2^2$ läßt ſich eine Maſſe von einer Entfernung auf eine andere reduciren, d. h. es läßt ſich eine Maſſe M_2 angeben, die in der Entfernung y_2 eben den Antheil an dem Bewegungszuſtande des drehenden Körpers nimmt, als die gegebene Maſſe M_1 in der Entfernung y_1; es iſt nämlich $M_2 = \frac{M_1 y_1^2}{y_2^2} = \frac{T_1}{y_2^2}$, d. i. die auf die Entfernung y_2 reducirte Maſſe iſt der Quotient aus dem Trägheitsmomente der Maſſe und dem Quadrate jener Entfernung.

Zwei an einer Radwelle ACB, Fig. 316, feſtſitzende Gewichte Q und Q_1 mit den Hebelarmen $CB = b$ und $CB_1 = a$ haben alſo vermöge ihrer Maſſen auf die Bewegung der Radwelle gleichen Einfluß, wenn $Q_1 a^2 = Q b^2$, alſo $Q_1 = \frac{Q b^2}{a^2}$ iſt. Wirkt daher eine Kraft P am Hebelarme $CA = CB_1 = a$, um eine Maſſe vom Gewichte Q im Abſtande $CB = b$ in Umdrehung zu ſetzen, ſo hat man die letztere auf den Hebelarm a der Kraft P zu reduciren, alſo ſtatt Q, $Q_1 = \frac{Q b^2}{a^2}$

Fig. 316.



und die von P bewegte Maſſe $= \left(P + \frac{Q b^2}{a^2}\right) : g$ zu ſetzen, weshalb nun die Acceleration des Gewichtes P,

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Maſſe}} = \frac{P}{P + Q\frac{b^2}{a^2}} \cdot g = \frac{P a^2}{P a^2 + Q b^2} \cdot g$$

und die Winkelacceleration $\frac{p}{a} = \frac{P a}{P a^2 + Q b^2} \cdot g$ ſich ergiebt.

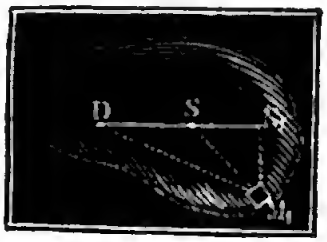
Beiſpiel. Iſt das Gewicht der rotirenden Maſſe $Q = 360$ Pf., ihr Abſtand von der Drehare $b = 2{,}5$ Fuß, das die bewegende Kraft ausmachende Gewicht $P = 24$ Pf. und deſſen Hebelarm $a = 1{,}5$ Fuß, ſo folgt die von P beſchleunigte träge Maſſe $= \left[P + \left(\frac{2{,}5}{1{,}5}\right)^2 Q\right] : g = 0{,}032 \left(24 + \frac{25}{9} . 360\right)$ $= 0{,}032 . 1024 = 32{,}77$ Pf., und daher die Beſchleunigung des Gewichtes: $p = \frac{24}{32{,}77} = 0{,}732$ Fuß, dagegen die Acceleration der Maſſe Q, $= \frac{b}{a} . p = \frac{25}{15} p = \frac{5 . 0{,}732}{3} = 1{,}22$ Fuß, und die Winkelacceleration $= \frac{p}{a} = 0{,}488$ Fuß. Nach 4 Secunden iſt die erlangte Winkelgeſchwindigkeit $\omega = 0{,}488 . 4 = 1{,}952$ Fuß, und der entſprechende Weg $= \frac{1{,}952 . 4}{2} = 3{,}904$ Fuß, folglich der Umdrehungswinkel $\varphi° = \frac{3{,}904}{n} . 180° = 1{,}84 . 180° = 223°{,}7$, endlich der von dem Gewichte P zurückgelegte Weg $s = \frac{pt^2}{2} = \frac{0{,}732 . 4^2}{2} = 5{,}86$ Fuß.

Reduction träger Maſſen.

§. 231. Kennt man das Trägheitsmoment eines Körpers oder eines Syſtems von Körpern in Hinſicht auf eine durch den Schwerpunkt S des Körpers gehende Axe, ſo läßt ſich daraus leicht das Trägheitsmoment in Hinſicht auf eine andere mit jener parallel laufende Axe finden. Es ſei S, Fig. 317, die erſte durch den Schwerpunkt gehende und D die zweite Drehungsaxe, für welche das Trägheitsmoment des Körpers beſtimmt werden ſoll; ferner ſei $SD = e$ die Entfernung beider Axen, und es ſeien $SN_1 = x_1$ und $N_1M_1 = y_1$ die rechtwinkeligen Coordinaten eines Maſſentheiles M_1 des ganzen Körpers. Das Trägheitsmoment dieſes Theiles in Beziehung auf D iſt nun $= M_1 . \overline{DM_1}^2 = M_1 (\overline{DN_1}^2 + \overline{N_1M_1}^2) = M_1 [(e + x_1)^2 + y_1^2]$, und in Beziehung auf S, $= M_1 . \overline{SM_1}^2 = M_1 . (\overline{SN_1}^2 + \overline{N_1M_1}^2) = M_1 (x_1^2 + y_1^2)$; daher die Differenz beider Momente $= M_1(e^2 + 2ex_1 + x_1^2 + y_1^2) - M_1 (x_1^2 + y_1^2) = M_1 e^2 + 2 M_1 e x_1$. Für einen andern Maſſentheil M_2 iſt ſie $= M_2e^2 + 2 M_2ex_2$, für einen dritten $= M_3e^2 + 2 M_3ex_3$ u. ſ. w., daher für alle Maſſentheile zuſammen $= (M_1 + M_2 + M_3 + \ldots) e^2 + 2e (M_1x_1 + M_2x_2 + M_3x_3 + \ldots)$. Nun iſt aber $M_1 + M_2 + \ldots$ die Summe M aller Maſſen und $M_1x_1 + M_2x_2 + \ldots$ die Summe Mx ihrer ſtatiſchen Momente, es folgt daher die Differenz zwiſchen dem Trägheitsmomente T_1 des ganzen Körpers in Beziehung auf die Axe D und dem Trägheitsmomente T in Beziehung auf S:

Reduction der Trägheitsmomente.

Fig. 317.



$$T_1 - T = Me^2 + 2eMx.$$

Reduction der Trägheitsmomente.

Da aber endlich für jede Ebene durch den Schwerpunkt die Summe der statischen Momente der Theile auf der einen Seite so groß ist, als die der Momente auf der andern Seite, die algebraische Summe aller Momente also = Null ist, so hat man auch $Mx = 0$, und daher $T_1 - T = Me^2$, d. i. $T_1 = T + Me^2$.

Es ist also das Trägheitsmoment eines Körpers für eine excentrische Axe gleich dem Trägheitsmomente in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt gehende Parallelaxe vergrößert um das Product aus der Masse des Körpers und dem Quadrate des Abstandes beider Axen.

Man ersieht auch hieraus, daß von allen Trägheitsmomenten in Beziehung auf lauter parallele Axen dasjenige am kleinsten ausfällt, dessen Axe die Schwerlinie des Körpers ist.

Trägheitshalbmesser

§. 232. Es ist nöthig, die Trägheitsmomente von den vorzüglichsten Körpern der Geometrie kennen zu lernen, weil dieselben bei den Untersuchungen der Mechanik sehr oft zur Anwendung kommen. Sind diese Körper homogen, wie wir im Folgenden stets voraussetzen wollen, so sind die Massentheile M_1, M_2 u. s. w. den entsprechenden Volumentheilen V_1, V_2 u. s. w. proportional, und es läßt sich daher das Maaß des Trägheitsmomentes, was man auch wohl Trägheitsmoment schlechtweg nennt, durch die Summe aus den Volumtheilen und den Quadraten ihrer Entfernungen von der Umdrehungsaxe ersetzen. Auch lassen sich in diesem Sinne die Trägheitsmomente von Linien und Flächen angeben.

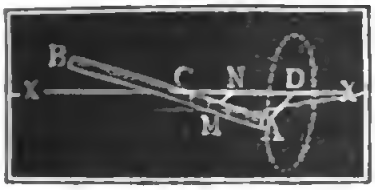
Denkt man sich die ganze Masse eines Körpers in einen Punkt zusammengedrängt, so läßt sich die Entfernung desselben von der Axe unter der Voraussetzung bestimmen, daß die so concentrirte Masse mit der im Raume vertheilten Masse einerlei Trägheitsmoment besitze. Man nennt diese Entfernung den Drehungs- oder Trägheitshalbmesser (franz. rayon d'inertie, engl. radius of gyration). Ist T das Trägheitsmoment, M die Masse und r der Trägheitshalbmesser, so hat man $Mr^2 = T$, und daher $r = \sqrt{\frac{T}{M}}$. Uebrigens ist zu erinnern, daß dieser Halbmesser keinesweges einen bestimmten Punkt, sondern nur einen Kreis angiebt, in dessen Umfang die Masse beliebig vertheilt angenommen werden kann.

Führt man in der Formel $T_1 = T + Me^2$, $T = Mr^2$ und $T_1 = Mr_1^2$ ein, so erhält man $r_1^2 = r^2 + e^2$, d. h. es ist das Quadrat des Drehungshalbmessers in Beziehung auf eine Axe gleich dem Quadrate des Drehungshalbmessers in Beziehung auf die parallele Schwerlinie plus Quadrat der Entfernungen beider Axen.

§. 233. Von einer Stange AB, Fig. 318, welche sich um eine Axe $X\overline{X}$ durch ihre Mitte C dreht, bestimmt sich das Trägheitsmoment auf folgende Weise. Es sei der Querschnitt der Stange $= F$, die halbe Länge CA derselben $= l$, und der Winkel, welchen ihre Axe mit der Drehungsaxe einschließt, d. i. $ACX = \alpha$. Theilen wir die halbe Länge in n Theile, so erhalten wir auch n Stücke, jedes von dem Inhalte $\frac{Fl}{n}$; die Entfernungen dieser Stücke von der Mitte C sind $\frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \frac{3l}{n}$ u. s. w., daher die Abstände derselben von der Axe $X\overline{X}$, wie z. B. $MN, = \frac{l}{n} \sin.\alpha, \frac{2l}{n} \sin.\alpha$. $\frac{3l}{n} \sin.\alpha$ u. s. w. und ihre Quadrate $= \left(\frac{l \sin.\alpha}{n}\right)^2, 4\left(\frac{l \sin.\alpha}{n}\right)^2$, $9\left(\frac{l \sin.\alpha}{n}\right)^2$ u. s. w. Durch Multiplication dieser mit dem Inhalte $\frac{Fl}{n}$ eines Elementes und durch Addition aller Producte ergiebt sich nun das Trägheitsmoment der halben Stange:

Stange.

Fig. 318.



$$T = \frac{Fl}{n}\left[\left(\frac{l \sin.\alpha}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{l \sin.\alpha}{n}\right)^2 + 9\left(\frac{l \sin.\alpha}{n}\right)^2 + \ldots\right]$$

$$= \frac{Fl^3 \sin.\alpha^2}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2), \text{ oder, da } 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n^3}{3} \text{ ist, } T = \frac{Fl^3 \sin.\alpha^2}{3}.$$

Da aber Fl das als Masse M zu behandelnde Volumen der halben Stange ist, so folgt endlich

$$T = \tfrac{1}{3} M l^2 \sin.\alpha^2.$$

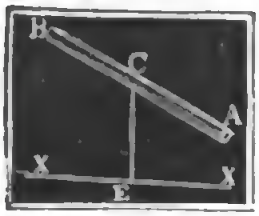
Der Abstand des Stangenendes von der Axe $X\overline{X}$ ist $AD = a = l \sin.\alpha$, daher folgt einfacher $T = \frac{1}{3} Ma^2$, welche Formel auch auf die ganze Stange AB anzuwenden ist, wenn man unter M die Masse der ganzen Stange versteht. Eine Masse M_1 am Endpunkte A der Stange hat das Trägheitsmoment $M_1 a^2$, macht man daher $M_1 = \frac{1}{3} M$, so hat sie mit der Stange einerlei Trägheitsmoment. Ob also die Masse auf die Stange gleichförmig vertheilt, oder ihr dritter Theil im Endpunkte A concentrirt ist, dies kommt in Hinsicht auf die Trägheit auf eins hinaus.

Setzt man $T = Mr^2$, so bekommt man $r^2 = \frac{1}{3} a^2$, und daher den Trägheitshalbmesser der Stange: $r = a\sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}5773 \, a$.

Steht die Stange senkrecht auf der Drehungsaxe, so ist $a = l$, daher

Stange. $T = \frac{1}{3} Ml^2$. Befindet ſich endlich die Stange AB, Fig. 319, mit der Drehungsaxe nicht in einerlei Ebene, und iſt der kürzeſte Abſtand CE beider Axen $= e$, ſo hat man nach §. 231 das Trägheitsmoment $T_1 = T + Me^2 = M(e^2 + \frac{1}{3}a^2)$.

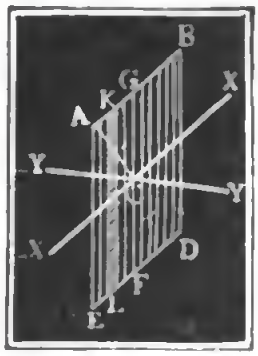
Fig. 319.



Rechteck und Parallelepiped.

§. 234. Die Trägheitsmomente von ebenen Flächen beſtimmen ſich genau ſo wie die Biegungsmomente $W = F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \ldots$ derſelben. Deshalb laſſen ſich auch die im vorigen Kapitel für verſchiedene Flächen gefundenen Werthe von W als T hier benutzen.

Fig. 320.



Für das Rechteck $ABDE$, Fig. 320, iſt das Trägheitsmoment in Hinſicht auf eine Axe $X\bar{X}$, welche parallel mit einer Seite läuft, und durch die Mitte C dieſer Figur geht, nach §. 196, $T = \frac{bh^3}{12}$, wo b die Breite $AB = DE$ parallel zur Umdrehungsaxe, und h die Höhe $AE = BD$ der Fläche bezeichnet.

Nun iſt aber der Inhalt bh dieſes Rechteckes als Maſſe M deſſelben einzuſetzen, daher das Trägheitsmoment

$$T = \frac{Mh^2}{12} = \frac{M}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2,$$

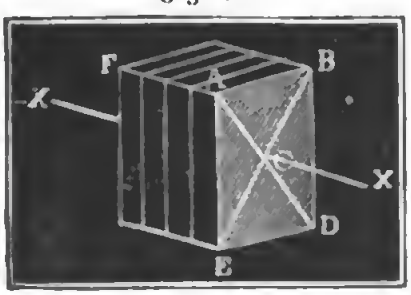
d. i. ſo groß als das des dritten Theiles dieſer Maſſe, im Abſtande $CF = CG = \frac{h}{2}$ von der Drehungsaxe angebracht.

Dreht ſich dieſes Rechteck um eine Axe $Y\bar{Y}$, welche rechtwinkelig gegen die Ebene deſſelben ſteht und ebenfalls durch die Mitte C der Figur geht, ſo hat man nach §. 217:

$$T = \frac{Mh^2}{12} + \frac{Mb^2}{12} = \frac{M(h^2+b^2)}{12} = \frac{M}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] = \frac{M}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

wenn d die Diagonale $AD = BE$ des Rechteckes bezeichnet. Man kann ſich alſo in dieſem Falle den dritten Theil der Maſſe des Rechteckes in einem der Eckpunkte A, B . . angebracht denken.

Fig. 321.

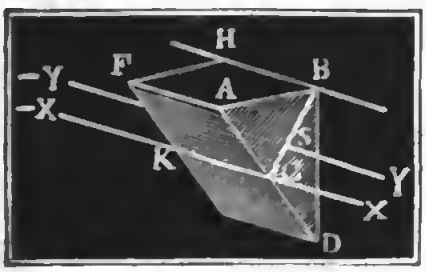


Da ſich ferner ein Parallelepiped BEF, Fig. 321, durch Parallelebenen in lauter gleiche rectanguläre Blätter zerlegen läßt, ſo gilt dieſe Formel auch für dieſes, wenn die Umdrehungsaxe

durch die Mittelpunkte von je zwei gegenüber liegenden Flächen geht. Uebrigens folgt auch aus dieſer Formel, daß das Trägheitsmoment des Parallelepipedes gleich iſt dem Trägheitsmomente des in einem der Eckpunkte A angebrachten dritten Theiles ſeiner Maſſe. Rechteck und Parallelepiped.

§. 235. Mit Hülfe der Formel für das Trägheitsmoment eines Parallelepipedes läßt ſich auch das eines dreiſeitigen Prisma's berechnen. Die Diagonalebene ADF theilt das Parallelepiped in zwei gleiche dreiſeitige Prismen mit rechtwinkelig triangulären Grundflächen ABD, Fig. 322; es iſt daher für die Drehung um eine durch die Mittelpunkte C und K der Hypotenuſe gehende Axe $X\bar{X}$ das Trägheitsmoment $= {}^1/_{12}\, Md^2$. Benutzt man nun den Lehrſatz in §. 231, ſo erhält man das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch die Schwerpunkte S und S_1 der Grundfläche gehende Axe YY: Prisma und Cylinder.

Fig. 322.



$$T = {}^1/_{12} M d^2 - M \cdot \bar{CS}^2 = M\left[\frac{d^2}{12} - ({}^1/_3 \bar{CB})^2\right] = M\left[\frac{d^2}{12} - \left(\frac{d}{6}\right)^2\right]$$

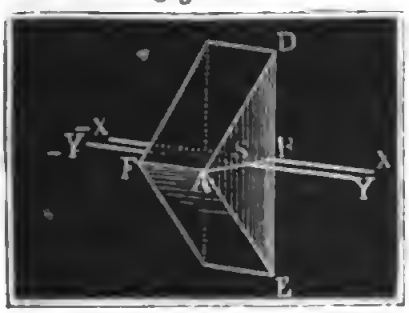
$= {}^1/_{18} Md^2$, und es folgt auch das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Seitenkante BH:

$T_1 = T + M \cdot \bar{SB}^2 = {}^1/_{18} Md^2 + M({}^1/_3 d)^2 = {}^3/_{18} Md^2 = {}^1/_6 Md^2$,

wobei d allemal die Hypotenuſe AD der triangulären Grundfläche bezeichnet.

Für ein Prisma $ADFE$, Fig. 323, mit gleichſchenkelig triangulären Grundflächen iſt das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine Axe $X\bar{X}$, welche die Mittelpunkte der Grundlinien verbindet, $T = {}^1/_6 Md^2$, wenn d die Seite AD einer Grundfläche bezeichnet, weil ſich dieſe Fläche durch die Höhenlinie AB in zwei gleiche rechtwinkelige Dreiecke zerlegen läßt. Iſt nun die Höhe AB der gleichſchenkelig triangulären Baſis $= h$, ſo hat man das Trägheitsmoment dieſes Prisma's in Beziehung auf die Axe $Y\bar{Y}$ durch die Schwerpunkte der Grundflächen:

Fig. 323.



$$T = {}^1/_6 Md^2 - M\left(\frac{h}{3}\right)^2 = M({}^1/_6 d^2 - {}^1/_9 h^2) = {}^1/_3 M({}^1/_2 d^2 - {}^1/_3 h^2),$$

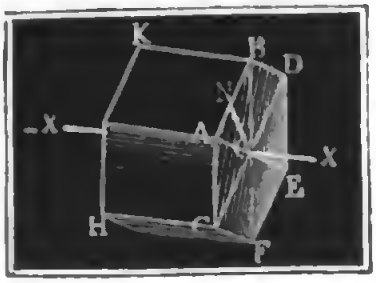
und endlich das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Kante durch die Spitzen A und F der Grundflächen:

Prisma und Cylinder.

$$T_1 = T + M\,(\tfrac{2}{3}h)^2 = M\left(\frac{d^2}{6} - \frac{h^2}{9} + \frac{4\,h^2}{9}\right) = \tfrac{1}{3}M(\tfrac{1}{2}d^2 + h^2).$$

Hiernach läßt ſich auch das Trägheitsmoment eines geraden regelmäßigen, ſich um ſeine geometriſche Axe drehenden Prisma's finden. Iſt h die Höhe CN, Fig. 324, von einem der Ergänzungsdreiecke, $CA = CB = d = r$ der Halbmeſſer der Grundfläche oder eines Ergänzungsdreieckes der Baſis, und M die Maſſe des ganzen Prisma's, ſo hat man nach der letzten Formel:

Fig. 324.



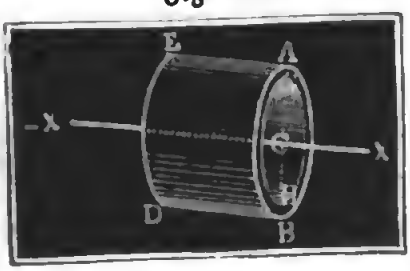
$$T = \tfrac{1}{3}M\left(\frac{r^2}{2} + h^2\right).$$

Das reguläre Prisma wird zu einem Cylinder, wenn $h = r$, daher iſt das Trägheitsmoment eines geraden Cylinders in Beziehung auf ſeine geometriſche Axe:

$$T = \tfrac{1}{3}\,M\left(\frac{r^2}{2} + r^2\right) = \tfrac{1}{2}\,Mr^2.$$

Das Trägheitsmoment eines Cylinders iſt alſo gleich dem Trägheitsmomente der halben Cylindermaſſe concentrirt in dem Umfange deſſelben, oder gleich dem Trägheitsmomente der ganzen Maſſe befindlich im Abſtande $r\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}7071\,.\,r$.

Fig. 325.



Hat man es mit einem hohlen Cylinder $ABDE$, Fig. 325, zu thun, ſo iſt das Trägheitsmoment des leeren Raumes von dem des maſſiven Cylinders abzuziehen. Iſt der äußere Halbmeſſer $CA = r_1$ und der innere Halbmeſſer $CG = r_2$, ſo hat man, nach dem Vorigen, das Trägheitsmoment des hohlen Cylinders:

$$T = \tfrac{1}{2}\,(M_1 r_1^2 - M_2 r_2^2) = \tfrac{1}{2}\pi(r_1^2\,.\,r_1^2 - r_2^2\,.\,r_2^2) = \tfrac{1}{2}\pi(r_1^4 - r_2^4)$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi(r_1^2 - r_2^2)\,(r_1^2 + r_2^2) = {}^1{}_2\,M(r_1^2 + r_2^2),$$

weil das als Maſſe zu behandelnde Volumen $= \pi\,(r_1^2 - r_2^2)$ iſt. Iſt r der mittlere Halbmeſſer $\frac{r_1 + r_2}{2}$ und b die Breite $r_1 - r_2$ der Ringfläche, ſo hat man auch $T = M\left(r^2 + \frac{b^2}{4}\right)$.

Kegel und Pyramide.

§. 236. Mit Hülfe der Formel für das Trägheitsmoment eines Cylinders läßt ſich nun auch das Trägheitsmoment eines geraden Kegels, ſowie das einer Pyramide berechnen. Es ſei ACB, Fig. 326, ein ſich um ſeine geometriſche Axe drehender Kegel, $DA = DB = r$ der Halbmeſſer ſeiner Baſis, und $CD = h$ ſeine in die Axe fallende Höhe. Führen wir in

gleichen Höhenabständen n Schnitte parallel zur Basis, so bekommen wir lauter dünne Scheiben von den Halbmessern $\frac{r}{n}, 2\frac{r}{n}, 3\frac{r}{n} \ldots n\frac{r}{n}$ und der gemeinschaftlichen Höhe $\frac{h}{n}$. Die halben Volumina dieser Scheiben sind $\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2 . \frac{h}{2n}$, $\pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2 . \frac{h}{2n}$, $\pi . \left(\frac{3r}{n}\right)^2 . \frac{h}{2n}$ u. s. w., und daher die Trägheitsmomente derselben: $\pi\left(\frac{r}{n}\right)^4 . \frac{h}{2n}$, $\pi\left(\frac{2r}{n}\right)^4 \frac{h}{2n}$, $\pi\left(\frac{3r}{n}\right)^4 \frac{h}{2n}$ u. s. w.; die Summe dieser Werthe giebt endlich das Trägheitsmoment des ganzen Kegels

Kegel und Pyramide

Fig. 326.

$$T = \frac{\pi r^4 h}{2n^5} (1^4 + 2^4 + 3^4 + .. + n^4),$$

d. i., da $1^4 + 2^4 + 3^4 + .. + n^4 = \frac{n^5}{5}$ ist,

$$T = \frac{\pi r^4 h}{10} = \frac{3}{10} . \frac{\pi r^2 h}{3} . r^2 = \frac{3}{10} Mr^2.$$

Ebenso ist für die gerade Pyramide ACE, Fig. 327, mit rectangulärer Basis, unter denselben Verhältnissen $T = \frac{1}{5} Md^2$, wenn d die halbe Diagonale DA der Basis bezeichnet.

Fig. 327.

Auch ergiebt sich durch Subtraction von zwei Trägheitsmomenten das Trägheitsmoment eines geraden abgekürzten Kegels, dessen Halbmesser r_1 und r_2 und Höhen h_1 und h_2 sind:

$$T = \frac{\pi}{10} (r_1^4 h_1 - r_2^4 h_2) = \frac{\pi h_1}{10 r_1} (r_1^5 - r_2^5),$$

oder, da die Masse

$$M = \frac{\pi}{3} (r_1^2 h_1 - r_2^2 h_2) = \frac{\pi h_1}{3 r_1} (r_1^3 - r_2^3)$$

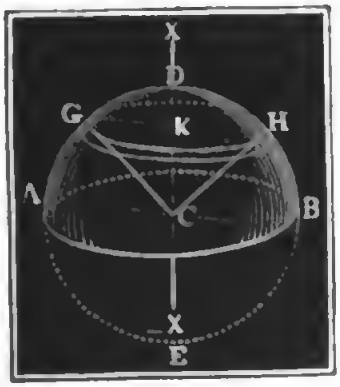
ist, $T = \frac{3}{10} M \left(\frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3}\right)$.

§. 237. Auf gleiche Weise bestimmt sich das Trägheitsmoment einer Kugel, welche sich um einen ihrer Durchmesser $DE = 2r$ dreht. Theilen wir die Halbkugel ADB, Fig. 328 (a. f. S.), durch Schnitte parallel zur Basis ACB in n gleich dicke Scheiben wie GKH u. s. w., und bestimmen wir die Mo-

Kugel.

Kugel mente dieſer. Das Quadrat $\overline{GK}^2$ des Halbmeſſers einer ſolchen Scheibe iſt $= \overline{CG}^2 - \overline{CK}^2 = r^2 - \overline{CK}^2$, daher das Trägheitsmoment derſelben $= \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{r}{n}(r^2 - \overline{CK}^2)^2$,

Fig. 328.



$$= \frac{\pi r}{2n}(r^4 - 2r^2\overline{CK}^2 + \overline{CK}^4).$$

Setzen wir nun für CK nach und nach $\frac{r}{n}$, $\frac{2r}{n}$, $\frac{3r}{n}$ u. ſ. w. bis $\frac{nr}{n}$ ein, und addiren wir die Ergebniſſe, ſo folgt das Trägheitsmoment der Kugel:

$$T = \frac{\pi r}{2n}\left[n \cdot r^4 - 2r^2\left(\frac{r}{n}\right)^2(1^2+2^2+3^2+..+n^2) + \left(\frac{r}{n}\right)^4(1^4+2^4+3^4+..+n^4)\right] = \frac{\pi r}{2n}\left[nr^4 - \frac{2r^4}{n^2}\cdot\frac{n^3}{3} + \left(\frac{r}{n}\right)^4\cdot\frac{n^5}{5}\right],$$

d. i. $T = \frac{\pi r^5}{2}(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}) = \frac{4\pi r^5}{15}$.

Nun iſt der Inhalt einer Halbkugel $M = \frac{2}{3}\pi r^3$, es läßt ſich daher ſetzen:

$$T = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}\pi r^3 \cdot r^2 = \frac{2}{5}Mr^2,$$

und nimmt man M für die ganze Kugel, ſo gilt die Formel auch für dieſe.

Der Drehungshalbmeſſer iſt $= r\sqrt{\frac{2}{5}} = 0{,}6324 \cdot r$; zwei Fünftel der Kugelmaſſe um den Kugelhalbmeſſer von der Drehungsaxe abſtehend, haben daſſelbe Trägheitsmoment wie die ganze Kugel.

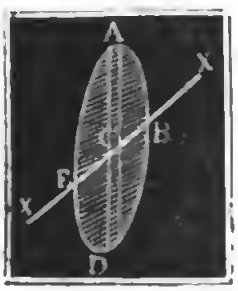
Die Formel $T = \frac{2}{5}Mr^2$ gilt auch für ein Sphäroid, deſſen Aequatorhalbmeſſer $= r$ iſt. S. §. 117.

Dreht ſich die Kugel um eine andere, von ihrem Mittelpunkte um e abſtehende Axe, ſo hat man das Trägheitsmoment

$$T = M(e^2 + \frac{2}{5}r^2).$$

Blätter. §. 238. Das Trägheitsmoment von einem kreisrunden Blatte $ABDE$, Fig. 329, welches ſich um ſeinen Durchmeſſer BE dreht, ergiebt ſich wie das Biegungsmoment eines Cylinders (ſ. §. 199) $= \frac{\pi r^4}{4} = \frac{Mr^2}{4}$, es iſt folglich der Halbmeſſer der Trägheit $= r\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}r$, d. i. die Hälfte vom Halbmeſſer des Kreiſes.

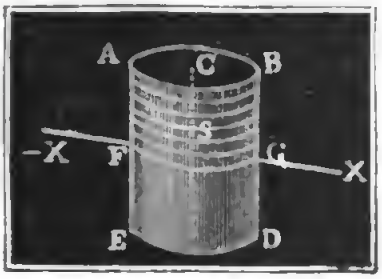
Fig. 329.



Hieraus läßt ſich nun auch das Trägheitsmoment eines Cylinders $ABDE$, Fig. 330, finden, der ſich um einen durch den Schwerpunkt S gehen-

den Durchmesser FG dreht. Ist l die halbe Höhe und r der Halbmesser des Cylinders, so hat man das Volumen des halben Cylinders $= \pi r^2 l$, und führt man Schnitte parallel zur Basis und in gleichen Abständen, so zerlegt man diesen Körper in n gleiche Theile, wovon jeder $= \frac{\pi r^2 l}{n}$ ist, und der erste um $\frac{l}{n}$, der zweite um $\frac{2l}{n}$, der dritte um $\frac{3l}{n}$ u. s. w. vom Schwerpunkte S absteht. Mittels der Formel in § 231 folgen nun die Trägheitsmomente dieser Blätter oder Scheiben:

Fig. 330.



$$\frac{\pi r^2 l}{n}\left[\tfrac{1}{4}r^2 + \left(\frac{l}{n}\right)^2\right], \frac{\pi r^2 l}{n}\left[\tfrac{1}{4}r^2 + \left(\frac{2l}{n}\right)^2\right],$$
$$\frac{\pi r^2 l}{n}\left[\tfrac{1}{4}r^2 + \left(\frac{3l}{n}\right)^2\right]$$

u. s. w., deren Summe das Trägheitsmoment des halben Cylinders:

$$T = \frac{\pi r^2 l}{n}\left[\frac{nr^2}{4} + \left(\frac{l}{n}\right)^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + .. + n^2)\right]$$
$$= \pi r^2 l\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{n^3} \cdot \frac{n^3}{3}\right) = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)$$

liefert, und das auch für den ganzen Cylinder gilt, wenn M die Masse desselben bezeichnet.

Fig. 331.

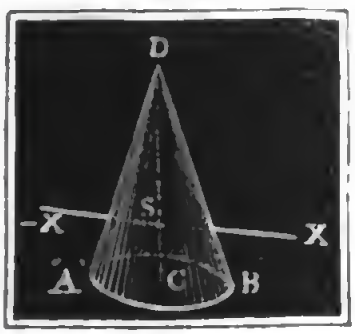


Fig. 332.

Auf gleiche Weise findet man für den geraden Kegel ABD, Fig. 331, dessen Umdrehungsaxe durch den Schwerpunkt desselben geht und auf der geometrischen Axe CD winkelrecht steht,

$$T = \tfrac{3}{20}M\left(r^2 + \frac{h^2}{4}\right).$$

Für ein Blatt ABC, Fig. 332, in Form eines rechtwinkeligen Dreieckes ist in Hinsicht auf eine durch den Schwerpunkt S und mit einer Kathete AC parallel gehende Axe nach §. 197:

$$T = \frac{bh^3}{36} = \frac{bh}{2} \cdot \frac{h^2}{18} = \tfrac{1}{18}Mh^2,$$

wenn b die Breite parallel zur Umdrehungsaxe und h die Höhe recht-

winkelig darauf angiebt. Dieſe Formel gilt ſelbſt für ein ſchiefwinkeliges Dreieck, wenn die Axe parallel zur Grundlinie läuft und h die Höhe des Dreieckes bezeichnet. Hieraus läßt ſich nun das Trägheitsmoment eines dreiſeitigen Prisma's $ADEF$. Fig. 333, finden, wenn die Umdrehungsaxe $X\overline{X}$ durch den Schwerpunkt S deſſelben und parallel zur Seite DE einer Grundfläche läuft; es folgt auf dem oben beim Cylinder eingeſchlagenen Wege

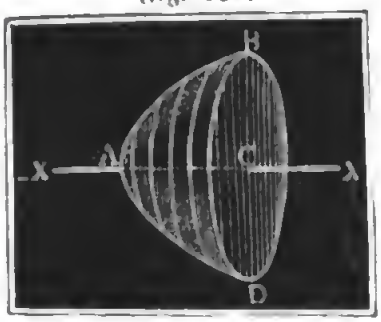
Fig. 333.

$$T = M\left(\tfrac{1}{18}h^2 + \frac{l^2}{3}\right),$$

wo l die halbe Länge des Prisma's bezeichnet.

Elementr. §. 239. Das Trägheitsmoment eines Rotationsparaboloides BAD, Fig. 334, welches ſich um ſeine Rotationsaxe AC dreht, wird ähnlich wie das einer Kugel beſtimmt. Iſt der Halbmeſſer der Baſis $CB = CD = a$, die Höhe $CA = h$, und läßt man den Körper aus n Scheiben, jede von der Höhe $\frac{h}{n}$ beſtehen, ſo hat man die Inhalte dieſer

Fig. 334.



$$= \frac{h}{n}\,.\,\pi\,.\,\frac{1}{n}a^2, \frac{h}{n}\pi\,.\,\frac{2}{n}a^2, \frac{h}{n}\pi\,.\,\frac{3}{n}\,a^2$$

u. ſ. w., weil ſich die Quadrate der Halbmeſſer wie die Höhen verhalten. Hieraus ergeben ſich die Trägheitsmomente

$$= \frac{h}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^4}{n^2}, \frac{h}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{4a^4}{n^2}, \frac{h}{n}\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{9a^4}{n^2}$$

u. ſ. w., und daher folgt endlich das Trägheitsmoment des ganzen Paraboloides:

$$T = \frac{\pi a^4 h}{2n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + .. + n^2) = \frac{\pi a^4 h}{2n^3}\cdot\frac{n^3}{3} = \frac{\pi a^4 h}{6} =$$

$$\frac{\pi a^2 h}{2}\cdot\frac{a^2}{3} = \tfrac{1}{3}Ma^2,$$

weil das Volumen dieſes Körpers $M = \frac{\pi a^2 h}{2}$ iſt.

Für ein niedriges Kugelſegment läßt ſich dieſelbe Formel anwenden, iſt aber die Höhe h gegen a nicht ſehr klein, ſo hat man für das Trägheitsmoment einer Scheibe

$$= \frac{\pi h}{2n}\,.\,a^4 = \frac{\pi h}{2n}\;.\;h^2\;(2r - h)^2 \;=\; \frac{\pi h}{2n}\,.\,(4r^2h^2 - 4rh^3 + h^4)$$

zu ſetzen, wobei r den Kugelhalbmeſſer bezeichnet.

Nimmt man nun succeſſiv ſtatt h die Werthe $\frac{h}{n}, \frac{2h}{n}, \frac{3h}{n}$ u. ſ. w., ſo erhält man das Trägheitsmoment des Kugelabſchnittes: Segmente

$$T = \frac{\pi h}{2n}\left[4r^2\left(\frac{h}{n}\right)^2 \cdot \frac{n^3}{3} - 4r\left(\frac{h}{n}\right)^3 \cdot \frac{n^4}{4} + \left(\frac{h}{n}\right)^4 \cdot \frac{n^5}{5}\right]$$

$$= \frac{\pi h^3}{30}(20r^2 - 15rh + 3h^2).$$

Der Inhalt des Segmentes iſt $M = \pi h^2 (r - \frac{1}{3}h)$, daher

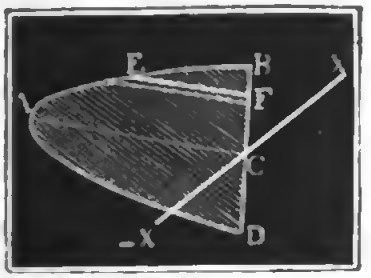
$$T = \pi h^2 (r - \tfrac{1}{3}h) \cdot \frac{2h}{3}\left(r - \tfrac{5}{12}h + \tfrac{1}{90} \cdot \frac{h^2}{r - \frac{1}{3}h}\right)$$

$$= \tfrac{2}{3} Mh \left(r - \tfrac{5}{12}h + \tfrac{1}{90} \cdot \frac{h^2}{r - \frac{1}{3}h}\right).$$

Meiſt iſt genügend genau $T = \frac{2}{3} Mh (r - \frac{5}{12}h)$. Dieſe Formel findet ihre Anwendung bei den Pendellinſen.

Für eine Parabelfläche ABD, Fig. 335, welche ſich um eine Axe $X\overline{X}$ dreht, die durch die Mitte C der Sehne BD geht und winkelrecht auf der Fläche ſteht, erhält man das Trägheitsmoment, wenn man die Fläche in lauter gleich breite Streifen, wie EF, zerlegt und die Momente dieſer addirt. Es ſei $AC = l$ die Länge und $CB = b$ die halbe Breite der Fläche, $CF = x$ die Abſciſſe und $EF = y$ die Ordinate oder Länge eines Elementes. Das Trägheitsmoment deſſelben iſt dann $= \frac{b}{n} y \left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right)$; da aber $\frac{x^2}{b^2} = \frac{l - y}{l}$, alſo $y = l\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)$ iſt, ſo folgt dieſes Moment $= \frac{b}{n}\left[lx^2\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) + l^3\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)^3\right]$. Setzen wir nun nach und nach $x = \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}$ u. ſ. w., und addiren wir die Ergebniſſe, ſo bekommen wir das Trägheitsmoment der halben Parabelfläche:

Fig. 335.



$$T = bl\left[\frac{l^2}{3n}\left(n - n + \tfrac{3}{5}n - \frac{n}{7}\right) + \frac{b^2}{3} - \frac{b^2}{5}\right]$$

$$= bl\left(\frac{16l^2}{3.35} + \frac{2b^2}{3.5}\right) = \tfrac{2}{3} bl (\tfrac{8}{35} l^2 + \tfrac{1}{5} b^2),$$

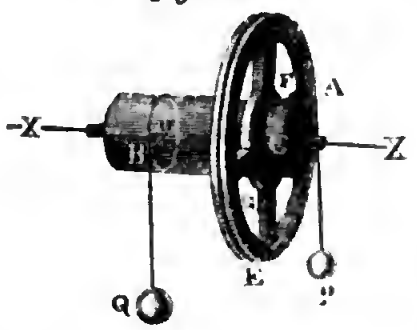
d. i. $T = \frac{1}{5} M (\frac{8}{7} l^2 + b^2)$, weil die halbe Parabelfläche $M = \frac{2}{3} bl$ iſt.

Dieſe auch für die ganze Parabelfläche geltende Formel läßt ſich auch auf ein Prisma mit paraboliſchen Grundflächen, namentlich auf ſchwingende Balanciers, anwenden.

Radwelle. §. 240. Die Theorie der Trägheitsmomente findet gerade bei Maſchinen und Inſtrumenten die häufigſten Anwendungen, weil an dieſen meiſt rotirende Bewegungen um eine feſte Axe vorkommen. Es werden deshalb in der Folge noch vielfache Anwendungen dieſer Lehre vorkommen, und möge daher genügen, zunächſt nur einige einfache Fälle derſelben abzuhandeln.

Wirken an einer Radwelle $ACDB$, Fig. 336, mit den Hebelarmen $CA = a$ und $DB = b$ zwei Gewichte P und Q mittelſt vollkommen biegſamer Schnüre, und iſt der Zapfenhalbmeſſer hinreichend dünn, um die Zapfenreibung vernachläſſigen zu können, ſo bleibt dieſelbe im Gleichgewichte, wenn die ſtatiſchen Momente $P \,.\, CA$ und $Q \,.\, DB$, einander gleich ſind, alſo $Pa = Qb$ iſt. Iſt aber das Moment vom Gewichte P größer als von Q, alſo $Pa > Qb$, ſo ſinkt P und Q ſteigt, und iſt $Pa < Qb$, ſo ſteigt P und Q ſinkt. Unterſuchen wir nun die Bewegungsverhältniſſe in einem der letzteren Fälle, ſetzen wir z. B. voraus, daß $Pa > Qb$ ſei. Die dem Gewichte Q entſprechende und am Arme b wirkende Kraft erzeugt am Hebelarme a eine Kraft $\frac{Qb}{a}$, die der dem Gewichte P entſprechenden Kraft entgegenwirkt, und daher als bewegende und in A angreifende Kraft $P - \frac{Qb}{a}$ übrig läßt. Die Maſſe $\frac{Q}{g}$ reducirt ſich beim Verſetzen aus dem Abſtande b in den Abſtand a auf $\frac{Qb^2}{ga^2}$, es iſt daher die von $P - \frac{Qb}{a}$ bewegte Maſſe $M = \left(P + \frac{Qb^2}{a^2}\right) : g$, oder, wenn das Trägheitsmoment der Radwelle $= \frac{G l^2}{g}$ und daher die auf A reducirte träge Maſſe derſelben $= \frac{Gl^2}{ga^2}$ iſt, ſchärfer:

Fig. 336.



$$M = \left(P + \frac{Qb^2}{a^2} + \frac{G l^2}{a^2}\right) : g = (Pa^2 + Qb^2 + Gl^2) : ga^2.$$

Hieraus folgt nun die Acceleration des Gewichtes P ſammt Radumfang

$$p = \frac{\text{Bewegende Kraft}}{\text{Maſſe}} = \frac{P - \frac{Qb}{a}}{Pa^2 + Qb^2 + Gl^2} \cdot ga^2$$
$$= \frac{Pa - Qb}{Pa^2 + Qb^2 + Gl^2} \cdot ga;$$

dagegen die Acceleration des steigenden Gewichtes Q oder des Wellen- Radwelle.
umfanges:

$$q = \frac{b}{a} p = \frac{Pa - Qb}{Pa^2 + Qb^2 + Gl^2}\ gb.$$

Die Spannung des Seiles von P ist $S = P - \frac{Pp}{g} = P\left(1 - \frac{p}{g}\right)$ (S. §. 73.), die des Seiles von Q, $T = Q + \frac{Qq}{g} = Q\left(1 + \frac{q}{g}\right)$, der Zapfendruck daher

$$S + T = P + Q - \frac{Pp}{g} + \frac{Qq}{g} = P + Q - \frac{(Pa - Qb)^2}{Pa^2 + Qb^2 + Gl^2}.$$

Es ist also der Druck im Zapfen bei einer umlaufenden Radwelle kleiner als bei einer im Gleichgewichte stehenden Radwelle

Aus den Accelerationen p und q lassen sich endlich die übrigen Bewegungsverhältnisse finden; es ist nach t Secunden die Geschwindigkeit von P, $v = pt$, von Q, $v_1 = qt$, und der durchlaufene Weg von P, $s = \frac{1}{2} pt^2$, von Q, $s_1 = \frac{1}{2} qt^2$.

Beispiel. Es sei das Gewicht am Rade, $P = 60$ Pf., das an der Welle $Q = 160$ Pf., der Hebelarm von jenem $CA = a = 20$ Zoll, und von diesem $DB = b = 6$ Zoll; es bestehe ferner die Welle aus einem massiven Cylinder von 10 Pf. Gewicht, das Rad aber aus zwei eisernen Ringen und vier Armen, jene zu 40 und 12 Pfund, diese zusammen von 15 Pf. Gewicht; endlich seien die Halbmesser des größeren Radringes AE, $= 20$ und 19 Zoll und die des kleineren Ringes FG, $= 8$ und 6 Zoll. Man soll die Bewegungsverhältnisse dieser Maschine angeben. Die bewegende Kraft am Radumfange ist

$$P - \frac{b}{a} Q = 60 - \frac{6}{20} \cdot 160 = 60 - 48 = 12 \text{ Pf.},$$

und das Trägheitsmoment der Maschine, wenn man noch die Zapfen und Seilmassen unberücksichtigt läßt, gleich Trägheitsmoment der Welle $= \frac{Wb^2}{2} = \frac{10 \cdot 6^2}{2}$ $= 180$, plus Moment des kleineren Ringes $= \frac{R_1 (r_1^2 + r_2^2)}{2} = \frac{12 \cdot (8^2 + 6^2)}{2}$ $= 600$, plus Moment des größeren Ringes

$$= \frac{R_2 (r_3^2 + r_4^2)}{2} = \frac{40 \cdot (20^2 + 19^2)}{2} = 15220,$$

plus Moment der Arme, annähernd $= \frac{A (r_4^3 - r_1^3)}{3 (r_4 - r_1)} = \frac{A (r_1^2 + r_1 r_4 + r_4^2)}{3}$

$= \frac{15 \cdot (19^2 + 19 \cdot 8 + 8^2)}{3} = 2885$, daher zusammen $Gl^2 = 180 + 600 + 15220 + 2885$ $= 18885$, oder für Fußmaaß $= \frac{18885}{144} = 131{,}14$. Die gesammte, auf den Radumfang reducirte Masse ist

$$M = \left(P + \frac{Qb^2 + Gl^2}{a^2}\right) : g = \left[60 + 160 \left(\frac{6}{20}\right)^2 + \frac{18885}{20^2}\right] : g$$

$$= \left(60 + 160 \cdot 0{,}09 + \frac{18885}{400}\right) \cdot 0{,}032 = (60 + 14{,}4 + 47{,}21) \cdot 0{,}032 = 121{,}61 \cdot 0{,}032$$

$= 3{,}8915$ Pf.

Atwood. Hiernach folgt die Acceleration des Gewichtes P ſammt der des Raumumfanges

$$p = \frac{P - \frac{b}{a}Q}{\frac{P+Qb^2+Gl^2}{a^2}} \cdot g = \frac{12}{3,8915} = 3,084 \text{ Fß.}, \text{ dagegen die von } Q: q = \frac{b}{a} P$$

$$= \frac{6}{20} \cdot 3,084 = 0,925 \text{ Fuß; ferner die Seilſpannung von } P, = \left(1 - \frac{p}{g}\right) P$$

$$= \left(1 - \frac{3,084}{31,25}\right) \cdot 60 = (1 - 0,099) \cdot 60 = 54,06 \text{ Pfund, dagegen von } Q,$$

$$q = \left(1 + \frac{q}{g}\right) \cdot Q = (1 + 0,925 \cdot 0,032) \cdot 160 = 1,030 \; 160 = 164,8 \text{ Pf.;}$$

und folglich der Zapfendruck $S + T = 54,06 + 164,80 = 218,86$ Pf. oder einſchließlich das Gewicht der Maſchine $= 218,86 + 77 = 295,86$ Pf. Nach 10 Sec. hat P die Geſchwindigkeit $v = pt = 3,084 \cdot 10 = 30,84$ Fuß erlangt, und den Weg $s = \frac{vt}{2} = 30,84 \cdot 5 = 154,2$ Fuß zurückgelegt, und es iſt Q um

$$s_1 = \frac{b}{a} s = 0,3 \cdot 154,2 = 46,26 \text{ Fß. geſtiegen.}$$

§. 241. Das Gewicht P, welches dem Gewichte Q die Acceleration $q = \frac{Pab - Qb^2}{Pa^2+Qb^2+Gl^2} \cdot g$ ertheilt, kann auch durch ein anderes Gewicht P_1 erſetzt werden, ohne die Acceleration von Q zu verändern, wenn daſſelbe an einem Hebelarme a_1 wirkt, für welchen iſt

$$\frac{P_1 a_1 - Qb}{P_1 a_1^2 + Qb^2 + Gl^2} = \frac{Pa - Qb}{Pa^2 + Qb^2 + Gl^2}.$$

Die Größe $\frac{Pa^2 + Qb^2 + Gl^2}{Pa - Qb}$ durch k bezeichnet, erhält man $a_1^2 - ka_1 = -\frac{Qb(b+k) + Gl^2}{P_1}$, und den in Frage ſtehenden Hebelarm

$$a_1 = \tfrac{1}{2} k \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - \frac{Qb(b+k) + Gl^2}{P_1}}.$$

Auch läßt ſich mit Hülfe der Differenzialrechnung finden, daß Q vom Gewichte P dann am ſtärkſten accelerirt wird, wenn der Hebelarm des letzten der Gleichung $Pa^2 - 2Qab = Qb^2 + Gl^2$ entſpricht, alſo

$$a = \frac{bQ}{P} + \sqrt{\left(\frac{bQ}{P}\right)^2 + \frac{Qb^2 + Gl^2}{P}} \text{ iſt.}$$

Die im Vorſtehenden gefundenen Formeln nehmen eine complicirtere Geſtalt an, wenn auf die Reibung der Zapfen und Steifigkeit der Seile Rückſicht genommen wird. Setzen wir den Inbegriff der ſtatiſchen Momente beider Widerſtände $= Fr$, ſo iſt ſtatt der bewegenden Kraft $P - \frac{b}{a}Q$, der Werth $P - \frac{Qb + Fr}{a}$ zu ſubſtituiren, weshalb z. B. die Beſchleu-

nigung von Q, $q = \frac{(Pa - Fr)\,b - Qb^2}{Pa^2 + Qb^2 + Gl^2} \cdot g$ und Radwelle.

$$a = \frac{Qb + Fr}{P} + \sqrt{\left(\frac{Qb+Fr}{P}\right)^2 + \frac{Qb^2 + Gl^2}{P}}$$ ausfällt.

Beispiele. 1) Wenn die Gewichte $P = 30$ Pf. $Q = 80$ Pf., an den Hebelarmen $a = 2$ Fß. und $b = \frac{1}{2}$ Fß. einer Radwelle wirken und das Trägheitsmoment dieser $Gl^2 = 60$ beträgt, so ist die Beschleunigung des steigenden Gewichtes Q:

$$q = \frac{30.2.\frac{1}{2} - 80.(\frac{1}{2})^2}{30.2^2 + 80.(\frac{1}{2})^2 + 60} \cdot g = \frac{30 - 20}{120 + 20 + 60} \cdot 31{,}25 = \frac{312{,}5}{200}$$

$= 1{,}5625$ Fß. Soll aber ein Gewicht $P_1 = 45$ Pf. dieselbe Beschleunigung von Q hervorbringen, so ist der Hebelarm von P_1:

$$a_1 = \frac{k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - \frac{80.\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+k)+60}{45}}, \text{ oder da } k = \frac{200}{60-40} = 10$$

ist, $a_1 = 5 \pm \sqrt{25 - \frac{32}{3}} = 5 \pm \frac{1}{3}.11{,}358 = 5 \pm 3{,}786 = 8{,}786$ Fß. oder 1,214 Fuß.

2) Die Beschleunigung von Q fällt am größten aus, wenn der Hebelarm der Kraft oder der Halbmesser des Rades

$$a = \frac{\frac{1}{2}.80}{30} + \sqrt{\left(\frac{40}{30}\right)^2 + \frac{20+60}{30}} = \frac{4}{3} + \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{24}{9}} = \frac{4 + \sqrt{40}}{3}$$

$= 3{,}4415$ Fß. beträgt und es ist $q = \left(\frac{30.1{,}7207 - 20}{30.(3{,}4415)^2 + 80}\right) g = \frac{31{,}621}{435{,}32} \cdot g$

$= 2{,}270$ Fß.

3) Ist das statische Moment der Reibung sammt Seilsteifigkeit $Fr = 8$, so hat man statt Qb, $Qb + Fr = 40 + 8 = 48$ zu setzen, weshalb folgt: $a = \frac{48}{30} + \sqrt{\left(\frac{48}{30}\right)^2 + \frac{8}{3}} = 1{,}6 + \sqrt{5{,}227} = 3{,}886$ und die entsprechende Maximalbeschleunigung $q = \frac{30.1{,}943 - 8.\frac{1}{2} - 20}{30.(3{,}886)^2 + 80} \cdot g = \frac{34{,}29}{533} 31{,}25$

$= 2{,}01$ Fß.

§. 242. Die §. 240. gefundenen Formeln für die Radwelle gelten Fallmaschine.
auch für die einfache feste Rolle, denn setzt man $b = a$, so geht die Radwelle in eine Rolle oder Welle über. Behält man die übrige Bezeichnung des angeführten Paragraphen bei, so hat man für die Beschleunigung, mit welcher P sinkt und Q steigt: $p = q = \frac{(P-Q)\,a^2}{(P+Q)a^2 + Gl^2} \cdot g$,

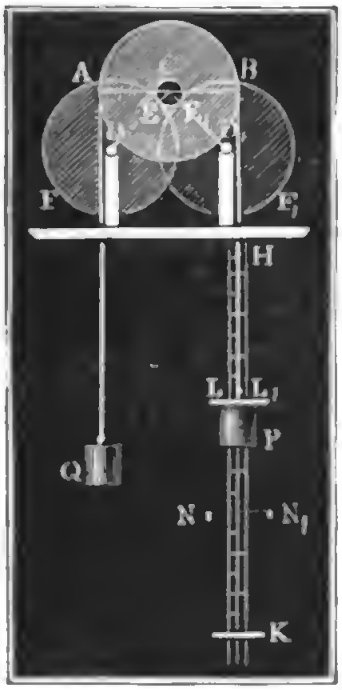
oder mit Berücksichtigung der Reibung:

$$p = q = \frac{(P-Q)\,a^2 - Far}{(P+Q)\,a^2 + Gl^2} \cdot g.$$

Um die Zapfenreibung herabzuziehen, legt man die Zapfen C der Rolle AB, Fig. 337 (a.f.S.), auf Friktionsräder DEF und $D_1E_1F_1$. Sind nun die Trägheitsmomente dieser $G_1 l_1^2$ und ihre Halbmesser $DE = D_1E_1 = a_1$,

Fallmaſchine. ſo hat man zu ſetzen: $p = q = \frac{(P-Q)a^2 - Far}{(P+Q)a^2 + Gl^2 + G_1\frac{l_1^2 r^2}{a_1^2}} \cdot g$,

Fig. 337.



weil die auf den Umfang der Frictionsräder oder der Radzapfen reducirte träge Maſſe dieſer Räder $= \frac{G_1 l_1^2}{a_1^2}$ beträgt. Durch Umkehrung erhält man die Beſchleunigung der Schwere:

$$g = \frac{(P+Q)a^2 + Gl^2 + G_1\frac{l_1^2 r^2}{a_1^2}}{(P-Q)a^2 - Far} \cdot p.$$

Bei einer kleinen Differenz $P-Q$ beider Gewichte fällt die Beſchleunigung p klein aus, es geht daher die Bewegung langſam vor ſich und es iſt der Widerſtand, welchen die Luft den Gewichten entgegenſetzt, unbedeutend, weshalb ſich mit Hülfe von Verſuchen über das Sinken von Gewichten an einer ſolche Vorrichtung die Beſchleunigung der Schwere mit ziemlicher Sicherheit ermitteln läßt, was bei einem frei fallenden Körper geradezu unmöglich iſt. Verſuche der Art hat zuerſt der Engländer Atwood (s. Atwood's Treatise on Rectilinear and Rotary Motion) angeſtellt, weshalb der Apparat unter dem Namen der Atwood'ſchen Fallmaſchine bekannt iſt. Zur Beſtimmung der Fallräume dient eine Scala HK, an der das Gewicht P niederſinkt. Aus dem Fallraume s und der entſprechenden Zeit t folgt allerdings ſchon $p = \frac{2.s}{t^2}$; hebt man aber die bewegende Kraft während des Fallens auf, indem man ein ihr gleiches und einen hohlen Ring bildendes Gewicht LL_1 von einem feſten engeren Ringe NN_1 auffangen läßt, ſo wird der übrige Theil s_1 des Fallraumes gleichförmig durchlaufen und es ergiebt ſich nun mit Hülfe der an einer guten Uhr beobachteten Zeit t_1 die Geſchwindigkeit $v = \frac{s_1}{t_1}$ und die Acceleration $p = \frac{v}{t} = \frac{s_1}{tt_1}$. Macht man endlich $t_1 = t = 1$, ſo giebt der Verſuch unmittelbar $p = s_1$. Setzt man den ſo gefundenen Werth von p in die obige Formel, ſo giebt dieſe die Beſchleunigung der Schwere.

Rollen. §. 243. Die Accelerationen der Gewichte P und Q, welche an einer Verbindung aus einer feſten Rolle AB und einer loſen Rolle EG.

Fig. 338, hängen, ergeben sich auf folgende Weise. Es seien die Gewichte der Rollen AB und EG, $= G$ und G_1, die Trägheitsmomente derselben Gl^2 und $G_1 l_1^2$ und die Halbmesser $CA = a$ und $DE = a_1$, also die auf die Umfänge reducirten Massen $M = \frac{G}{g} \cdot \frac{l^2}{a^2}$ und $M_1 = \frac{G_1}{g} \cdot \frac{l_1^2}{a_1^2}$. Sinkt das Gewicht P um einen gewissen Weg s, so steigt $Q + G_1$ auf $\frac{1}{2}s$ (§. 151), es wird daher die Arbeit $Ps - (Q + G_1)\frac{s}{2}$ verrichtet; hat bei diesem Sinken P die Geschwindigkeit v angenommen, so ist $Q + G_1$ in die Geschwindigkeit $\frac{v}{2}$ versetzt worden und es hat die Rolle AB die Umfangsgeschwindigkeit v und die Rolle EG, da bei der rollenden Bewegung progressive Bewegung und drehende einander gleich sind, die Umfangsgeschwindigkeit $\frac{v}{2}$ erlangt. Die Summe der diesen Massen und Geschwindigkeiten entsprechenden lebendigen Kräfte ist $\frac{P}{g} \cdot v^2 + \frac{Q+G_1}{g} \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{Gl^2}{a^2} \cdot v^2 + \frac{G_1 l_1}{a_1^2} \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^2$, und setzt man nun ihre Hälfte der aufgewendeten Arbeit gleich, so bekommt man die Gleichung

Rollen.

Fig. 338.

$$\left(P - \frac{(Q+G_1)}{2}\right) s = \left(P + \frac{Q+G_1}{4} + \frac{Gl^2}{a^2} + \frac{G_1 l_1^2}{4a_1^2}\right) \frac{v^2}{2g}.$$

Hiernach ist die dem von P zurückgelegten Raume s entsprechende Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2gs\left(P - \frac{Q+G_1}{2}\right)}{P + \frac{Q+G_1}{4} + \frac{Gl^2}{a^2} + \frac{G_1 l_1^2}{4a_1^2}}}$$

Für die Acceleration ist $ps = \frac{v^2}{2}$, daher hier

$$p = \left(\frac{P - \frac{Q+G_1}{2}}{P + \frac{Q+G_1}{4} + \frac{Gl^2}{a^2} + \frac{G_1 l_1^2}{4a_1^2}}\right) g.$$

Die Acceleration von $Q + G_1$ ist $= \frac{p}{2}$, und ebenso groß ist auch die drehende Acceleration von G_1.

Rollen. Die Spannung des beide Rollen verbindenden Seiles BE iſt $S = P - \left(P + \frac{G\,l^2}{a^2}\right)\frac{p}{g}$, weil die Kraft $\left(P + \frac{G\,l^2}{a^2}\right)\frac{p}{g}$ auf die Beſchleunigung von P und G verwendet wird; die Spannung des befeſtigten Seiles GH hingegen: $S_1 = S - \frac{G_1 l_1^2}{a_1^2} \cdot \frac{p}{2g}$, weil die Rolle EG durch die Differenz $S - S_1$ der Seilſpannungen in Umdrehung geſetzt wird.

Beiſpiel. An der Rollenverbindung in Fig. 338 hängen die Gewichte $P = 40$ Pf. und $Q = 66$ Pf. und es wiegt jede der maſſiven Rollen 6 Pf.; man ſucht die Beſchleunigungen dieſer Gewichte. Die bewegende Kraft iſt $P - \frac{Q+G_1}{2} = 40 - \frac{66+6}{2} = 4$ Pf., die Maſſe einer Rolle auf ihren Umfang reducirt: $\frac{G\,l^2}{g a^2} = \frac{G_1 l_1^2}{g a_1^2} = \frac{G}{2g} = \frac{6}{2g} = \frac{3}{g}$ (§. 235), und die geſammte träge Maſſe

$= \left(P + \frac{Q+G_1}{4} + \frac{G\,l^2}{a^2} + \frac{G_1 l_1^2}{4a^2}\right) : g = \left(40 + \frac{72}{4} + 3 + \frac{3}{4}\right) : g = \frac{247}{4g}$,

daher die Beſchleunigung des ſinkenden Gewichtes: $p = \frac{4}{247} \cdot 4g = \frac{16 \cdot g}{247}$

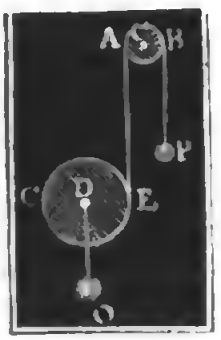
$= \frac{16 \cdot 31{,}25}{247} = \frac{500}{247} = 2{,}024$ Fß.; dagegen die Acceleration des ſteigenden Gewichtes: $\frac{p}{2} = 1{,}012$ Fß. Die Spannung des Seiles BE iſt

$S = P - \left(P + \frac{G}{2}\right)\frac{p}{g} = 40 - 43 \cdot \frac{2{,}024}{31{,}25} = 40 - 2{,}785 = 37{,}215$ Pf.;

die des Seiles GH, $= S - \frac{G}{2} \cdot \frac{p}{2g} = 37{,}215 - 3 \cdot \frac{1{,}012}{31{,}25} = 37{,}118$ Pf.

§. 244. Zuſammengeſetzter iſt die Bewegung, wenn die Rolle EG, Fig. 339, nur an einem umgeſchlagenen Seile hängt. Nehmen wir an, daß P mit der Acceleration p ſinkt, und Q mit q ſteigt, ſo erhalten wir die Acceleration der drehenden Bewegung am Umfang der loſen Rolle $q_1 = p - q$ (§. 42). Setzen wir nun die Spannung des Seiles $AE = S$, ſo erhalten wir $P - S = \left(P + \frac{G\,l^2}{a^2}\right)\frac{p}{g}$, ferner $S - (Q + G_1) = (Q + G_1)\frac{q}{g}$, da nach §. 228 angenommen werden kann, daß S in dem Schwerpunkte D von EG angreift, und endlich $S = \frac{G_1 l_1^2}{a_1^2} \cdot \frac{q_1}{g}$, da auch anzunehmen iſt, daß der Schwerpunkt D feſtgehalten und die Rolle durch S in Umdrehung geſetzt wird. Die letzten drei Formeln geben die Accelerationen

Fig. 339.



$p = \frac{P-S}{P+\frac{Gl^2}{a^2}}\,g$, $q = \left(\frac{S-(Q+G_1)}{Q+G_1}\right)g$ und $q_1 = \frac{Sa_1^2}{G_1 l_1^2}\,g$; und alle Rollen.

drei in die Gleichung $q_1 = p - q$ eingesetzt, erhält man

$$\frac{Sa_1^2}{G_1 l_1^2}\,g = \frac{P-S}{P+\frac{Gl^2}{a^2}}\,g - \frac{S-(Q+G_1)}{Q+G_1}\,g,$$

woraus nun die Seilspannung

$$S = \frac{2Pa^2+Gl^2}{\left(\frac{a_1^2}{G_1 l_1^2}+\frac{1}{Q+G_1}\right)(Pa^2+Gl^2)+a^2}$$

folgt. Aus dem Werthe für S ergeben sich nun auch durch Anwendung obiger Formeln die Beschleunigungen.

Vernachlässigen wir die Masse G der festen Rolle, und setzen wir auch $Q =$ Null, so erhalten wir einfach

$$S = \frac{2Pa^2 \,.\, G_1 l_1^2}{P(a_1^2+l_1^2)a^2 + Ga_1^2 l_1^2} = \frac{2PG_1 l_1^2}{G_1 l_1^2 + P(a_1^2+l_1^2)}.$$

Ist das Seilende AE, statt daß es über die Rolle AB weggeht, fest, so hat man die Beschleunigung $p = o$, daher $g_1 = -q$ und folglich die Spannung

$$S = \frac{(Q+G_1)G_1 l_1^2}{(Q+G_1)a_1^2+G_1 l_1^2};\ \text{für } Q = \text{Null},$$

$$S = \frac{G_1 l_1^2}{a_1^2+l_1^2}.$$

Ist der rollende Körper G_1 ein massiver Cylinder, so hat man $\frac{G_1 l_1^2}{a_1^2} = \frac{1}{2}\,G_1$, und es ergiebt sich die Spannung für den ersten Fall $S = \frac{2PG_1}{3P+G_1}$, und für den zweiten $S = \frac{G_1}{3}$. Soll im ersten Falle das Gewicht P sinken, so hat man p negativ, also $S > P$, d. i. $2PG_1 l_1^2 > PG_1 l_1^2 + P^2(a_1^2+l_1^2)$, einfach $\frac{G_1}{P} > 1 + \frac{a_1^2}{l_1^2}$; damit ferner G_1 sinke, ist nöthig, daß $S < G_1$ also $\frac{G_1}{P} > 1 - \frac{a_1^2}{l_1^2}$ sei.

Beispiel. Wenn bei der Rollenverbindung in Fig. 338 das Seil GH plötzlich reißt, so wird wenigstens anfänglich das Seil BE gespannt durch die Kraft

$$S = \frac{2P+\frac{Gl^2}{a^2}}{\left(\frac{a_1^2}{G_1 l_1^2}+\frac{1}{Q+G_1}\right)\left(P+\frac{Gl^2}{a^2}\right)+1} = \frac{2\,.\,40+3}{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{72}\right)(40+3)+1}$$

$$= \frac{83\,.\,72}{25\,.\,43+72} = \frac{5976}{1147} = 5{,}210\ \text{Pf.}$$

Rollen Es folgt die Beſchleunigung des ſinkenden Gewichtes P:

$$p = \left(\frac{P - S}{P + \frac{G i^2}{a^2}}\right) g = \left(\frac{40 - 5{,}210}{40 + 3}\right) . 31{,}25 = \frac{34{,}79}{43} . 31{,}25 = 25{,}283 \text{ Fß.},$$

ferner die Beſchleunigung der ſinkenden Rolle:

$$q = \left(\frac{Q + G_1 - S}{Q + G_1}\right) g = \left(\frac{72 - 5{,}210}{72}\right) . 31{,}25 = \frac{66{,}79}{72} . 31{,}25 = 29{,}0 \text{ Fß.},$$

und die Umdrehungsacceleration dieſer Rolle:

$$q_1 = \frac{S a_1^2}{G_1 i_1^2} . g = \frac{5{,}210}{3} . 31{,}25 = 54{,}27 \text{ Fß.}$$

Zweites Kapitel.

Von der Centrifugalkraft.

Normalkraft. §. 245. Bewegt ſich ein materieller Punkt in einer krummen Linie, ſo hat derſelbe an jeder Stelle eine von der jedesmaligen Bewegungsrichtung ablenkende Acceleration, die wir in der Phoronomie unter dem Namen Normalacceleration kennen gelernt haben. Iſt der Krümmungshalbmeſſer an einer Stelle der Bahn des bewegten Punktes $= r$ und die Geſchwindigkeit von dieſem $= v$, ſo hat man für die Normalacceleration $p = \frac{v^2}{r}$ (§. 41.). Iſt nun die Maſſe des Punktes $= M$, ſo entſpricht dieſer Normalacceleration eine Kraft, $Mp = \frac{Mv^2}{r}$, die wir als die erſte Urſache, weshalb der Punkt an jeder Stelle ſeine Bewegungsrichtung ändert, anſehen müſſen. Hat der Punkt außer der Normalkraft keine andere (Tangential-) Kraft, ſo iſt die Geſchwindigkeit v deſſelben unveränderlich $= c$, und daher die Normalkraft $P = \frac{Mc^2}{r}$ nur abhängig von der jedesmaligen Krümmung oder von dem Krümmungshalbmeſſer, und zwar kleiner bei wenig Krümmung oder großem Krümmungshalbmeſſer, und größer bei großer Krümmung oder kleinerem Krümmungshalbmeſſer; bei doppeltem Krümmungshalbmeſſer iſt z. B. die Normalkraft nur halb ſo groß als bei einfachem Krümmungshalbmeſſer. Wird ein materieller Punkt M durch eine horizontale Bahn, Fig. 340,

Fig. 340.

gezwungen, eine krumme Linie $ABDFH$ zu durchlaufen, so behält der- Normalkraft.
selbe, wenn wir die Reibung außer Acht lassen, an allen Stellen einerlei Geschwindigkeit c, und übt an jeder Stelle einen der Normalkraft gleichen Druck gegen die concave Seitenwand aus. Während der Durchlaufung des Bogens AB ist dieser Druck $= \frac{Mc^2}{CA}$, während der Durchlaufung von BD ist er $= \frac{Mc^2}{EB}$, für den Bogen DF ist er $= \frac{Mc^2}{GD}$ und für den Bogen $FH = \frac{Mc^2}{KF}$, wenn CA, EB, GD und KF die Krümmungshalbmesser der Wegtheile AB, BD, DF und FH sind.

§. 246. Bewegt sich ein materieller Punkt oder Körper im Kreise, so Centripetal- und Centrifugalkraft
wirkt die Normalkraft radial einwärts, weshalb sie denn Centripetal- oder Annäherungskraft (franz. force centripède, engl. centripetal force) genannt wird, während die Kraft, mit welcher der Körper vermöge seiner Trägheit entgegengesetzt, d. i. radial auswärts wirkt, den Namen Centrifugal-, Flieh- oder Schwungkraft (franz. force centrifuge, engl. centrifugal force) erhalten hat. Centripetalkraft ist die auf den Körper einwirkende und Centrifugalkraft ist die vom Körper zurückwirkende Gegenkraft. Beide sind an Größe einander gleich und in der Richtung entgegengesetzt (§. 62.).

Bei der Umdrehung der Planeten um die Sonne besteht die Centripetalkraft in einer Anziehungskraft der Sonne; wird aber der Körper durch eine Führung oder Leitung, ähnlich wie Fig. 340 angiebt, gezwungen, eine Kreisbahn zu durchlaufen, so wirkt die Führung durch ihre Starrheit als Centripetalkraft und der Centrifugalkraft des Körpers entgegen, ist endlich der umlaufende Körper durch einen Faden oder durch eine Stange mit dem Drehungspunkte verbunden, so ist es die Elasticität der Stange, welche sich mit der Centrifugalkraft des Körpers in's Gleichgewicht setzt und eben dadurch als Centripetalkraft wirkt.

Ist G das Gewicht des in Umdrehung befindlichen Körpers, also dessen Masse $M = \frac{G}{g}$, ist der Halbmesser des Kreises, in welchem die Umdrehung vor sich geht, $= r$ und die Umdrehungsgeschwindigkeit $= v$, so hat man nach dem letzten §. die Centrifugalkraft

$$P = \frac{Mv^2}{r} = \frac{Gv^2}{gr} = 2 \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{G}{r}, \text{ also auch } P : G = 2 \cdot \frac{v^2}{2g} : r,$$

d. h. die Centrifugalkraft verhält sich zum Gewichte des Körpers, wie die doppelte Geschwindigkeitshöhe zum Umdrehungshalbmesser.

Centripetal- und Centrifugalkraft.

Iſt die Bewegung gleichförmig, was allemal eintritt, wenn außer der Centripetalkraft keine andere Kraft (Tangentialkraft) auf den Körper wirkt, ſo läßt ſich die Geſchwindigkeit $v = c$ durch die Umdrehungszeit T ausdrücken, indem man ſetzt $c = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \frac{2\pi r}{T}$, und man erhält hiernach für die Centrifugalkraft

$$P = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \frac{M}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot Mr = \frac{4\pi^2}{gT^2} \cdot Gr.$$

Da $4\pi^2 = 39{,}4784$ und für Fußmaaß $\frac{1}{g} = 0{,}032$ iſt, ſo hat man für die Rechnungen bequemer

$$P = \frac{39{,}4784}{T^2} \cdot Mr = 1{,}2633 \cdot \frac{Gr}{T^2}.$$

Oft giebt man die Zahl n der Umdrehungen in der Minute, und erſetzt deshalb T durch $\frac{60''}{n}$, weshalb folgt

$$P = \frac{39{,}4784}{3600} n^2 Mr = 0{,}010966\, n^2 Mr = 0{,}0003509\, n^2 Gr.$$

Hiernach folgt, daß bei gleichen Umdrehungszeiten oder bei gleich viel Umdrehungen in einer gewiſſen Zeit die Centrifugalkraft wie das Product aus Maſſe und Drehungshalbmeſſer wächſt, und daß ſie unter übrigens gleichen Umſtänden den Quadraten der Umdrehungszeiten umgekehrt, oder den Quadraten der Umlaufszahlen direct proportional iſt. Da $\frac{2\pi}{T}$ die Winkelgeſchwindigkeit ω iſt, ſo läßt ſich auch endlich ſetzen:

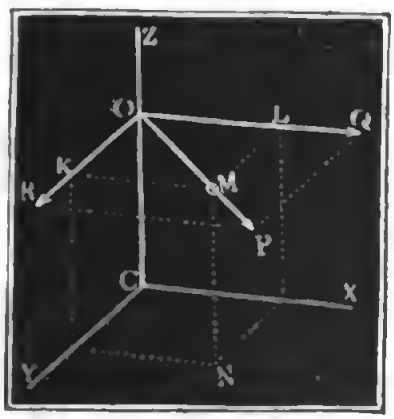
$$P = \omega^2 . Mr.$$

Beiſpiele. 1) Wenn ein Körper von 50 Pf. Gewicht einen Kreis von 3 Fuß Halbmeſſer in der Minute 400 mal durchläuft, ſo iſt ſeine Centrifugalkraft $P = 0{,}0003509 . 400^2 . 50 . 3 = 3{,}509 . 16 . 50 . 3 = 350{,}9 . 24 = 8422$ Pf. Iſt dieſer Körper durch ein Hanfſeil mit der Axe verbunden, und der Feſtigkeitsmodul für Hanfſeile (§. 189) 7000 Pf., ſo folgt $8422 = 7000 . F$, daher der Querſchnitt dieſes Seiles: $F = \frac{8422}{7000} = 1{,}203$ Quadratzoll und der Durchmeſſer deſſelben: $d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 0{,}5642\sqrt{4{,}812} = 0{,}5642 . 2{,}193 = 1{,}24$ oder $1\frac{1}{4}$ Zoll. Bei dreifacher Sicherheit iſt aber $d = 1{,}24 . \sqrt{3} = 1{,}24 . 1{,}732 = 2{,}15$ Zoll zu nehmen. 2) Aus dem Erdhalbmeſſer $r = 20\frac{1}{4}$ Million Fuß und der Umdrehungszeit oder Tageslänge $T = 24$ St. $= 24 . 60 . 60 = 86400$ Sec. folgt die Centrifugalkraft eines Körpers unter dem Aequator der Erde $P = 1{,}2633 . \frac{G . 20'250000}{86400^2} = \frac{2558}{864^2} . G = \frac{1}{290} . G$, wäre aber die Tageslänge 17mal ſo klein, alſo $\frac{24}{17} = 1$ St. 24′ 42″, ſo würde dieſe Kraft $17^2 = 289$ mal ſo groß, alſo ungefähr dem Gewichte des Körpers gleich ſein. Unter dem

Aequator wäre dann die Centrifugalkraft der Schwerkraft gleich und Körper daselbst würden ebenso wenig niederfallen als in die Höhe steigen. 3) Bei der Umdrehung des Mondes um die Erde wird die Centrifugalkraft desselben von der Anziehungskraft der Erde aufgehoben. Ist G das Gewicht des Mondes, r seine Entfernung von der Erde und T seine Umdrehungszeit um dieselbe, so folgt die Centrifugalkraft dieses Weltkörpers $= 1{,}2633 \cdot \frac{Gr}{T^2}$. Ist a der Erdhalbmesser und nimmt man an, daß die Schwerkraft in verschiedenen Entfernungen vom Mittelpunkte der Erde umgekehrt wie eine Potenz dieser Entfernungen wachse, so hat man die Schwere des Mondes oder die Anziehungskraft der Erde $= G\left(\frac{a}{r}\right)^n$, und setzen wir beide Kräfte einander gleich, so bekommen wir $\left(\frac{a}{r}\right)^n = 1{,}2633 \cdot \frac{r}{T^2}$. Nun ist $\frac{a}{r} = \frac{1}{60}$, $r = 1215$ Million Fuß, und $T = 27$ Tage 7 St. 42 Min. $= 39342$ Min. $= 39342 \cdot 60$ Sec., es folgt daher $\left(\frac{1}{60}\right)^n = \frac{1{,}2633 \cdot 1215}{393{,}4^2 \cdot 36} = \frac{1}{3600} = \left(\frac{1}{60}\right)^2$ und es ist hiernach $n = 2$, d. h. die Schwerkraft der Erde steht im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung. Centrifugal- und Centripetalkraft.

§. 247. Auf einen Inbegriff von Massen oder auf eine Masse von endlicher Ausdehnung ist die oben gefundene Formel für die Centrifugalkraft nicht unmittelbar anwendbar, weil man im Voraus nicht weiß, welcher Drehungshalbmesser r in der Rechnung einzuführen ist. Um diesen zu finden, schlagen wir aber folgenden Weg ein. Es sei in Fig. 341 Centrifugalkräfte ausgedehnter Massen.

Fig. 341.

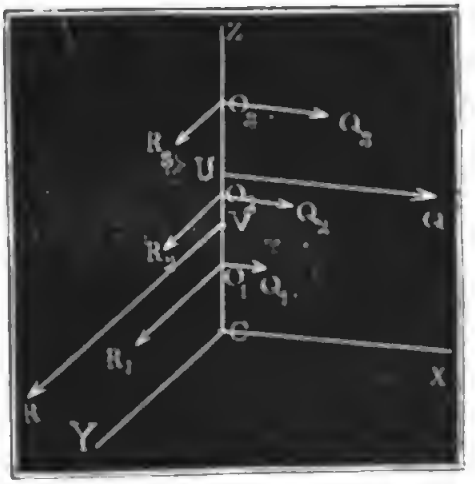


CZ die Umdrehungsaxe, CX und CY aber seine zwei rechtwinkeligen Coordinatenaxen; es sei ferner M ein Massentheil, und $MK = x$, $ML = y$ und $MN = z$ seien dessen Abstände von den Coordinatebenen YZ, XZ und XY. Da die Centrifugalkraft P radial wirkt, so läßt sich ihr Angriffspunkt nach dem Durchschnittspunkte O mit der Drehungsaxe verlegen. Zerlegen wir nun diese Kraft nach den Axenrichtungen CX und CY, so erhalten wir die Seitenkräfte $OQ = Q$ und $OR = R$, für welche gilt $OQ : OP = OL : OM$ und $OR : OP = OK : OM$, weshalb nun $Q = \frac{x}{r} P$ und $R = \frac{y}{r} P$ folgt, wobei r die Entfernung OM des Massentheilchens von der Umdrehungsaxe bezeichnet. Gehen wir auf gleiche Weise mit allen Massentheilchen zu Werke, so erhalten wir zwei Systeme von Parallelkräften, eins in der Ebene XZ und das andere in der Ebene

Centrifugalkräfte ausgedehnter Maſſen.

YZ, jedes aber auf die Axe CZ winkelrecht wirkend. Bedienen wir uns zur Unterſcheidung der Inderzahlen 1, 2, 3 u. ſ. w., ſetzen wir alſo die Maſſentheile M_1, M_2, M_3, und ihre Abſtände x_1, x_2, x_3 u. ſ. w., ſo bekommen wir hiernach die Mittelkraft des einen Syſtemes, Fig. 342,

Fig. 342



$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots = \frac{P_1 x_1}{r_1} + \frac{P_2 x_2}{r_2} + \frac{P_3 x_3}{r_3} + \ldots = \omega^2 . (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \ldots)$$

und die des andern $R = R_1 + R_2 + \ldots = \omega^2 . (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \ldots)$. Setzen wir endlich die Abſtände der Maſſentheile von der Ebene XY. CO_1, CO_2 u. ſ. w., $= z_1, z_2$ u. ſ. w., ſo erhalten wir für die Angriffspunkte U und V dieſer Mittelkräfte die Abſtände $CU = u$ und $CV = v$ durch die Gleichungen $(Q_1 + Q_2 + \ldots)\, u = Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \ldots$ und $(R + R_2 + \ldots)\, v = R_1 z_1 + R_2 z_2 + \ldots$, weshalb folgt

$$u = \frac{Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \ldots}{Q_1 + Q_2 + \ldots} = \frac{M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \ldots}{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \ldots} \text{ und}$$

$$v = \frac{R_1 z_1 + R_2 z_2 + \ldots}{R_1 + R_2 + \ldots} = \frac{M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \ldots}{M_1 y_1 + M_2 y_2 + \ldots}.$$

Es werden alſo hiernach im Allgemeinen die Centrifugalkräfte eines Maſſenſyſtemes oder eines ausgedehnten Körpers auf zwei Kräfte zurückgeführt, die ſich, ſo lange u und v ungleich ſind, nicht zu einer einzigen vereinigen laſſen.

Beiſpiel. Sind die Maſſen eines Syſtemes

$M_1 = 10$ Pf., $M_2 = 15$ Pf., $M_3 = 18$ Pf., $M_4 = 12$ Pf.

und ihre Abſtände $x_1 = 0$ Zoll, $x_2 = 4$ Zoll, $x_3 = 2$ Zoll, $x_4 = 6$ Zoll,

$y_1 = 3$ » $y_2 = 1$ » $y_3 = 5$ » $y_4 = 3$ »

$z_1 = 2$ » $z_2 = 3$ » $z_3 = 3$ » $z_4 = 0$ »

ſo hat man folgende mittleren Centrifugalkräfte

$Q = \omega^2 . (10.0 + 15.4 + 18.2 + 12.6) = 168 . \omega^2$ und

$R = \omega^2 . (10.3 + 15.1 + 18.5 + 12.3) = 171 . \omega^2$, und die Abſtände ihrer Angriffspunkte von dem Anfangspunkte C:

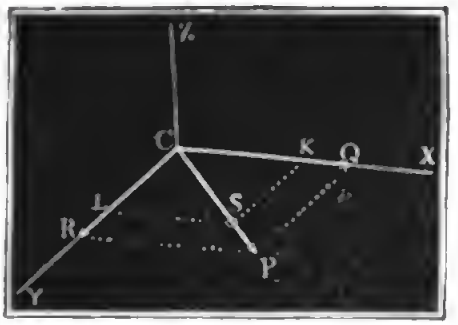
$$u = \frac{10.0.2 + 15.4.3 + 18.2.3 + 12.6.0}{10.0 + 15.4 + 18.2 + 12.6} = \frac{288}{168} = \frac{12}{7} = 1{,}714 \text{ Zoll, und}$$

$$v = \frac{10.3.2 + 15.1.3 + 18.5.3 + 12.3.0}{10.3 + 15.1 + 18.5 + 12.3} = \frac{375}{171} = \frac{125}{57} = 2{,}193 \text{ Zoll.}$$

Die Verſchiedenheit dieſer Werthe von u und v zeigt an, daß die Centrifugalkräfte durch eine einzige Kraft nicht erſetzt werden können.

§ 248. Befinden ſich die Maſſentheile in einer Ebene winkelrecht

Fig. 343.



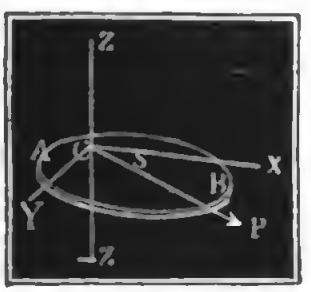
zur Axe der Umdrehung, Fig. 343, so lassen sich ihre Centrifugalkräfte in eine einzige vereinigen, weil sich ihre Richtungen in einem einzigen Punkte der Axe schneiden. Behalten wir die Bezeichnungen des vorigen §. bei, so erhalten wir die resultirende Centrifugalkraft in diesem Falle: Centrifugalkräfte ausgedehnter Massen.

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \omega^2 \sqrt{[(M_1 x_1 + M_2 x_2 + \ldots)^2 + (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \ldots)^2]}.$$

Sind nun $CK = x$ und $CL = y$ die Coordinaten des Schwerpunktes vom Massensysteme $M = M_1 + M_2 + \ldots$, so hat man $M_1 x_1 + M_2 x_2 + \ldots = Mx$ und $M_1 y_1 + M_2 y_2 + \ldots = My$, und es folgt daher die Centrifugalkraft $P = \omega^2 \sqrt{M^2 x^2 + M^2 y^2} = \omega^2 M \sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 Mr$, wofern noch $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ den Abstand CS des Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe $\overline{CZ}$ bezeichnet.

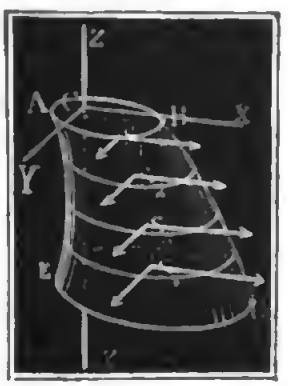
Für den Winkel $PCX = \alpha$, welchen diese Kraft mit der Axe CX einschließt, ist $tang.\,\alpha = \frac{R}{Q} = \frac{My}{Mx} = \frac{y}{x}$; es geht daher die Richtung der Centrifugalkraft durch den Schwerpunkt des Systemes und es ist dieselbe genau so groß, als wenn die sämmtlichen Massen im Schwerpunkte vereinigt wären.

Fig 344.



Für eine auf der Umdrehungsaxe $\overline{ZZ}$ rechtwinkelig stehende Scheibe AB, Fig. 344, ist hiernach die Centrifugalkraft ebenfalls $= \omega^2 Mr$, wenn M ihre Masse und r die Entfernung CS ihres Schwerpunktes S von der Axe bezeichnet. Um die Centrifugalkraft eines andern Körpers $ABDE$, Fig. 345, zu finden, zerlegen wir denselben durch Ebenen winkelrecht zur Axe $\overline{ZZ}$ in scheibenförmige Elemente, ermitteln die Schwerpunkte S_1, S_2 u. s. w. dieser, bestimmen mit Hülfe der letzteren die Centrifugalkräfte, zerlegen jede derselben nach den Axenrichtungen CX und CY in Seitenkräfte, und vereinigen die Seitenkräfte in der Ebene ZCX zu einer Mittelkraft Q, sowie die in der Ebene ZCY zu einer Mittelkraft R.

Fig. 345.



Befinden sich die Schwerpunkte sämmtlicher Scheiben in einer Parallellinie zur Um-

Centrifugalkräfte ausgedehnter Maſſen.

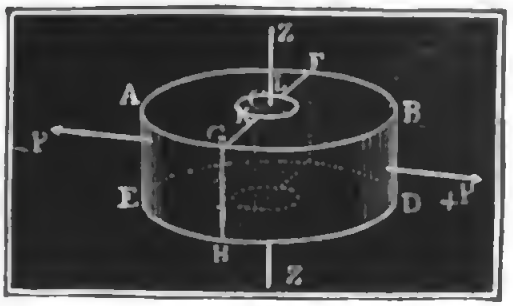
drehungsaxe, ſo iſt $x = x_1 = x_2$ u. ſ. w., ſowie $y = y_1 = y_2$ u. ſ. w. und daher auch $r = r_1 = r_2$ u. ſ. w.; es folgt daher die Centrifugalkraft des ganzen Körpers, $P = \omega^2 (M_1 r + M_2 r + \ldots) = \omega^2 M r$, und für den Abſtand ihres Angriffspunktes von der Ebene XY:

$$z = \frac{(M_1 z_1 + M_2 z_2 + \ldots) r}{(M_1 + M_2 + \ldots) r} = \frac{M_1 z_1 + M_2 z_2 + \ldots}{M_1 + M_2 + \ldots}.$$

Dieſen Gleichungen zufolge iſt die Centrifugalkraft eines Körpers, deſſen Elemente in eine Linie parallel zur Axe fallen, gleich der Centrifugalkraft der auf den Schwerpunkt dieſes Körpers reducirten Maſſe, und es fällt auch ihr Angriffspunkt mit dieſem Schwerpunkte zuſammen. Hiernach laſſen ſich die Centrifugalkräfte aller Rotationskörper, deren geometriſche Axe mit der Umdrehungsaxe parallel läuft, finden. Fällt die geometriſche Axe eines ſolchen Körpers mit der Umdrehungsaxe zuſammen, ſo iſt die Centrifugalkraft ſogar Null.

Beiſpiel. Es ſind die Dimenſionen, die Dichtigkeit und Feſtigkeit eines Mühlſteines $ABDE$, Fig. 346, gegeben, man ſoll die Winkelgeſchwindigkeit ω finden, bei welcher das Zerreißen deſſelben in Folge der Centrifugalkraft eintritt. Setzen wir den Halbmeſſer CG des Mühlſteines $= r_1$, den Halbmeſſer CK ſeines Auges $= r_2$, die Höhe $AE = GH = l$, die Dichtigkeit $= \gamma$ und den Feſtigkeitsmodul $= K$, ſo erhalten wir die Kraft zum Zerreißen in einer diametralen Ebene $= 2(r_1 - r_2)\, lK$, das Gewicht des Steines $G = \pi (r_1^2 - r_2^2) l\gamma$ und den Umdrehungshalbmeſſer für jede Hälfte des Steines, d. i. die Entfernung ihres Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe (§. 109), $r = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}$. Im Augenblicke des Zerreißens iſt die Centrifugalkraft von einer Hälfte des Steines der Feſtigkeit gleich, wir bekommen daher die Beſtimmungsgleichung $\omega^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{Gr}{g} = 2(r_1 - r_2) lK$, d. i. $\omega^2 \cdot \frac{1}{3} (r_1^3 - r_2^3) \frac{l\gamma}{g} = 2 (r_1 - r_2)\, lK$, oder $2l$ zu beiden Seiten aufgehoben, folgt $\omega = \sqrt{\frac{3g (r_1 - r_2) K}{(r_1^3 - r_2^3)\gamma}} = \sqrt{\frac{3gK}{(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\gamma}}$. Iſt $r_1 = 2$ Fuß $= 24$ Zoll, $r_2 = 4$ Zoll, $K = 750$ Pfund und das ſpecifiſche Gewicht der Mühlſteinmaſſe $= 2{,}5$, alſo das Gewicht eines Cubikzolles Maſſe deſſelben $= \frac{66 \cdot 2{,}5}{1728} = 0{,}0955$ Pf., ſo folgt die Winkelgeſchwindigkeit beim Eintreten des Zerreißens:

Fig. 346.

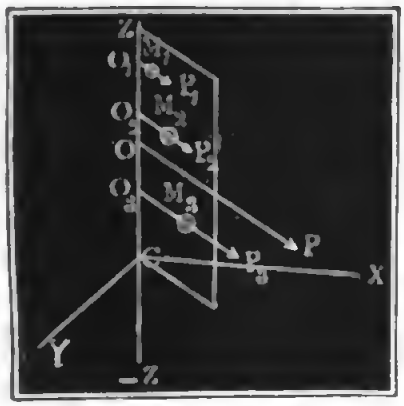


$$\omega = \sqrt{\frac{3 \cdot 12 \cdot 31{,}25 \cdot 750}{688 \cdot 0{,}0955}} = \sqrt{\frac{210937}{16{,}426}} = 113{,}3 \text{ Zoll}.$$

Ist die Zahl der Umdrehungen in einer Minute $= n$, so hat $\omega = \frac{2\pi n}{60}$, daher umgekehrt $n = \frac{30\omega}{\pi}$, hier aber $= \frac{30 \cdot 113{,}3}{\pi} = 1082$. Die gewöhnliche Umdrehungszahl eines solchen Mühlsteines ist nur 120, also 9mal so klein. Centrifugalkräfte ausgedehnter Massen.

§. 249. Befinden sich die sämmtlichen Theile M_1, M_2 eines Massensystemes, Fig. 347, oder die Schwerpunkte der Elemente eines Körpers in einer durch die Umdrehungsaxe gehenden Ebene, so bilden die Centrifugalkräfte ein System von Parallelkräften und es lassen sich daher dieselben in der Regel auf eine einzige Kraft zurückführen. Sind die Entfernungen der Massentheile oder Elemente von der Umdrehungsaxe $\overline{ZZ}$: $O_1M_1 = r_1$, $O_2M_2 = r_2$ u. s. w., so erhält man für ihre Centrifugalkräfte: $P_1 = \omega^2 M_1 r_1$, $P_2 = \omega^2 M_2 r_2$ u. s. w., und daher die mittlere Centrifugalkraft $P = \omega^2 (M_1 r_1 + M_2 r_2 + ..) = \omega^2 Mr$, wofern r den Abstand des Schwerpunktes der ganzen Masse M von der Umdrehungsaxe bezeichnet. Es ist also auch hier der Abstand des Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe als Drehungshalbmesser anzusehen. Um aber den Angriffspunkt O der resultirenden Centrifugalkraft zu finden, setzen wir die Abstände der Massentheile von der Normalebene: $CO_1 = z_1$, $CO_2 = z_2$ u. s. w. in die Formel

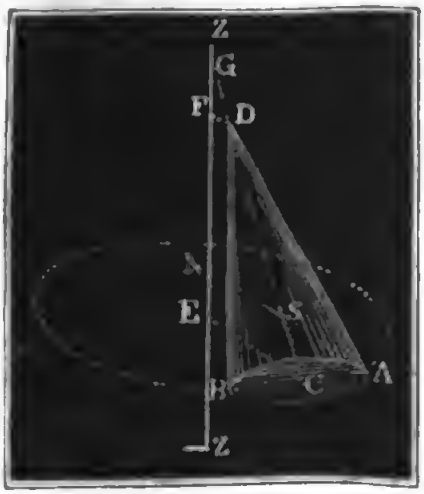
Fig. 347.



$$CO = z = \frac{M_1 r_1 z_1 + M_2 r_2 z_2 + \ldots}{M_1 r_1 + M_2 r_2 + \ldots}.$$

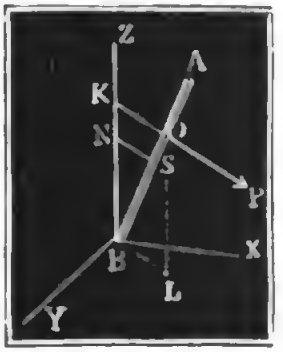
Mit Hülfe der Formel $P = \omega^2 Mr$ lassen sich die Centrifugalkräfte von Rotationskörpern und von anderen Körpern der Geometrie finden, wenn die Axen dieser mit der Umdrehungsaxe in eine Ebene fallen. So ergiebt sich z. B. die Centrifugalkraft des geraden Kegels ADB, Fig. 348, wenn man den Abstand SN seines Schwerpunktes S von der Umdrehungsaxe $\overline{ZZ}$ als r in die Formel einsetzt. Ist die Kegelhöhe $CD = h$, der Abstand DF der Spitze D von der Umdrehungsaxe $= a$, und der Winkel CGE, um welchen die geometrische Axe CD von der Umdrehungsaxe $\overline{ZZ}$ abweicht, $= \alpha$, so hat man $r = a + \frac{3}{4} h \sin. \alpha$.

Fig. 348.



Centrifugalkräfte ausgedehnter Maſſen.

Fig. 349.



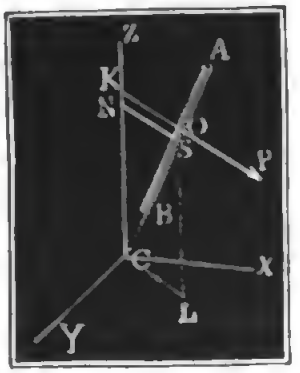
Für eine Stange AB, Fig. 349, deren Länge $AB = l$ und Neigungswinkel ABZ gegen die Umdrehungsaxe $BZ, = \alpha$ iſt, hat man $r = SN = \frac{1}{2} l \sin. \alpha$, alſo die Centrifugalkraft $P = \omega^2 . \frac{1}{2} M l \sin. \alpha$; um aber den Angriffspunkt O dieſer Kraft zu finden, ſetzen wir in dem Ausdrucke $\omega^2 . \frac{M}{n} x \sin. \alpha . x \cos. \alpha = \omega^2 . \frac{M}{n} x^2 \sin. \alpha \cos. \alpha$ für das Moment vom Elemente $\frac{M}{n}$ der Stange, ſtatt x nach und nach $\frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \frac{3l}{n}$ u. ſ. w. und vereinigen die Ergebniſſe durch Addition. Auf dieſe Weiſe ergiebt ſich das Moment der ganzen Stange:

$$Pz = \omega^2 \frac{M}{n} \sin. \alpha \cos. \alpha \frac{l^2}{n^2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + .. + n^2)$$

$= \frac{1}{3} \omega^2 M l^2 \sin. \alpha \cos. \alpha$, daher der Hebelarm BK oder

$z = \frac{1}{3} \omega^2 M l^2 \sin. \alpha \cos. \alpha : \frac{1}{2} \omega^2 M l \sin. \alpha = \frac{2}{3} l \cos. \alpha$, und die Entfernung des Angriffspunktes O von dem in der Axe liegenden Stangenende B, $BO = \frac{2}{3} l$.

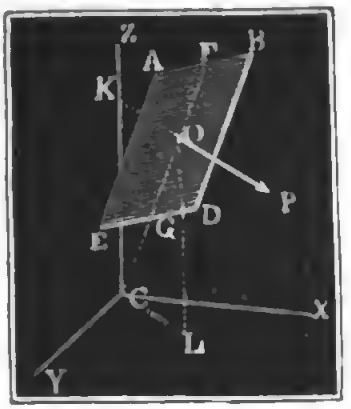
Fig. 350.



Reicht die Stange AB, Fig. 350, nicht bis zur Axe, ſo hat man

$P = \frac{1}{2} \omega^2 F l_1^2 \sin. \alpha - \frac{1}{2} \omega^2 F l_2^2 \sin. \alpha = \frac{1}{2} \omega^2 F \sin. \alpha (l_1^2 - l_2^2)$, und das Moment $Pz = \frac{1}{3} \omega^2 F \sin. \alpha \cos. \alpha (l_1^3 - l_2^3)$, weil die Maſſe von CA, = Querſchnitt mal Länge $= F l_1$ und die Maſſe von CB, $= F l_2$ iſt, es folgt daher die Entfernung des Angriffspunktes O vom Durchſchnitte C mit der Axe:

Fig. 351.



$$CO = \frac{2}{3} \frac{l_1^3 - l_2^3}{l_1^2 - l_2^2} = l + \frac{(l_1 - l_2)^2}{12 l},$$

wo l die Entfernung CS des Schwerpunktes $l_1 - l_2$ aber die Länge der Stange AB ausdrückt.

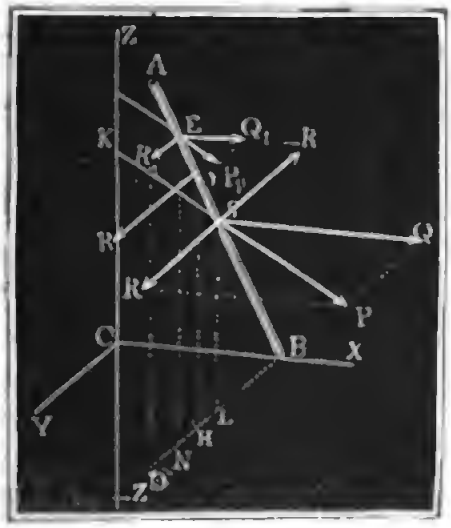
Dieſe Formel gilt auch für ein rectanguläres Blatt $ABDE$, Fig. 351, welches ſich durch die Axenebene COZ in zwei congruente Rechtecke theilen läßt, weil von jedem der Elemente, welche ſich durch Schnitte normal zu CZ ergeben, die Centrifugalkraft in der Mitte

angreift. Sind also die Entfernungen CF und CG der beiden Grundlinien AB und DE von dem Axpunkte C, l_1 und l_2, so hat man auch hier $CO = \frac{2}{3} \cdot \frac{l_1^3 - l_2^3}{l_1^2 - l_2^2}$. Centrifugalkräfte ausgedehnter Massen.

§. 250. In dem Falle, wenn die Körpertheile weder in einer Normalebene zur Umdrehungsaxe, noch in einer Ebene durch die Umdrehungsaxe enthalten sind, lassen sich die resultirenden Centrifugalkräfte $Q = \omega^2 (M_1 x_1 + M_2 x_2 + ..)$ und $R = \omega^2 (M_1 y_1 + M_2 y_2 + ..)$ nicht in eine einzige Kraft verwandeln, wohl aber ist es möglich, diese Kräfte durch eine im Schwerpunkte angreifende Kraft $P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \omega^2 Mr$ und durch ein aus Q und R zusammengesetztes Kräftepaar zu ersetzen. Bringen wir nämlich im Schwerpunkte S vier sich das Gleichgewicht haltende Kräfte $+Q$ und $-Q$, sowie $+R$ und $-R$ an, so geben die positiven Theile die Mittelkraft $P = \omega^2 \sqrt{Q^2 + R^2}$, wogegen die negativen Theile $-Q$ und $-R$ mit den in U und V (s. Fig. 342) angreifenden Centrifugalkräften die Kräftepaare $(Q, -Q)$ und $(R, -R)$ bilden, die sich zu einem einzigen Kräftepaare zusammensetzen lassen.

Um mit dieser Zurückführung der Centrifugalkräfte eines umlaufenden Körpers bekannt zu werden, nehmen wir folgenden einfachen Fall vor.

Fig. 352.



Die Stange AB, Fig. 352, welche sich um die Axe $Z\overline{Z}$ dreht, liege parallel zur Ebene YZ und ruhe mit dem Ende B in der Axe CX. Setzen wir die Länge AB dieser Stange $= l$, ihr Gewicht $= G$, den Winkel BAD, um welchen sie von der Drehaxenrichtung abweicht $= \alpha$, und ihren Abstand CB von der Ebene YZ, welches auch ihr kürzester Abstand von der Axe $Z\overline{Z}$ ist, $= a$. Ist nun E ein Element $\frac{M}{n}$ der Stange, und $BE = x$, dessen Entfernung vom Ende B, so hat man die Projection $BN = x \sin \alpha$, und daher die für die Componenten der Centrifugalkraft P_1 dieses Elementes:

$$Q_1 = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} \cdot CB = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a \text{ und } R_1 = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} \cdot BN = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} x \sin. \alpha,$$

dagegen ihre Momente in Beziehung auf die Grundebene XCY: $Q_1 z_1 = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} \cdot CB \cdot EN = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} ax \cos \alpha$ und $R_1 z_1 = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} x^2 \cdot \sin. \alpha \cos \alpha$.

Die sämmtlichen Seitenkräfte parallel zur Ebene XZ geben die

Centrifugalkräfte ausgedehnter Maſſen.

Reſultirende $Q = Q_1 + Q_2 + \ldots = n \cdot \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a = \omega^2 \cdot Ma$, und ihr Moment $Qu = Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \ldots = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a \cos.\alpha (x_1 + x_2 + ..)$, oder, da $x_1 = \frac{l}{n}$, $x_2 = 2\frac{l}{n}$, $x_3 = \frac{3l}{n}$ u. ſ. w. zu nehmen iſt,

$$Qu = \omega^2 . \frac{M}{n} a \cos.\alpha . \frac{l}{n} (1+2+3+..+n) = \omega^2 . \frac{M}{n} a \cos.\alpha . \frac{l}{n} . \frac{n^2}{2}$$

$= \frac{1}{2}\omega^2 . Mal \cos.\alpha$; es iſt alſo der Abſtand des Angriffspunktes dieſer Seitenkraft von der Grundebene XY:

$$LS = u = \frac{\frac{1}{2}\omega^2 Mal \cos.\alpha}{\omega^2 Ma} = \frac{1}{2} l \cos.\alpha,$$

d. h. es fällt derſelbe mit dem Schwerpunkte der Stange zuſammen. Die Seitenkräfte, welche parallel zu YZ wirken, geben die Reſultirende $R = R_1 + R_2 + \ldots = \omega^2 . \frac{M}{n} \sin.\alpha (x_1 + x_2 + ..)$

$$= \omega^2 . \frac{M}{n} \sin.\alpha \frac{l}{n} . \frac{n^2}{2} = \frac{1}{2} \omega^2 M l \sin.\alpha$$ mit dem Momente

$$\omega^2 . \frac{M}{n} \sin.\alpha \cos.\alpha (x_1^2 + x_2^2 + ..) = \omega^2 . \frac{M}{n} \sin.\alpha \cos.\alpha \left(\frac{l^2}{n^2} + \frac{4l^2}{n^2} + ..\right)$$

$$= \omega^2 . \frac{M}{n} \frac{l^2}{n^2} \sin.\alpha \cos.\alpha (1+4+9+..+n^2) = \omega^2 . \frac{M}{n} . \frac{l^2}{n^2} \sin.\alpha \cos.\alpha \frac{n^3}{3}$$

$= \frac{1}{3}\omega^2 M l^2 \sin.\alpha \cos.\alpha$; es iſt der Abſtand des Angriffspunktes O dieſer Kraft von der Grundebene XY:

$$HO = v = \frac{\frac{1}{3}\omega^2 M l^2 \sin.\alpha \cos.\alpha}{\frac{1}{2}\omega^2 M l \sin.\alpha} = \frac{2}{3} l \cos.\alpha,$$

d. i. dieſer Angriffspunkt liegt um $(\frac{2}{3} - \frac{1}{2})\ l \cos.\alpha = \frac{1}{6} l \cos.\alpha$ ſenkrecht, oder überhaupt um ein Sechstel der Stangenlänge AB über dem Schwerpunkte S der Stange.

Aus den Kräften $Q = \omega^2 Ma$ und $R = \frac{1}{2}\omega^2 Ml \sin.\alpha$ folgt die im Schwerpunkte der Stange angreifende Endreſultirende: $P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \omega^2 M \sqrt{a^2 + \frac{1}{4} l^2 \sin.\alpha^2}$ und das Kräftepaar $(R, -R)$ mit dem Momente $R . \overline{SO} = \frac{1}{2}\omega^2 Ml \sin.\alpha . \frac{1}{6} l$

$$= \frac{1}{12}\omega^2 Ml^2 \sin.\alpha.$$

Freie Axen.

§. 251. Im Allgemeinen üben zwar die Centrifugalkräfte eines ſich um eine Axe gleichförmig umdrehenden Körpers einen Druck auf die Axe aus, es iſt jedoch auch möglich, daß dieſe Kräfte ſich gegenſeitig aufheben und deshalb die Axe gar keinen Druck auszuhalten hat. Dieſer Fall kommt z. B. vor bei jedem ſich um ſeine geometriſche oder ſymmetriſche Axe drehenden Rotationskörper, bei einer Radwelle und einem Waſſerrade

insbesondere, u. s. w. Wenn auf einen unter diesen Umständen sich um- Freie Axen.
drehenden Körper oder auf ein solches Massensystem keine äußeren Kräfte einwirken, so bleibt der Körper ohne Ende in dieser Umdrehung begriffen, ohne daß es nöthig ist, die Umdrehungsaxe festzuhalten. Man nennt deshalb diese Umdrehungsaxe eine freie Axe (franz. axe libre, engl. free axis). Aus dem Vorhergehenden folgen sogleich die Bedingungen, unter welchen eine Drehaxe eine freie Axe ist. Es ist nöthig, daß nicht nur die Mittelkräfte P und Q aus den parallel den Axenebenen XZ und YZ wirkenden Componenten der Centrifugalkräfte, sondern auch die Summe der statischen Momente von jedem der beiden Kräftesysteme = Null ist, also hiernach:

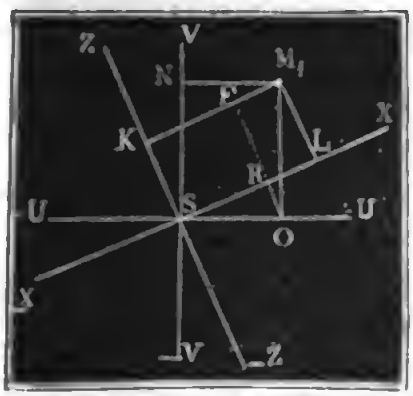
1) $M_1x_1 + M_2x_2 + \ldots = 0$,
2) $M_1y_1 + M_2y_2 + \ldots = 0$, ferner
3) $M_1x_1z_1 + M_2x_2z_2 + \ldots = 0$, und
4) $M_1y_1z_1 + M_2y_2z_2 + \ldots = 0$.

Die beiden ersten Gleichungen bedingen, daß die freie Axe durch den Schwerpunkt des Körpers oder Massensystemes geht. Die beiden letzteren aber liefern die Elemente zur Bestimmung der Lage dieser Axe. Es läßt sich übrigens nachweisen, daß jeder Körper oder jedes Massensystem mindestens drei freie Axen hat, und daß diese Axen im Schwerpunkte des Systemes unter rechten Winkeln zusammenstoßen.

Die höhere Mechanik unterscheidet von den freien Axen noch andere Axen, welche mit diesen Axen parallel laufen und sich in irgend einem Punkte des Systemes durchkreuzen, und nennt diese Axen Hauptaxen (franz. axes principaux, engl. principal axes). Man beweist auch, daß das Trägheitsmoment eines Körpers in Beziehung auf eine der Hauptaxen ein Maximum, in Beziehung auf die zweite ein Minimum, und in Beziehung auf die dritte Axe keines von beiden ist.

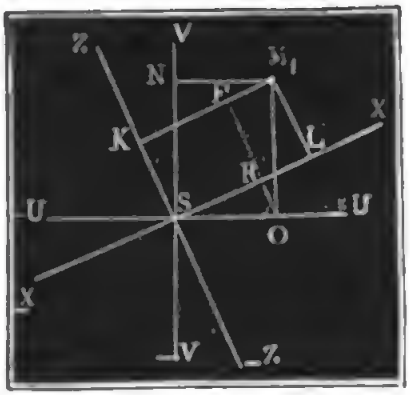
§. 252. Befinden sich die Theile einer Masse in einer Ebene, bildet z. B. die Masse eine dünne Platte oder ebene Figur, so ist die gerade Linie durch den Schwerpunkt der ganzen Masse, und normal zur Ebene derselben eine freie Axe der Masse, denn es ist in diesem Falle die Masse ohne Drehungshalbmesser, und daher die einzig mögliche Centrifugalkraft = Null. Um aber die beiden anderen freien Axen zu finden, schlagen wir folgenden Weg ein. Sei S, Fig. 353, der Schwerpunkt einer Masse, und seien $U\overline{U}$ und $V\overline{V}$ zwei in der Massenebene befindliche Coordinataxen, bestimmen wir die Massentheile durch Coordinaten parallel zu diesen Axen,

Fig. 353



Freie Axen. z. B. das Maſſentheilchen M_1 durch die Coordinaten $M_1N = u_1$ und $M_1O = v_1$. Sei dagegen $X\overline{X}$ eine freie Axe, $Z\overline{Z}$ eine Axe winkelrecht gegen dieſelbe, ferner der zu beſtimmende Winkel XSU, um welchen die freie Axe von der Coordinataxe SU abweicht, $= \varphi$, und ſetzen wir die Coordinaten der Maſſentheile in Hinſicht auf die Axen $X\overline{X}$ und $Z\overline{Z}$: $x_1, x_2 \ldots, z_1, z_2 \ldots$, alſo für den Maſſentheil M_1: $M_1K = x_1$ und $M_1L = z_1$. Hiernach ergiebt ſich ſehr leicht:

Fig. 354.



$$x_1 = M_1K = SR + RL = SO\,cos.\varphi + OM_1 sin.\varphi = u_1 cos.\varphi + v_1 sin.\varphi$$

$$z_1 = M_1L = -OR + OF = -SO\,sin.\varphi + OM_1\,cos.\varphi$$

$$= -u_1\,sin.\varphi + v_1\,cos.\varphi;$$ und daher das Product:

$$x_1z_1 = (u_1 cos.\varphi + v_1\,sin.\varphi)(-u_1\,sin.\varphi + v_1\,cos.\varphi)$$

$$= -(u_1^2 - v_1^2)\,sin.\varphi\,cos.\varphi + u_1v_1(cos.\varphi^2 - sin.\varphi^2)$$

oder, da $sin.\varphi\,cos.\varphi = \frac{1}{2} sin.2\varphi$ und $cos.\varphi^2 - sin.\varphi^2 = cos.2\varphi$ iſt, $x_1z_1 = -\frac{1}{2}(u_1^2 - v_1^2)\,sin.2\varphi + u_1v_1\,cos.2\varphi$, und daher das Moment des Maſſentheiles M_1:

$$M_1x_1z_1 = -\frac{M_1}{2}(u_1^2 - v_1^2)\,sin.2\varphi + M_1u_1v_1\,cos.2\varphi,$$ ebenſo das Moment des Maſſentheiles M_2:

$$M_2x_2z_2 = -\frac{M_2}{2}(u_2^2 - v_2^2)\,sin.2\varphi + M_2u_2v_2\,cos.2\varphi$$

u. ſ. w., und die Summe der Momente aller Maſſentheile, oder das Moment der ganzen Maſſe:

$$M_1x_1z_1 + M_2x_2z_2 + \ldots = -\tfrac{1}{2} sin.2\varphi\,[(M_1u_1^2 + M_2u_2^2 + ..) - (M_1v_1^2 + M_2v_2^2 + ..)] + cos.2\varphi\,(M_1u_1v_1 + M_2u_2v_2 + ..).$$

Damit $X\overline{X}$ eine freie Axe werde, muß aber nach dem vorigen §. dieſes Moment = Null ſein; wir müſſen daher ſetzen

$$\tfrac{1}{2} sin.2\varphi\,[(M_1u_1^2 + M_2u_2^2 + \ldots) - (M_1v_1^2 + M_2v_2^2 + ..)] - cos.2\varphi\,(M_1u_1v_1 + M_2u_2v_2 + ..) = 0,$$

und erhalten hiernach als Bedingungsgleichung:

$$tang.2\varphi = \frac{sin.2\varphi}{cos.2\varphi} = \frac{2(M_1u_1v_1 + M_2u_2v_2 + ..)}{(M_1u_1^2 + M_2u_2^2 + \ldots) - M_1v_1^2 + M_2v_2^2 + \ldots)}$$

$$= \frac{\text{Doppeltes Moment der Centrifugalkraft}}{\text{Differenz der Trägheitsmomente}}.$$

Durch dieſe Formel ergeben ſich zwei Werthe für 2φ, welche von einander um 180^0, und alſo auch zwei Werthe von φ, welche von einander um 90^0 abweichen; es iſt deshalb nicht allein die durch die-

sen Winkel φ bestimmte Axe $X\bar{X}$ eine freie Axe, sondern auch die gegen sie winkelrecht gerichtete Axe $Z\bar{Z}$. Freie Axen.

§. 253. Von vielen Flächen und Körpern lassen sich die freien Axen ohne alle Rechnung angeben. Bei einer symmetrischen Figur ist z. B. die Symmetrieaxe eine freie Axe, das Perpendikel im Schwerpunkte die zweite, und die Axe winkelrecht gegen die Ebene der Figur die dritte freie Axe. Bei einem Rotationskörper AB, Fig. 355, ist die Rotationsaxe $Z\bar{Z}$ eine freie Axe, ebenso auch jede Normale $X\bar{X}$, $Y\bar{Y}$ .. zu dieser durch den Schwerpunkt S. Bei einer Kugel ist jeder Durchmesser eine freie Axe, bei einem geraden, von 6 Rechtecken begrenzten Parallelepipede ABD,

Fig. 355.

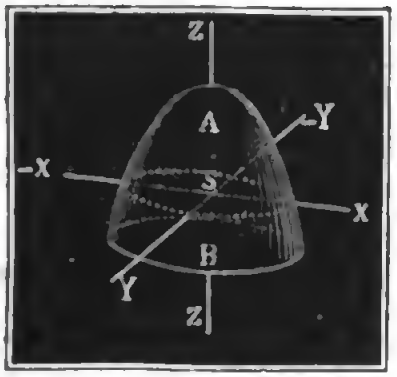


Fig. 356.

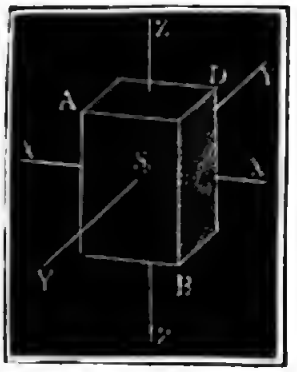
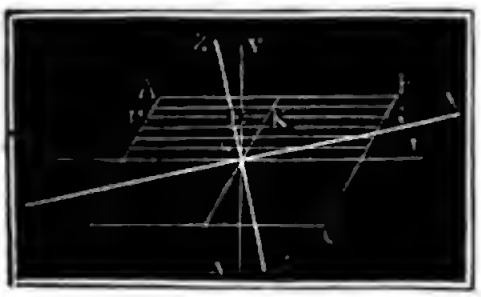


Fig. 356, aber sind es die drei durch den Schwerpunkt S gehenden und auf den Seitenflächen BD, AB und AD normal stehenden oder mit den Kanten parallel laufenden Axen $X\bar{X}$, $Y\bar{Y}$ und $Z\bar{Z}$.

Bestimmen wir noch die freien Axen von einem schiefwinkeligen Parallelogramme $ABCD$, Fig. 357. Legen wir durch den Schwerpunkt S desselben die unter sich rechtwinkelig stehenden Coordinataxen $U\bar{U}$ und $V\bar{V}$

Fig. 357.



so, daß die eine der Seite AB des Parallelogrammes parallel läuft, und zerlegen wir das Parallelogramm durch Parallellinien in $2n$ gleiche Streifen, wie z. B. FG. Ist nun die eine Seite $AB = 2a$, die andere Seite $AD = 2b$, und der spitze Winkel ADC zwischen je zwei Seiten $= \alpha$, so erhalten wir für den um $SE = x$ von $U\bar{U}$ abstehenden Streifen FG die Länge des einen Theiles $EG = KG + EK = a + x\ cotg.\ \alpha$, und die des andern Theiles $EF = a - x\ cotang.\ \alpha$, und, da $\frac{b}{n}\ sin.\alpha$ die Breite

Freie Axen. beider iſt, die Inhalte dieſer Streifen $= \frac{b \sin. \alpha}{n} (a + x \, colg. \alpha)$ und $\frac{b \sin. \alpha}{n} (a - x \, colg. \alpha)$; auch folgen die Maaße der Centrifugalkräfte von dieſen Theilen in Hinſicht auf die Axe $V\bar{V}$:

$= \frac{b \sin. \alpha}{n} (a + x \, colg. a) \cdot \frac{1}{2} (a + x \, colg. \alpha) = \frac{b \sin. \alpha}{2n} (a + x \, colg. \alpha)^2$

und $\frac{b \sin. \alpha}{2n} (a - x \, colg. \alpha)^2$, und ihre Momente in Hinſicht auf die Axe $U\bar{U}$: $\frac{b \sin. \alpha}{2n} (a + x \, colg. \alpha)^2 x$ und $\frac{b \sin \alpha}{2n} (a - x \, colg. \alpha)^2 x$.

Da beide Kräfte in Hinſicht auf $V\bar{V}$ einander entgegengeſetzt wirken, ſo giebt die Vereinigung ihrer Momente die Differenz:

$$\frac{b x \sin. \alpha}{2n} [(a + x \, colg. \alpha)^2 - (a - x \, colg. \alpha)^2] = \frac{2}{n} ab x^2 \cos. \alpha.$$

Setzen wir in dieſer Formel für x nach und nach $\frac{b \sin. \alpha}{n}$, $\frac{2 \, b \sin. \alpha}{n}$, $\frac{3 \, b \sin. \alpha}{n}$ u. ſ. w. ein, und addiren wir die Ergebniſſe, ſo bekommen wir das Maaß für das Moment der Centrifugalkraft des halben Parallelogrammes:

$$\frac{2ab}{n} \cos. \alpha \cdot \frac{b^2 \sin. \alpha^2}{n^2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = 2ab^3 \sin. \alpha^2 \cos. \alpha \cdot \frac{n^3}{3n^3}$$

$= \frac{2}{3} ab^3 \sin. \alpha^2 \cos. \alpha$, und alſo für das ganze Parallelogramm, oder $M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \ldots = \frac{4}{3} ab^3 \sin. \alpha^2 \cos. \alpha$. Das Trägheitsmoment in Hinſicht auf die Axe $V\bar{V}$ iſt für einen Streifen FG

$$= \frac{b \sin. \alpha}{n} \left(\frac{(a + x \, colg. \alpha)^3}{3} + \frac{(a - x \, colg. \alpha)^3}{3} \right)$$

$$= \frac{2 \, b \sin. \alpha}{3n} (a^3 + 3ax^2 \, colg. \alpha^2) = \frac{2}{3} \frac{ab}{n} \sin. \alpha \, (a^2 + 3x^2 \, colg. \alpha^2);$$

ſetzt man nun für x ſucceſſiv $\frac{b \sin. \alpha}{n}$, $\frac{2 \, b \sin. \alpha}{n}$, $\frac{3 \, b \sin. \alpha}{n}$ u. ſ. w., und ſummirt man die ſich ergebenden Werthe, ſo folgt das Trägheitsmoment der einen Hälfte $= \frac{2}{3} ab \sin \alpha \, (a^2 + b^2 \cos. \alpha^2)$, und daher das des Ganzen $= \frac{4}{3} ab \sin. \alpha \, (a^2 + b^2 \cos. \alpha^2)$. In Hinſicht auf die Umdrehungsaxe $U\bar{U}$ iſt hingegen das Trägheitsmoment des Parallelogrammes $= 4ab \sin. \alpha \cdot \frac{b^2 \sin. \alpha^2}{3} = \frac{4}{3} ab^3 \sin. \alpha^3$ (§. 234); es ergiebt ſich daher die geſuchte Differenz der Trägheitsmomente, d. i.

$(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \ldots) - (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \ldots)$; Freie Aren.
$= \frac{4}{3}\, ab\ sin.\ \alpha\ (a^2 + b^2\ cos.\ \alpha^2) - \frac{4}{3}\, ab^3\ sin.\ \alpha^3$
$= \frac{4}{3}\, ab\ sin.\ \alpha\ [a^2 + b^2\ (cos.\ \alpha^2 - sin.\ \alpha^2)]$
$= \frac{4}{3}\, ab\ sin.\ \alpha\ (a^2 + b^2\ cos.\ 2\alpha)$.

Endlich folgt für den Winkel $USX = \varphi$, welchen die freie Axe $X\bar{X}$ mit der Coordinataxe $U\bar{U}$ oder der Seite AB einschließt, nach §. 252:

$$tang.\ 2\varphi = \frac{2\,(M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \ldots)}{M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \ldots) - (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \ldots)}$$
$$= \frac{2 \cdot \frac{4}{3}\, ab^3 sin.\ \alpha^2 cos.\ \alpha}{\frac{4}{3}\, ab\ sin.\ \alpha\ (a^2 + b^2 cos.\ 2\alpha)} = \frac{b^2 sin.\ 2\alpha}{a^2 + b^2 cos.\ 2\alpha}.$$

Beim Rhombus ist $a = b$, daher

$$tang.\ 2\varphi = \frac{sin.\ 2\alpha}{1 + cos.\ 2\alpha} = \frac{2\ sin.\ \alpha\ cos.\ \alpha}{1 + cos.\ \alpha^2 - sin.\ \alpha^2} = \frac{2 sin\ \alpha cos.\alpha}{2\ cos.\ \alpha^2} = tg.\ \alpha,$$

also $2\varphi = \alpha$, und $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. Da dieser Winkel die Richtung der Diagonale angiebt, so folgt, daß die Diagonalen freie Axen des Rhombus sind.

Beispiel. Bei dem schiefwinkeligen Parallelogramme $ABCD$, Fig. 356, messen die Seiten $AB = 2a = 16$ Zoll und $BC = 2b = 10$ Zoll, und ist der Umfangswinkel $ABC = \alpha = 60°$, welche Richtungen haben dessen freie Axen? Es ist $tang.\ 2\varphi = \frac{5^2 . sin.\ 120°}{8^2 + 5^2 . cos.\ 120°} = \frac{25 . sin.\ 60°}{64 - 25\ cos.\ 60°} = \frac{25 . 0{,}86603}{64 - 25 . 0{,}5}$ $= 0{,}42040 = tang.\ 22°, 48'$, oder $tang.\ 202°, 48'$. Hiernach folgen $\varphi = 11°, 24'$ und $101°, 24'$ als Neigungswinkel von zwei freien Axen gegen die Seite AB. Die dritte freie Axe steht auf der Ebene des Parallelogrammes rechtwinkelig. Diese Winkel bestimmen auch die freien Axen eines geraden Parallelepipedes mit rhomboidalen Grundflächen.

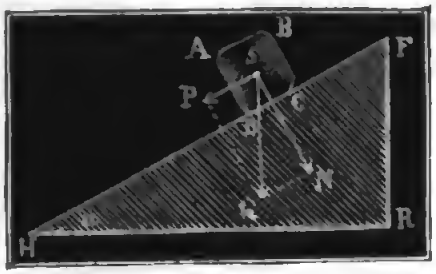
Drittes Kapitel.

Von den Wirkungen der Schwerkraft bei Bewegungen auf vorgeschriebenen Wegen.

§. 254. Ein schwerer Körper kann auf mancherlei Weise verhindert werden, frei zu fallen, betrachten wir indessen im Folgenden nur zwei Fälle, nämlich den Fall, wenn der Körper von einer geneigten Ebene unterstützt wird, und den Fall, wenn er um eine horizontale Axe drehbar ist. In beiden Fällen sind die Wege des Körpers in einer Vertikalebene ent- Schiefe Ebene.

Schiefe Ebene. halten. Befindet ſich der Körper auf einer geneigten Ebene, ſo zerlegt ſich das Gewicht deſſelben in zwei Seitenkräfte, von denen die eine normal gegen die Ebene gerichtet iſt und von dieſer aufgenommen wird, und die andere parallel zur Ebene und auf den Körper als bewegende Kraft wirkt. Iſt G das Gewicht des Körpers $ABCD$, Fig. 358, und α die Neigung der ſchiefen Ebene FBR gegen den Horizont, ſo hat man nach §. 134 jenen Normaldruck: $N = G \cos. \alpha$, und dieſe bewegende Kraft $P = G \sin. \alpha$. Die Bewegung des Körpers kann nun entweder gleitend oder wälzend ſein; berückſichtigen wir zunächſt nur die erſtere. In dieſem Falle nehmen alle Theile des Körpers gleichen Antheil an der Bewegung des Körpers, und haben daher auch eine gemeinſchaftliche Acceleration p, die ſich durch die bekannte Formel:

Fig. 358.



$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Maſſe}}, = \frac{P}{M} = \frac{G \sin. \alpha}{G} \cdot g = g \sin. \alpha$$

ergiebt. Es iſt alſo $p : g = \sin. \alpha : 1$, d. h. die Beſchleunigung eines Körpers auf der ſchiefen Ebene verhält ſich zur Beſchleunigung des freien Falles wie der Sinus des Fallwinkels der ſchiefen Ebene zu Eins. Wegen der hinzutretenden Reibung gewährt aber dieſe Formel ſelten hinreichende Genauigkeit; es iſt daher nothwendig, in vielen Fällen der Anwendung auch auf dieſe Rückſicht zu nehmen.

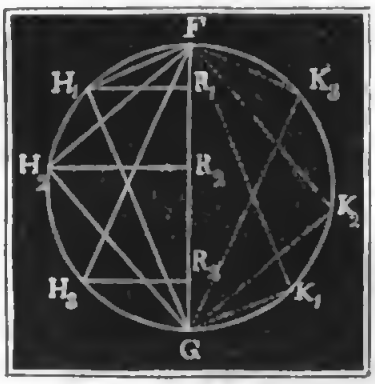
Bewegt ſich ein Körper auf einer krummen Fläche, ſo iſt die Acceleration veränderlich und an jeder Stelle gleich der Acceleration, welche der Berührungsebene an die krumme Fläche entſpricht.

§. 255. Gleitet ein Körper mit der Anfangsgeſchwindigkeit Null auf einer geneigten Ebene ohne Reibung herab, ſo iſt nach §. 10 die Endgeſchwindigkeit nach t Secunden: $v = g \sin. \alpha \,.\, t = 31{,}25 \sin. \alpha \,.\, t$ Fuß, und der zurückgelegte Raum $s = \frac{1}{2} g \sin. \alpha \,.\, t^2 = 15{,}625 \sin. \alpha \,.\, t^2$ Fuß. Beim freien Fall iſt $v_1 = gt$ und $s_1 = \frac{1}{2} g t^2$, es läßt ſich daher ſetzen: $v : v_1 = s : s_1 = \sin. \alpha : 1$, d. h. es verhalten ſich die Endgeſchwindigkeit und der Raum beim Fallen auf der ſchiefen Ebene zur Endgeſchwindigkeit und dem Raume beim freien Fallen, wie der Sinus des Neigungswinkels der ſchiefen Ebene zur Einheit.

In dem rechtwinkeligen Dreiecke FGH, Fig. 359, mit vertikaler Hypotenuse FG ist die Kathete $FH = FG \sin. FGH = FG . \sin. FHR = FG \sin. \alpha$, wenn α die Neigung dieser Kathete gegen den Horizont bezeichnet; es ist daher $FH : FG = \sin. \alpha : 1$, und es durchläuft ein Körper die vertikale Hypotenuse FG und die geneigte Kathete FH in einer und derselben Zeit. Es läßt sich hiernach zum Fallraum auf der schiefen Ebene der entsprechende Raum des freien Falles, und zu dem letztern der erstere durch Construction finden. Da die auf dem Durchmesser FG, Fig. 360, stehenden Peripheriewinkel FH_1G, FH_2G u. s. w. lauter rechte sind, so schneidet der Halbkreis über FG von allen in F anfangenden schiefen Ebenen die mit dem Durchmesser und deshalb auch unter sich in gleichen Zeiten durchlaufenen Räume FH_1, FH_2 u. s. w. ab. Man sagt daher: die Sehnen eines Kreises und der Durchmesser desselben werden gleichzeitig oder isochron durchfallen. Uebrigens gilt dieser Isochronismus nicht allein für die Sehnen FH_1, FH_2 u. s. w., welche im höchsten Punkte F des Kreises anfangen, sondern auch für die Sehnen K_1G, K_2G u. s. w., welche in dem untersten Punkte G desselben auslaufen, denn es lassen sich durch F Sehnen FK_1, FK_2 u. s. w. ziehen, welche mit den Sehnen GH_1, GH_2 u. s. w. gleiche Lage und gleiche Länge haben.

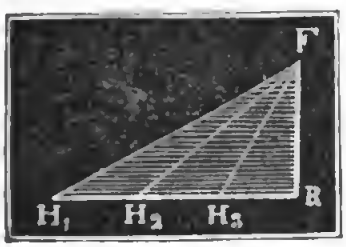
Fig. 359.

Fig. 360.



§. 256. Aus der Gleichung $s = \frac{v^2}{2p} = \frac{v^2}{2g . \sin. \alpha}$ folgt $s \sin. \alpha = \frac{v^2}{2g}$, und umgekehrt $v = \sqrt{2gs \sin. \alpha}$. Nun ist aber $s \sin. \alpha$ die Höhe FR der schiefen Ebene oder die Vertikalprojection s_1 des Weges $FH_1 = s$ auf derselben; es sind daher die Endgeschwindigkeiten von Körpern, welche mit Null Anfangsgeschwindigkeit von verschieden geneigten, gleich hohen Ebenen FH_1, FH_2 u. s. w., Fig. 361, herabfallen, unter sich gleich und

Fig. 361.



Schiefe Ebene

auch gleich der Geschwindigkeit, welche ein Körper erlangt, wenn er von der Höhe FR dieser Ebenen frei herabfällt

Aus der Gleichung $s = \frac{1}{2} g \sin.\alpha \,.\, t^2$ folgt die Formel für die Zeit:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g \sin.\alpha}} = \frac{1}{\sin.\alpha}\sqrt{\frac{2s\sin.\alpha}{g}} = \frac{1}{\sin.\alpha}\sqrt{\frac{2 \,.\, FR}{g}}.$$

Für den freien Fall durch die Höhe FR ist aber die Zeit $t_1 = \sqrt{\frac{2FR}{g}}$,

es folgt demnach $t : t_1 = 1 : \sin.\alpha = FR : FH$; es verhält sich also die Zeit des Fallens auf der schiefen Ebene zur Zeit des freien Falles von der Höhe dieser Ebene wie die Länge zur Höhe der schiefen Ebene.

Fig. 362.

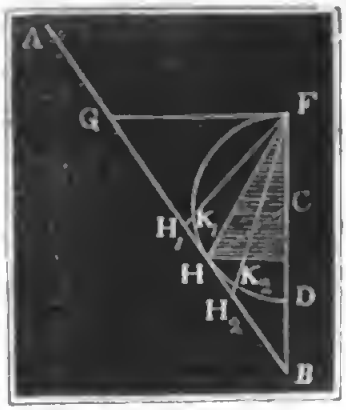
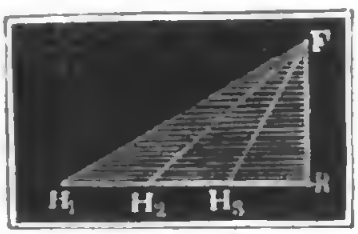


Fig. 363.



Beispiele. 1) Von einer schiefen Ebene FH, Fig. 362, ist der Anfangspunkt F gegeben und der Endpunkt H in einer gegebenen Linie AB so zu bestimmen, daß der Fall auf dieser Ebene in der kürzesten Zeit erfolge. Zieht man durch F die Horizontale FG bis zum Durchschnitt mit AB, und macht man $GH = GF$, so erhält man in H den gesuchten Punkt, und also in FH die Ebene der kürzesten Fallzeit; denn führt man durch F und H einen sich an FG und FH tangential anlegenden Kreis, so sind dessen isochron durchlaufene Sehnen FK_1, FK_2 u. s. w. kürzer als die Längen FH_1, FH_2 u. s. w. der entsprechenden schiefen Ebenen, es ist folglich auch die Fallzeit für jene Sehnen kleiner, als für diese Längen, und die Fallzeit für die schiefe Ebene FH, welche mit einer Sehne zusammenfällt, die kürzeste. 2) Man soll die Neigung derjenigen schiefen Ebene FH_1, Fig. 363, angeben, von welcher ein Körper in derselben Zeit herabfällt, als wenn er erst von der Höhe FR frei herabfiele und dann mit der erlangten Geschwindigkeit horizontal bis H_1 fortginge. Die Zeit zum Herabfallen von der senkrechten Höhe $FR = s_1$ ist $t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{g}}$, und die erlangte Geschwindigkeit in R ist $v = \sqrt{2gs_1}$. Tritt nun beim Uebergange aus der vertikalen Bewegung in die horizontale kein Geschwindigkeitsverlust ein, was erfolgt, wenn die Ecke R abgerundet ist, so wird der Weg $RH_1 = s_1 \,cotg\,\alpha$ gleichförmig und in der Zeit $t_2 = \frac{s_1 \,cotg\,\alpha}{v} = \frac{s_1 \,cotg.\,\alpha}{\sqrt{2gs_1}} = \frac{1}{2} cotg.\alpha \sqrt{\frac{2s_1}{g}}$ durchlaufen. Die Fallzeit für die schiefe Ebene ist $t = \frac{1}{\sin.\alpha}\sqrt{\frac{2s_1}{g}}$; setzen wir daher $t = t_1 + t_2$, so erhalten wir die Bestimmungsgleichung $\frac{1}{\sin.\alpha} = 1 + \frac{1}{2} cotg.\alpha$, deren Auf-

lösung auf $tang.\alpha = {}^3/_4$ führt. In der entsprechenden schiefen Ebene verhält sich hiernach die Höhe zur Basis zur Länge wie 3 zu 4 zu 5, und es ist der Neigungswinkel $\alpha = 36°,52',11''$. 3) Bei einer schiefen Ebene von der gegebenen Basis a ist die Zeit zum Herabgleiten: Schiefe Ebene.

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g\,sin.\,\alpha}} = \sqrt{\frac{2a}{g\,sin.\,\alpha\,cos.\,\alpha}} = \sqrt{\frac{4a}{g\,sin.\,2\alpha}};$$

sie fällt daher am kleinsten aus, wenn $sin.\,2\alpha$ am größten, d. i. $= 1$, also $2\alpha° = 90°$, oder $\alpha° = 45°$ ist. Von Dächern mit 45° Neigung fließt daher das Wasser in der kürzesten Zeit herab.

§. 257. Geht die Bewegung auf einer schiefen Ebene mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit c vor sich, so hat man die in §. 13 und §. 14 gefundenen Formeln in Anwendung zu bringen. Hiernach ist für einen auf der schiefen Ebene hinaufsteigenden Körper die Endgeschwindigkeit $v = c - g\,sin.\,\alpha\,.\,t$, und der zurückgelegte Weg $s = ct - {}^1/_2 g\,sin.\,\alpha\,.\,t^2$; dagegen für den von der schiefen Ebene herabsinkenden Körper

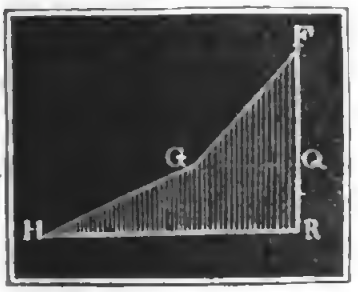
$$v = c + g\,sin.\,\alpha\,.\,t \text{ und } s = ct + {}^1/_2 g\,sin.\,\alpha\,.\,t^2.$$

Uebrigens gilt in beiden Fällen der Bewegung die Formel:

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2g\,sin.\,\alpha}, \text{ oder } s\,sin.\,\alpha = \frac{v^2 - c^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} - \frac{c^2}{2g}.$$

Es ist also stets die Vertikalprojection ($s\,sin.\,\alpha$) des auf der schiefen Ebene zurückgelegten Weges (s) gleich der Differenz der Geschwindigkeitshöhen.

Fig. 364.



Stoßen zwei schiefe Ebenen FGQ und GHR, Figur 364, in einer abgerundeten Kante an einander, so findet beim Uebergang des fallenden Körpers von der einen Ebene zur andern kein Stoß, und deshalb auch kein Geschwindigkeitsverlust statt; es gilt deshalb auch für das Herabfallen eines Körpers von dieser Verbindung zweier Ebenen die Regel: Fallhöhe (FR) gleich Differenz der Geschwindigkeitshöhen. Uebrigens ist leicht zu ermessen, daß diese Regel auch bei dem Sinken und Steigen auf einer derartigen Verbindung von beliebig vielen Ebenen, und beim Fallen und Aufsteigen auf krummen Linien oder Flächen ihre Richtigkeit behält (vergl. §. 82).

Beispiele. 1) Ein Körper steigt mit 21 Fuß Anfangsgeschwindigkeit auf einer schiefen Ebene von 22° Neigung hinauf, wie groß ist seine Geschwindigkeit und sein zurückgelegter Weg nach $1{}^1/_2$ Secunde? Es ist die Geschwindigkeit $v = 21 - 31{,}25\,.\,sin.\,22°\,.\,1{,}5 = 21 - 31{,}25\,.\,0{,}3746\,.\,1{,}5 = 21 - 17{,}56 = 3{,}44$ Fuß, und der Weg

$$s = \frac{c+v}{2}\,.\,t = \frac{21 + 3{,}44}{2}\,.\,{}^3/_2 = \frac{24{,}44\,.\,3}{4} = 18{,}33 \text{ Fuß}$$

2) Wie hoch steigt ein Körper mit 36 Fuß Anfangsgeschwindigkeit auf der schie-

Schiefe Ebene. fen Ebene von 48° Anſteigen? Es iſt die ſenkrechte Höhe $s_1 = \frac{v^2}{2g} = 0{,}016 \cdot v^2$ $= 0{,}016 \cdot 36^2 = 20{,}736$ Fuß, daher der ganze Weg auf der ſchiefen Ebene: $s = \frac{s_1}{sin.\ \alpha} = \frac{20{,}736}{sin.48^0} = 27{,}903$ Fuß. Die hierzu nöthige Zeit iſt:

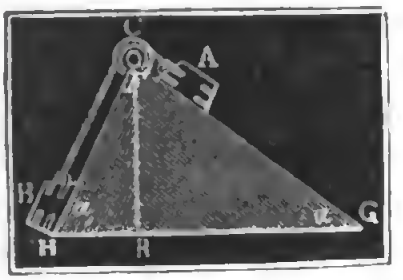
$$t = \frac{2 \cdot s}{v} = \frac{2 \cdot 27{,}903}{36} = \frac{27{,}903}{18} = 1{,}55 \text{ Secunden.}$$

§. 258. Die gleitende Reibung übt einen bedeutenden Einfluß auf das Fallen und Steigen eines Körpers auf einer ſchiefen Ebene aus. Aus dem Gewichte G des Körpers und aus dem Neigungswinkel α der ſchiefen Ebene folgt der Normaldruck $N = G\ cos.\ \alpha$, und hieraus wieder die Reibung $F = \varphi N = \varphi\ G\ cos.\ \alpha$. Subtrahirt man dieſe von der Kraft $P = G\ sin.\ \alpha$, mit welcher die Schwerkraft den Körper von der ſchiefen Ebene herabtreibt, ſo bleibt die bewegende Kraft $= G\ sin.\ \alpha - \varphi\ G\ cos.\ \alpha$, und es ergiebt ſich die Beſchleunigung des von der ſchiefen Ebene herabſinkenden Körpers:

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Maſſe}} = \left(\frac{G\ sin.\alpha - \varphi\, G\ cos.\alpha}{G}\right) g = (sin.\alpha - \varphi\ cos.\ \alpha)\ g.$$

Bei einem auf der ſchiefen Ebene hinaufſteigenden Körper iſt die bewegende Kraft negativ und $= G\ sin.\ \alpha + \varphi\ .\ G\ cos.\ \alpha$, daher auch die Acceleration p negativ und $= -(sin.\ \alpha + \varphi\ cos.\ \alpha)\ g$.

Fig. 365.



Sind zwei auf verſchiedenen Ebenen FG und FH, Fig. 365, befindliche Körper durch eine über eine Leitrolle C gelegte, vollkommen biegſame Schnur mit einander verbunden, ſo iſt es möglich, daß der eine von beiden Körpern ſinkt und den andern mit emporzieht. Bezeichnen wir die Gewichte dieſer Körper durch G und G_1, und die Neigungswinkel der ſchiefen Ebenen, auf welchen dieſelben fortgleiten, durch α und α_1, und nehmen wir an, daß G ſinke und G_1 mit emporziehe, ſo erhalten wir als bewegende Kraft:
$G\ sin.\alpha - G_1 sin.\alpha_1 - \varphi\, G\ cos.\alpha - \varphi\, G_1\ cos.\ \alpha_1 = G\ (sin.\alpha - \varphi\ cos.\alpha)$ $- G_1\ (sin.\ \alpha_1 + \varphi\ cos.\ \alpha_1)$, und als bewegte Maſſe $= \frac{G + G_1}{g}$, daher die Acceleration, mit welcher G ſinkt und G_1 ſteigt:

$$p = \frac{G\ (sin.\ \alpha - \varphi\ cos.\ \alpha) - G_1\ (sin.\ \alpha_1 + \varphi\ cos.\ \alpha_1)}{G + G_1} \cdot g.$$

Da die Reibung als widerſtehende Kraft keine Bewegung erzeugen kann, ſo iſt für das Sinken von G und Steigen von G_1 nöthig, daß

$$G\ (sin.\ \alpha - \varphi\ cos.\ \alpha) > G_1\ (sin.\ \alpha_1 + \varphi\ cos.\ \alpha_1), \text{ alſo}$$

$\frac{G}{G_1} > \frac{sin.\,\alpha_1 + \varphi\, cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha - \varphi\, cos.\,\alpha}$ ist. Soll hingegen G_1 sinken und G mit emporziehen, so muß sein: $\frac{G_1}{G} > \frac{sin.\,\alpha + \varphi\, cos.\,\alpha}{sin.\,\alpha_1 - \varphi\, cos.\,\alpha_1}$, oder $\frac{G}{G_1} < \frac{sin.\,\alpha_1 - \varphi\, cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha + \varphi\, cos.\,\alpha}$. So lange aber $\frac{G}{G_1}$ innerhalb der Grenzen $\frac{sin.\,\alpha_1 + \varphi\, cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha - \varphi\, cos.\,\alpha}$ und $\frac{sin.\,\alpha_1 - \varphi\, cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha + \varphi\, cos.\,\alpha}$ liegt, so lange wird die Reibung alle Bewegung verhindern. Schiefe Ebene.

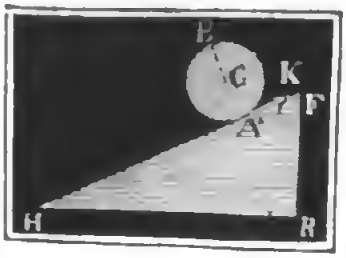
Beispiele. 1) Ein Schlitten gleitet auf einer 150 Fuß langen und 20 Grad fallenden Schneebahn herab und geht, unten angekommen, auf einer horizontalen Schneebahn fort, bis ihn die Reibung in Ruhe versetzt. Wenn nun der Coefficient der Reibung zwischen Schnee und Schlitten = 0,03 ist, welchen Weg wird der Schlitten, ohne Rücksicht auf den Widerstand der Luft, auf der horizontalen Ebene zurücklegen? Es ist die Acceleration $p = (sin.\,\alpha - \varphi\, cos.\,\alpha)\, g$ $= (sin.\ 20° - 0{,}03\ .\ cos.\ 20)\ .\ 31{,}25 = (0{,}3420 - 0{,}03\ .\ 0{,}9397)\ .\ 31{,}25$ $= 0{,}3138 . 31{,}25 = 9{,}806$ Fuß, daher die Endgeschwindigkeit des Herabgleitens: $v = \sqrt{2ps} = \sqrt{2\,.\,9{,}806\,.\,150} = \sqrt{2941{,}8} = 54{,}24$ Fuß. Auf der horizontalen Ebene ist die Acceleration $p_1 = -\varphi g = -0{,}03 . 31{,}25 = 0{,}9375$ Fuß, daher der Weg $s_1 = \frac{v^2}{2\varphi g} = \frac{2941{,}8}{1.875} = 1569$ Fuß. Die Zeit zum Herabgleiten ist $t = \frac{2s}{v} = \frac{300}{54{,}24} = 5{,}5$ Secunden, und zum Fortgleiten $t_1 = \frac{2s_1}{v}$ $= \frac{3138}{54{,}24} = 57{,}8$ Secunden, daher die ganze Fahrzeit $t + t_1 = 63{,}3$ Secunden $= 1$ Minute 3,3 Secunden. 2) Ein gefüllter Kübel K, Fig. 366, mit 250 Pfd. Bruttogewicht soll durch ein senkrecht niederziehendes Gewicht G von 260 Pfd. auf einer schiefen Ebene FH von 70 Fuß Länge und 50° Neigung emporgezogen werden; welche Zeit wird dazu nöthig sein, wenn der Coefficient der Reibung des Kübels auf der Leitung 0,36 beträgt? Es ist die bewegende Kraft $= G - (sin.\,\alpha + \varphi\, cos.\,\alpha)\, K = 260$ $- (sin.\,50° + 0{,}36 . cos.\,50°) . 250 = 260 - 0{,}9974 . 250$ $= 10{,}6$ Pfd.; daher die Beschleunigung $p = \frac{10{,}6}{250 + 260}$ $= \frac{10{,}6}{510} = 0{,}0208$ Fuß, ferner die Zeit $t = \sqrt{\frac{2s}{p}} = \sqrt{\frac{140}{0{,}0208}} = \sqrt{6731}$ $= 82{,}04$ Secunden $= 1$ Minute 22 Secunden, und die Endgeschwindigkeit $v = \frac{2s}{t} = \frac{140}{82} = 1{,}70$ Fuß.

Fig. 366.

§. 259. Bei einem von einer schiefen Ebene herabrollenden Wagen wirkt vorzüglich die Axenreibung der Beschleunigung entgegen; ist r der Axen-, und a der Radhalbmesser, so beträgt die Reibung: Rollende Bewegung.

Rollende Bewegung.

Fig. 367.



$\frac{\varphi r}{a} N = \frac{\varphi r}{a} G \cos. \alpha$, und daher die Beſchleunigung $p = (\sin. \alpha - \frac{\varphi r}{a} \cos. \alpha)\, g$.

Wälzt ſich ein runder Körper AB, z. B. ein Cylinder oder eine Kugel u. ſ. w., von einer ſchiefen Ebene FH, Fig. 367, herab, ſo hat man es mit einer progreſſiven und drehenden Bewegung zugleich zu thun. In der Regel iſt die Acceleration p des Fortſchreitens gleich der Acceleration des Drehens (§. 156); ſetzen wir daher das Trägheitsmoment des ſich wälzenden Körpers $= G l^2$, und den Halbmeſſer CA des Wälzens $= a$, ſo erhalten wir für die Kraft $AK = K$, mit welcher die Walze in Folge des Eingreifens ihrer Theile in die Theile der ſchiefen Ebene in Umdrehung geſetzt wird: $K = p \cdot \frac{G l^2}{g a^2}$. Nun wirkt aber die Kraft K der Kraft $G \sin. \alpha$ zum Herablaufen entgegen; es folgt daher die bewegende Kraft für die progreſſive Bewegung $= G \sin. \alpha - K$, und die Beſchleunigung $p = \frac{G \sin. \alpha - K}{G} \cdot g$. Eliminirt man K aus beiden Gleichungen, ſo erhält man $G p = G g \sin. \alpha - \frac{G l^2}{a^2} \cdot p$, folglich die geſuchte Acceleration:

$$p = \frac{g \sin. \alpha}{1 + \frac{l^2}{a^2}}.$$

Bei einem ſich wälzenden homogenen Cylinder iſt $l^2 = \frac{1}{2} a^2$ (§. 235), daher $p = \frac{g \sin. \alpha}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} g \sin. \alpha$; bei einer Kugel aber $l^2 = \frac{2}{5} a^2$ (§. 237), daher $p = \frac{g \sin. \alpha}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{7} g \sin. \alpha$; es iſt alſo bei dem rollenden Cylinder die Beſchleunigung nur $\frac{2}{3}$, und bei der rollenden Kugel nur $\frac{5}{7}$ mal ſo groß, als bei einem ohne Reibung gleitenden Körper.

Die Kraft des Drehens iſt:

$$K = \frac{g \sin. \alpha}{1 + \frac{l^2}{a^2}} \cdot \frac{G l^2}{g a^2} = \frac{G l^2 \sin. \alpha}{a^2 + l^2}.$$

So lange dieſelbe kleiner iſt, als die gleitende Reibung $\varphi G \cos. \alpha$, ſo lange geht auch der Körper vollkommen wälzend von der Ebene herab. Iſt aber $K > \varphi G \cos. \alpha$, d. i. $\tang. \alpha > \varphi \left(1 + \frac{a^2}{l^2}\right)$, ſo iſt die Rei-

bung nicht mehr ausreichend, dem Körper eine der fortschreitenden Geschwindigkeit gleiche Umdrehungsgeschwindigkeit zu ertheilen; es ist daher die Acceleration des Fortschreitens wie bei der gleitenden Reibung: Rollende Bewegung.

$$p = \frac{G\ sin.\alpha - \varphi\ G\ cos.\alpha}{G} \cdot g = (sin.\alpha - \varphi\ cos.\alpha)\ g,$$

und die der Umdrehung:

$$p_1 = \frac{\varphi\ G\ cos.\alpha}{G\,l^2 : a^2} \cdot g = \varphi \frac{a^2}{l^2}\ g\ cos.\alpha.$$

Bei einem Wagen vom Gewichte G mit Rädern vom Halbmesser a und dem Trägheitsmomente $G_1 l^2$ hat man:

$$K = p\,\frac{G_1 l^2}{g\,a^2} \text{ und } p = \frac{G\ sin.\alpha - \varphi \frac{r}{a}\ G\ cos.\alpha - K}{G} \cdot g, \text{ d. i.}$$

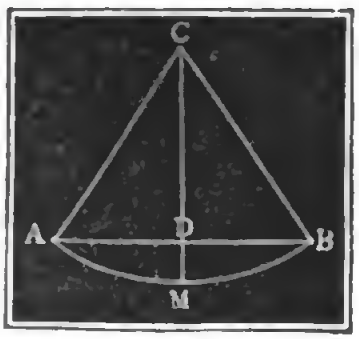
$$p = \frac{g\ (sin.\alpha - \varphi \frac{r}{a}\ cos.\alpha)}{1 + \frac{G_1 l^2}{G\,a^2}}.$$

Beispiele. 1) Ein belasteter Wagen von 3600 Pfd. Gewicht mit Rädern von 4 Fuß Höhe und 2000 Fußpf. Trägheitsmoment rollt von einer schiefen Ebene mit 12° Neigung herab, welches ist seine Acceleration, wenn der Coefficient der Arenreibung = 0,15, und die Stärke der Radaxen 3 Zoll beträgt? Es ist $\frac{G_1 l^2}{G a^2} = \frac{2000}{3600 \cdot 2^2} = \frac{5}{36} = 0{,}139$ und $\varphi \frac{r}{a} = 0{,}15 \cdot \frac{1}{4.4} = 0{,}0094$, daher die gesuchte Beschleunigung $p = \frac{31{,}25\ (sin.\ 12° - 0{,}0094 \cdot cos.\ 12°)}{1 + 0{,}139}$ $= \frac{31{,}25\ (0.2079 - 0{,}0094 \cdot 0.978)}{1{,}139} = \frac{31{,}25 \cdot 0{,}1987}{1{,}139} = 5{,}452$ Fuß. 2) Mit welchen Accelerationen rollt eine massive Walze von einer schiefen Ebene herab, deren Fallwinkel 40° beträgt? Ist der Coefficient für die gleitende Reibung der Walze auf der Ebene = 0,24, so hat man $\varphi \left(1 + \frac{a^2}{l^2}\right) = 0{,}24\ (1 + 2)$ $= 0{,}72$; nun ist aber *tang.* 40° = 0,839; es fällt daher *tang.* α größer als $\varphi \left(1 + \frac{a^2}{l^2}\right)$, und die Acceleration der rollenden Bewegung kleiner als die der progressiven Bewegung aus. Die letztere ist $p = (sin.\ \alpha - \varphi\ cos.\ \alpha)\ g$ $= (0{,}6428 - 0{,}24 \cdot 0{,}7660) \cdot 31.25 = 0{,}459 \cdot 31{,}25 = 14{,}34$ Fuß, die erstere aber nur $p_1 = 0{,}24 \cdot 2 \cdot 31{,}25\ cos.\ 40° = 15 \cdot 0{,}766 = 11{,}49$ Fuß.

§. 260. Ein an einer horizontalen Axe hängender Körper ist im Gleichgewichte, so lange sein Schwerpunkt senkrecht unter der Axe liegt; bringt man aber den Schwerpunkt aus der die Axe enthaltenden Vertikalebene, und überläßt man den Körper sich selbst, so nimmt derselbe eine schwingende Bewegung (franz. und engl. oscillation), d. i. eine hin- und hergehende Bewegung im Kreise, an. Im Allgemeinen heißt Kreispendel.

Kreispendel. aber ein um eine horizontale Axe ſchwingender Körper ein **Pendel** (franz. pendule; engl. pendulum). Iſt der ſchwingende Körper ein materieller Punkt, und beſteht die Verbindung deſſelben mit der Umdrehungsaxe in einer gewichtsloſen Linie, ſo hat man es mit einem **einfachen** oder **mathematiſchen Pendel** (franz. und engl. p. simple) zu thun; beſteht aber das Pendel in einem ausgedehnten Körper oder aus mehreren Körpern, ſo heißt daſſelbe ein **zuſammengeſetztes, phyſiſches** oder **materielles Pendel** (franz. p. composé, engl. composed p.). Ein ſolches Pendel läßt ſich als eine feſte Verbindung von lauter einfachen, um eine gemeinſchaftliche Axe ſchwingenden Pendeln anſehen. Das einfache Pendel iſt nur ein eingebildetes, ſeine Annahme gewährt aber beſondere Vortheile, weil es leicht iſt, die Theorie der Bewegung des zuſammengeſetzten Pendels auf die des einfachen Pendels zurückzuführen.

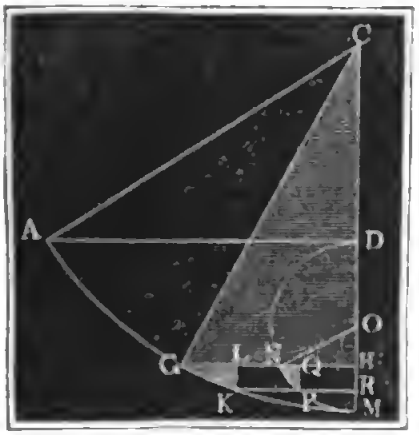
Fig. 368.



Wird das in C aufgehangene Pendel, Fig. 368, aus ſeiner vertikalen Lage CM in die Lage CA gebracht und nun ſich ſelbſt überlaſſen, ſo geht es vermöge ſeiner Schwere in einer beſchleunigten Bewegung nach CM zurück, und es kommt deſſen Maſſe im tiefſten Punkte M mit einer Geſchwindigkeit v an, deren Höhe $\frac{v^2}{2g}$ der Fallhöhe DM gleich iſt. In Folge dieſer Geſchwindigkeit durchläuft es nun auf der andern Seite den Bogen $MB = MA$, und ſteigt dabei wieder auf die Höhe DM. Von B aus fällt es von Neuem nach M und A zurück, und ſo geht es wiederholt im Kreisbogen AB hin und her. Wäre der Widerſtand der Luft und die Axenreibung ganz beſeitigt, ſo würde dieſe ſchwingende Bewegung des Pendels ohne Ende fortgehen, weil aber dieſe Hinderniſſe nie ganz wegzubringen ſind, ſo werden die Schwingungsbögen mit der Zeit immer kleiner und kleiner, und es geht das Pendel endlich zur Ruhe über.

Die Bewegung des Pendels von A bis B nennt man einen **Schwung** oder **Pendelſchlag** (franz. und engl. oscillation), den Bogen AB ſelbſt aber den **Schwingungsbogen** (franz. und engl. amplitude); der den halben Schwingungsbogen meſſende Winkel, um welchen ſich das Pendel zu beiden Seiten von der Lothlinie CM entfernt, heißt der **Elongationswinkel, Ausſchlagswinkel** oder **Ausſchlag** ſchlechtweg. Die Zeit, in welcher das Pendel eine Oscillation macht, heißt endlich **Schwingungszeit** oder **Schwingungsdauer** (franz. durée d'une oscillation; engl. time of oscillation).

Fig. 369.



Einfaches Pendel.

§. 261. Wegen der häufigen Anwendung der Pendel im praktischen Leben, namentlich bei Uhren, ist es wichtig, die Schwingungszeiten derselben zu kennen; die Bestimmung derselben ist daher eine Hauptaufgabe der Mechanik. Setzen wir in der Absicht, diese Aufgabe zu lösen, die Pendellänge $AC = MC = r$, Fig. 369, und die einem ganzen Schwunge entsprechende Fall- oder Steighöhe $MD = h$. Nehmen wir nun an, daß das Pendel von A nach G gefallen sei, und setzen wir die dieser Bewegung entsprechende Fallhöhe $DH = x$, so können wir die erlangte Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gx}$ und das Zeittheilchen, innerhalb dessen der Wegtheil GK durchlaufen wird, $\tau = \frac{GK}{v} = \frac{GK}{\sqrt{2gx}}$ setzen. Beschreiben wir nun aus der Mitte O von $MD = h$, und mit dem Halbmesser $OM = OD = \frac{1}{2}h$ einen Halbkreis MND, so können wir von diesem einen Bogentheil NP angeben, welcher mit GK gleiche Höhe $PQ = KL = RH$ hat und in einfacher Beziehung zu diesem Wegtheile GK steht. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke GKL und CGH ist $\frac{GK}{KL} = \frac{CG}{GH}$, und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke NPQ und ONH ist $\frac{NP}{PQ} = \frac{ON}{NH}$; dividiren wir daher diese beiden Proportionen durch einander und berücksichtigen wir, daß $KL = PQ$ ist, so erhalten wir das Verhältniß der genannten Bogentheile: $\frac{GK}{NP} = \frac{CG.NH}{GH.ON}$. Der Lehre vom Kreise, und insbesondere dem Theorem von der mittleren Proportionallinie zufolge ist aber $\overline{GH}^2 = MH(2CM - MH)$ und $\overline{NH}^2 = MH.DH$, es folgt daher $\frac{GK}{NP} = \frac{CG.\sqrt{DH}}{ON.\sqrt{2CM - MH}} = \frac{r\sqrt{x}}{\frac{1}{2}h\sqrt{2r - (h - x)}}$ und die Zeit zum Durchlaufen eines Wegelementes:

$$\tau = \frac{r\sqrt{x}}{\frac{1}{2}h\sqrt{2r-(h-x)}} \cdot \frac{NP}{\sqrt{2gx}} = \frac{2r}{h\sqrt{2g[2r-(h-x)]}} \cdot NP$$

$$= \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{NP}{h\sqrt{1 - \frac{h-x}{2r}}}.$$

Einfaches Pendel

In den meiſten Fällen der Anwendung geſtattet man dem Pendel nur einen kleinen Ausſchlag, und es iſt deshalb $\frac{h}{2r}$, ſowie $\frac{x}{2r}$, und alſo auch $\frac{h-x}{2r}$ eine ſo kleine Größe, daß wir ſie, ſowie ihre Potenzen, außer Acht laſſen, und nun $\tau = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{NP}{h}$ ſetzen können. Die Dauer eines halben Schwunges, oder die Zeit, innerhalb welcher das Pendel den Bogen AM zurücklegt, iſt gleich der Summe aller den Elementen GK oder NP entſprechenden Zeittheilchen, oder, da $\frac{1}{h} \cdot \sqrt{\frac{r}{g}}$ ein conſtanter Factor iſt, gleich $\frac{1}{h}\sqrt{\frac{r}{g}}$ mal Summe aller, den Halbkreis DNM bildenden Elemente, d. i. $= \frac{1}{h}\sqrt{\frac{r}{g}}$ mal Halbkreis $\left(\frac{\pi h}{2}\right)$ ſelbſt, alſo

$$= \frac{1}{h}\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{\pi h}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Dieſelbe Zeit braucht aber auch das Pendel beim Aufſteigen, weil hier die Geſchwindigkeiten dieſelben und nur in der Richtung entgegengeſetzt vorkommen, und deshalb iſt denn eine ganze Schwingungsdauer doppelt ſo groß,

$$\text{d. i. } t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

§. 262*). Um die Schwingungsdauer mit größerer Genauigkeit zu beſtimmen, was bei größeren Schwingungswinkeln nothwendig iſt, verwandeln wir den Ausdruck:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{h-x}{2r}}} = \left(1-\frac{h-x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ in die Reihe}$$

$$1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{h-x}{2r} + \tfrac{3}{8} \cdot \left(\frac{h-x}{2r}\right)^2 + \ldots,$$

ſo daß wir die Zeit für ein Wegelement

$$\tau = dt = \left[1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{h-x}{2r} + \tfrac{3}{8} \cdot \left(\frac{h-x}{2r}\right)^2 + \ldots\right] \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{NP}{h} \text{ erhalten.}$$

Setzen wir den Centriwinkel $DON = \varphi^0$, alſo den Bogen $DN = DO \cdot \varphi = \frac{h\varphi}{2}$, ſo erhalten wir das Bogenelement $NP = \frac{1}{2} h\, d\varphi$ und die Höhe

$$MH = h - x = MO - HO = \frac{h}{2} + \frac{h}{2} \cos.\varphi = (1+\cos.\varphi)\,\frac{h}{2};$$

daher das Zeitelement

$$dt = \left[1+\tfrac{1}{2}.(1+cos.\varphi)\frac{h}{4r}+\tfrac{3}{8}(1+cos.\varphi)^2\left(\frac{h}{4r}\right)^2+..\right]\sqrt{\frac{r}{g}}.\frac{d\varphi}{2}.$$

Einfaches Pendel.

Nun ist aber

$$(1+cos.\varphi)^2 = 1+2\,cos.\varphi+(cos.\varphi)^2 = 1+2\,cos.\varphi+\frac{1+cos.2\varphi}{2}$$

$$= \tfrac{3}{2}+2\,cos.\varphi+\tfrac{1}{2}cos.2\varphi, \text{ und}$$

$$\int d\varphi = \varphi,$$

$$\int cos.\varphi\,d\varphi = sin.\varphi, \text{ und}$$

$$\int cos.2\varphi\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\int cos.2\varphi\,d(2\varphi) = \tfrac{1}{2}sin.2\varphi;$$

(s. analytische Hülfslehren, Art. 20), daher folgt die Zeit zum Durchlaufen des Bogens AK:

$$t = \int dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\int\left[1+\tfrac{1}{2}(1+cos.\varphi)\frac{h}{4r}+\tfrac{3}{8}(1+cos.\varphi)^2\left(\frac{h}{4r}\right)^2+..\right]d\varphi$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\left[\varphi+\tfrac{1}{2}(\varphi+sin.\varphi)\frac{h}{4r}+\tfrac{3}{8}(\tfrac{3}{2}\varphi+2sin.\varphi+\tfrac{1}{4}sin.2\varphi)\left(\frac{h}{4r}\right)^2+..\right].$$

Die Zeit zum Durchlaufen des Bogens AM ist, da hier $\varphi = \pi$ und $sin.\,\pi = 0$ wird:

$$t_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}.\pi\left[1+\tfrac{1}{2}.\frac{h}{4r}+\tfrac{3}{8}.\tfrac{3}{2}.\left(\frac{h}{4r}\right)^2+..\right]$$

$$= \left[1+(\tfrac{1}{2})^2.\frac{h}{2r}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2.\left(\frac{h}{2r}\right)^2+..\right]\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Da die Geschwindigkeit beim Steigen auf der andern Seite genau so abnimmt, wie sie beim Durchfallen der Bogenhälfte AM wächst, so ist die Zeit zum Durchlaufen des ganzen Bogens, oder die sogenannte Schwingungsdauer:

$$t = 2t_1 = \left[1+(\tfrac{1}{2})^2\frac{h}{2r}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{h}{2r}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{h}{2r}\right)^3+..\right]\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Schwingt das Pendel im Halbkreise, so hat man $h = r$, und daher die Schwingungszeit:

$$t = \left(1+\tfrac{1}{8}+\frac{9}{256}+\frac{225}{18432}+..\right)\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = 1{,}180\,\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

In den meisten Fällen der Anwendung ist der Schwingungsbogen viel kleiner als der Halbkreis, und die Formel

$$t = \left(1+\frac{h}{8r}\right)\pi\sqrt{\frac{h}{g}} \text{ hinreichend genau.}$$

Aus dem Elongationswinkel α folgt $cos.\,\alpha = \frac{r-h}{r} = 1-\frac{h}{r}$, also $\frac{h}{r} = 1-cos.\,\alpha$, und daher $\frac{h}{8r} = \tfrac{1}{4}.\frac{1-cos.\,\alpha}{2} = \tfrac{1}{4}\left(sin.\frac{\alpha}{2}\right)^2$;

Einfaches Pendel.

es läßt ſich folglich hiernach die einem gegebenen Elongationswinkel entſprechende Correction der Schwingungszeit finden. Iſt z. B. dieſer Winkel $= 15^0$, ſo hat man $\frac{h}{8r} = \frac{1}{4}\left(sin.\ \frac{15^0}{2}\right)^2 = 0{,}00426$, dagegen für $\alpha = 5^0$, $\frac{h}{8r} = 0{,}00047$; bei dem letzten Elongationswinkel iſt alſo die Schwingungsdauer $t = 1{,}00047 \cdot \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$.

Man kann alſo bei einem Ausſchlag unter 5^0 ziemlich genau die Schwingungsdauer $t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{r} = 0{,}562\ \sqrt{r}$ ſetzen.

§. 263. Da in der Formel $t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$ der Ausſchlagswinkel gar nicht vorkommt, ſo folgt auch, daß die Dauer kleiner Pendelſchwingungen gar nicht von dieſem Winkel abhängt, daß alſo verſchiedene, jedoch nicht weit ausſchlagende gleich lange Pendel *iſochron* ſchwingen oder gleiche Schwingungszeiten haben. Ein Pendel mit 4 Grad Ausſchlag hat alſo (faſt) dieſelbe Schwingungsdauer, als ein Pendel mit 1 Grad Ausſchlag.

Vergleichen wir die Schwingungsdauer t mit der Zeit des freien Falles, ſo ſtoßen wir auf Folgendes. Die Zeit zum freien Fallen von der Höhe r iſt $t_1 = \sqrt{\frac{2r}{g}} = \sqrt{2}.\sqrt{\frac{r}{g}}$, daher iſt $t : t_1 = \pi : \sqrt{2}$; die Zeit eines Pendelſchwunges verhält ſich alſo zur Zeit, in welcher ein Körper von der Pendellänge frei herabfällt, wie die Ludolph'ſche Zahl π zur Quadratwurzel aus 2. Die Zeit zum Durchfallen von $2r$ iſt

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 2r}{g}} = 2\sqrt{\frac{r}{g}},$$

daher verhält ſich auch die *Schwingungsdauer zur Zeit des Fallens von der doppelten Pendellänge*, wie π zu 2.

Setzen wir die den Pendellängen r und r_1 entſprechenden Schwingungszeiten t und t_1, ſo erhalten wir $t : t_1 = \sqrt{r} : \sqrt{r_1}$; es verhalten ſich alſo bei einer und derſelben Beſchleunigung der Schwere *die Schwingungszeiten wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen*. Iſt dagegen n die Zahl der Schwingungen, welche das eine Pendel in einer gewiſſen Zeit, z. B. in der Minute, macht, und n_1 die Zahl, welche in derſelben Zeit vom andern Pendel gemacht werden, ſo hat man $t : t_1 = \frac{1}{n} : \frac{1}{n_1}$, daher umgekehrt $n : n_1 = \sqrt{r_1} : \sqrt{r}$, d. h. *die Schwingungszahlen verhalten ſich umgekehrt*, wie

die Quadratwurzeln aus den Pendellängen. Das 4mal so lange Pendel giebt also die halbe Schwingungszahl. Einfaches Pendel.

Ein Pendel heißt ein Secundenpendel (franz. p. à seconde; engl. seconds pend.), wenn seine Schwingungsdauer eine Secunde beträgt. Setzen wir in der Formel $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, $t = 1$, so bekommen wir die Länge des Secundenpendels $r = \frac{g}{\pi^2}$, für das preußische Fußmaaß $r = 3{,}167$ Fuß $= 38$ Zoll; für das Metermaaß aber $r = 0{,}9938$ Meter.

Aus der Formel $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$ folgt durch Umkehrung $g = \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 r$; es läßt sich also hiernach aus der Länge r eines Pendels und aus der Schwingungsdauer t desselben die Beschleunigung der Schwere finden. Diese Methode ist sogar einfacher und sicherer, als die Anwendung der Atwood'schen Fallmaschine.

Anmerkung. Durch Pendelbeobachtungen hat man auch die Abnahme der Schwerkraft von den Polen nach dem Aequator zu nachgewiesen und deren Größe bestimmt. Diese Abnahme hat ihren Grund in dem Einflusse der Centrifugalkraft, welche aus der täglichen Umdrehung der Erde um ihre eigene Axe entspringt, und in der Zunahme der Erdhalbmesser von den Polen nach dem Aequator zu. Die Centrifugalkraft vermindert z. B. im Aequator die Schwere um $\frac{1}{289}$ ihres Werthes (§. 246), während sie unter den Polen selbst Null ist. Ist β die geographische Breite des Beobachtungsortes, so hat man, Pendelbeobachtungen zufolge, an diesem Orte die Acceleration der Schwere

$$g = 9{,}8056\ (1 - 0{,}00259\ cos.\ 2\beta)$$

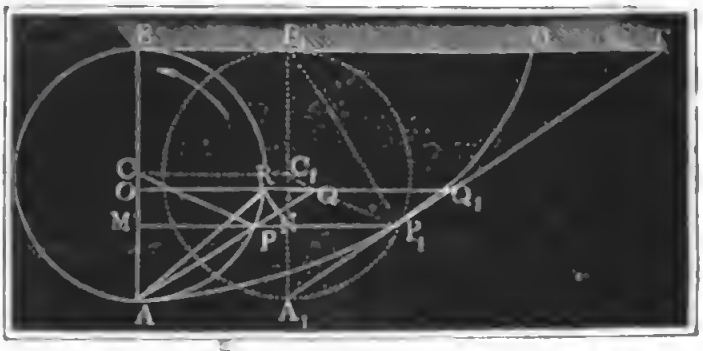
in Metern, also unter dem Aequator, wo $\beta = 0$, also $cos.\ 2\beta = 1$ ist, $g = 9{,}8056\ (1 - 0{,}00259) = 9{,}780$ Meter, und unter den Polen, wo $\beta = 90°$, also $cos.\ 2\beta = cos.\ 180° = -1$ ist, $g = 9{,}8056 \cdot 1{,}00259 = 9{,}831$ Meter. Uebrigens ist g auf Bergen und in Gruben kleiner, als im Niveau des Meeres.

§. 264. Man kann auf unendlich mannichfaltige Weise einen Körper in Schwingungen oder hin- und hergehende Bewegungen versetzen, nennt wohl auch jeden in einem dieser Bewegungszustände befindlichen Körper ein Pendel, und unterscheidet hiernach verschiedene Arten von Pendeln, wie z. B. das Kreispendel, welches wir in Vorstehendem betrachtet haben, ferner das Cycloidenpendel, wo der Körper in Folge seiner Schwere in einem Cycloidenbogen hin- und herschwingt, ferner das Torsionspendel, wo der Körper in Folge der Torsion eines Fadens oder Drahtes schwingt, u. s. w. Hier möge nur noch vom Cycloidenpendel die Rede sein. Cycloide.

Die Cycloide (fr. cycloide, engl. cycloid) AD, Fig. 370 (a. f. S.), ist eine krumme Linie, welche von jedem Punkte A eines Kreises APB beschrieben wird, der sich auf einer geraden Linie BD wälzt. Hat sich dieser Erzeugungskreis um $BB_1 = CC_1$ fortgewälzt, ist er also in die

Cycloide. Lage A_1B_1 gekommen, ſo hat er ſich auch um den Bogen $AP = A_1P_1 = BB_1 = PP_1$ gedreht, es iſt folglich die irgend einer Abſciſſe AM

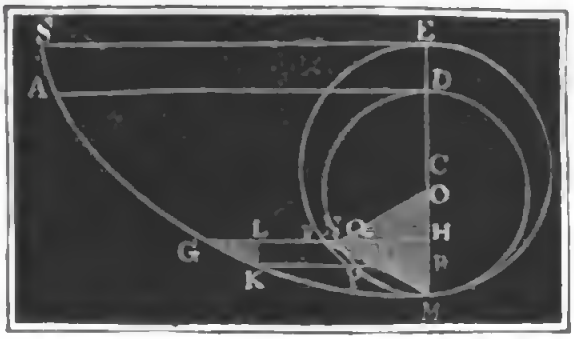
Fig. 370.



entſprechende Ordinate MP_1 = Ordinate MP des Kreiſes plus Drehungsbogen AP. Bei dieſem Wälzen dreht ſich der Erzeugungskreis um den jedesmaligen Berührungspunkt in der Grundlinie, ſteht er alſo in A_1B_1, ſo dreht er ſich um B_1 und beſchreibt dadurch das Bogenelement P_1Q_1 der Cycloide; es iſt folglich die Sehne B_1P_1 die Richtung der Normale, und die Sehne A_1P_1 die der Tangente im Punkte P_1 der Cycloide. Die bis zur Ordinate OQ_1 reichende Verlängerung PQ der Sehne AP iſt auch gleich dem Cycloidenelemente P_1Q_1; da ferner der Weg PR des Drehens gleich iſt dem Wege RQ des Fortſchreitens, ſo iſt PQ Grundlinie eines gleichſchenkeligen Dreieckes PRQ und gleich der doppelten Linie PN, welche das Perpendikel RN abſchneidet; endlich iſt aber PN die Differenz von zwei benachbarten Sehnen AR und AP, und folglich das Cycloidenelement P_1Q_1 = der doppelten Sehnendifferenz $(AR - AP)$. Da die ſtetig auf einander folgenden Bogenelemente zuſammen einen ganzen Bogen AP_1, und ebenſo die ſämmtlichen Sehnendifferenzen die ganze Sehne AP ausmachen, ſo iſt hiernach die Länge des Cycloidenbogens AP_1 gleich dem Doppelten der ihm zugehörigen Kreisſehne AP. Der halben Cycloide AP_1D entſpricht der Durchmeſſer als Kreisſehne; es iſt daher die Länge der halben Cycloide gleich dem doppelten Durchmeſſer des Erzeugungskreiſes.

Cycloidenpendel. §. 265. Aus den im Vorſtehenden entdeckten Eigenſchaften der Cycloide läßt ſich nun die Theorie des Cycloidenpendels, oder die Formel für die Zeit der Schwingung eines Körpers in einem Cycloidenbogen leicht entwickeln. Es ſei AKM, Fig. 371, die Hälfte des Cycloidenbogens, in welchem ein Körper fällt und

Fig 371.



steigt oder oscillirt, und ME sei der Erzeugungskreis, also $CE = CM = r$ der Halbmesser desselben. Hat der Körper den Bogen AG durchlaufen, ist er also von der Höhe $DH = x$ herabgefallen (vergl. §. 261), so hat er die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gx}$ erlangt, mit welcher er das Bogenelement GK in der Zeit

$$\tau = \frac{GK}{v} = \frac{GK}{\sqrt{2gx}}$$

durchläuft. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke GLK und FHM ist aber $\frac{GK}{KL} = \frac{FM}{MH}$, oder, da $\overline{FM}^2 = MH \,.\, ME$,

$\frac{GK}{KL} = \frac{\sqrt{MH \,.\, ME}}{MH} = \frac{\sqrt{ME}}{\sqrt{MH}}$; wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke NPQ und ONH ist $\frac{NP}{PQ} = \frac{ON}{NH}$, oder, da $\overline{NH}^2 = MH \,.\, DH$, $\frac{NP}{PQ} = \frac{ON}{\sqrt{MH \,.\, DH}}$. Nun ist $KL = PQ$, daher folgt durch Division

$$\frac{GK}{NP} = \frac{\sqrt{ME}}{\sqrt{MH}} \cdot \frac{\sqrt{MH \,.\, DH}}{ON} = \frac{\sqrt{ME \,.\, DH}}{ON},$$

oder, da ON die halbe Fallhöhe $= \frac{h}{2}$, $ME = 2r$ und $DH = x$ ist,

$$\frac{GK}{NP} = \frac{\sqrt{2rx}}{\frac{1}{2}h} = \frac{2\sqrt{2rx}}{h}.$$

Setzt man nun $GK = \frac{2\sqrt{2rx}}{h} \,.\, NP$ in die Formel $\tau = \frac{GK}{\sqrt{2gx}}$, so erhält man:

$$\tau = \frac{2\sqrt{2rx}}{\sqrt{2gx} \,.\, h} \,.\, NP = \frac{2}{h}\sqrt{\frac{r}{g}} \,.\, NP.$$

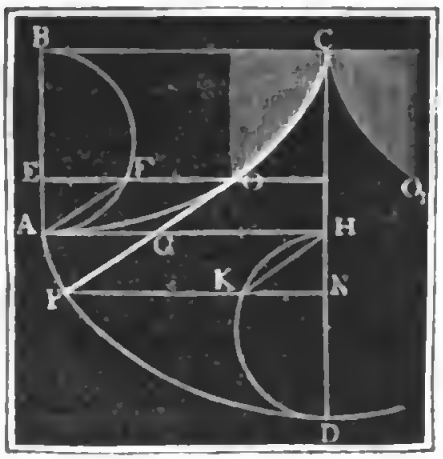
Die Zeit des Fallens von A bis M ist nun die Summe aller Werthe von τ, welche man erhält, wenn man für NP nach und nach alle Theile des Halbkreises DNM einführt, also $= \frac{2}{h}\sqrt{\frac{r}{g}}$ mal Halbkreis DNM $\left(\frac{\pi}{2}h\right)$ setzt. Auf diese Weise erhält man die Zeit zum Durchfallen des Bogens AM, $t_1 = \frac{\pi}{2}h \,.\, \frac{2}{h}\sqrt{\frac{r}{g}} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$, und da die Zeit des Steigens im Bogen MB ebenso groß ist, die Schwingungszeit oder Zeit zum Durchlaufen des ganzen Bogens AMB: $t = 2t_1 = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = \pi\sqrt{\frac{4r}{g}}$.

Da diese Größe ganz unabhängig ist von der Bogenlänge, so folgt, daß mathematisch genau die Schwingungszeiten für alle Bögen einer und der-

Cycloiden-pendel.

ſelben Cycloide gleich ſind, das Cycloidenpendel alſo vollkommen isochron ſchwingt. Vergleichen wir dieſe Formel mit der Formel für die Schwingungsdauer eines Kreispendels, ſo folgt, daß die Schwingungszeiten für beide Pendelarten einander gleich ſind, wenn die Länge des Kreispendels gleich iſt dem vierfachen Halbmeſſer von dem Erzeugungskreiſe des Cycloidenpendels.

Fig. 372.



Anmerkung. Um einen an einem biegſamen Faden hängenden Körper in einem Cycloidenbogen ſchwingen laſſen zu können und dadurch ein Cycloidenpendel herzuſtellen, hängt man denſelben zwiſchen zwei Cycloidenbögen CO und CO_1, Fig 372, auf, ſo daß ſich der Faden bei jedem Ausſchlage von dem einen Bogen ab- und auf den andern aufwickelt. Daß bei dieſem Ab- und Aufwickeln des Fadens COP der Endpunkt P deſſelben eine der gegebenen Cycloide gleiche Curve beſchreibt, daß alſo die Evolvente der Cycloide eine gleiche Cycloide in umgekehrter Lage iſt, läßt ſich einfach ſo darthun. So wie die Länge der halben Cycloide $COA = CD = 2AB$ iſt, ebenſo hat man den Bogen $OA =$ der abgewickelten Geraden OP; aber Bogen OA iſt $=$ 2mal Sehne $AF = 2GO$, daher auch $PG = GO = AF$ und $HN = AE$. Beſchreibt man nun über DH einen Halbkreis DKH, und zieht man die Ordinate NP, ſo hat man $KH = PG$, und daher auch $PK = GH = AH - AG = AH - FO$ = Bog. AFB — Bog. AF = Bog. BF = Bog. DK, und endlich die Ordinate NP = Kreisordinate NK plus entſprechender Bogen DK, alſo NP Ordinate einer Cycloide und DPA die dem Erzeugungskreiſe DKH entſprechende Cycloide.

Ueber die Anwendung des Cycloidenpendels bei Uhren ſiehe: Jahrbücher des polytechn. Inſtitutes in Wien. Band 20, Art. II.

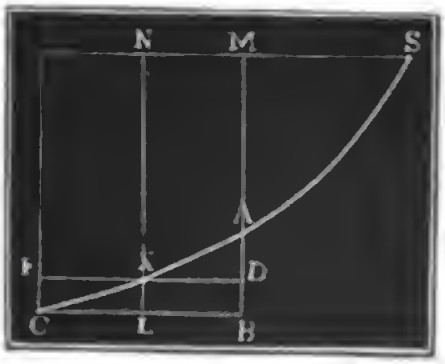
§. 266 *). Es läßt ſich mittels des höhern Calcüls nachweiſen, daß die Cycloide außer dieſer Eigenſchaft des Iſochronismus oder Tautochronismus auch noch die des Brachyſtochronismus beſitzt, daß ſie nämlich diejenige Linie zwiſchen zwei gegebenen Punkten iſt in welcher ein Körper in der kürzeſten Zeit von dem einen Punkte nach dem andern herabfällt.

Der Beweis hierzu läßt ſich, nach Jacob Bernoulli, auf folgende Weiſe führen.

Es ſei die relative Lage zweier Punkte A und B, Fig. 373, durch den vertikalen Abſtand $AB = a$ und den horizontalen Abſtand $BC = b$ und die einer horizontalen Linie DE durch den vertikalen Abſtand $AD = h$ gegeben; man ſucht den Punkt K, in welchem ein von A nach C fallender Körper die Linie DE durchſchneiden muß, um in der

kürzesten Zeit von A nach C zu gelangen. Kommt der Körper in A mit der Geschwindigkeit v an, so ist die Geschwindigkeit in K, Cycloidenpendel.

Fig. 373.



$$v_1 = \sqrt{v^2 + 2gh};$$

setzen wir nun voraus, daß die Punkte A, K und C einander unendlich nahe liegen, oder daß a, b und h sehr klein seien gegen v, so können wir auch annehmen, daß AK gleichförmig mit der Geschwindigkeit v, und KC gleichförmig mit der Geschwindigkeit w durchlaufen werde, daß also die Zeit zum Durchfallen des Weges AKC:

$$t = \frac{AK}{v} + \frac{KC}{v_1} \text{ sei.}$$

Setzen wir $DK = z$, so haben wir $AK = \sqrt{h^2 + z^2}$ und $KC = \sqrt{(a-h)^2 + (b-z)^2}$, und daher

$$t = \frac{\sqrt{h^2+z^2}}{v} + \frac{\sqrt{(a-h)^2+(b-z)^2}}{\sqrt{v^2+2gh}}.$$

Diese Zeit wird nun ein Minimum, wenn wir ihr erstes Differentialverhältniß, d. i.

$$\frac{dt}{dz} = \frac{z}{v\sqrt{h^2+z^2}} - \frac{b-z}{\sqrt{v^2+2gh}\,\sqrt{(a-h)^2+(b-z)^2}} = \text{Null}$$

setzen.

Nun ist aber $\frac{z}{\sqrt{h^2+z^2}} = \frac{KD}{AK} = cos.\,AKD = cos.\,\varphi$ und

$$\frac{b-z}{\sqrt{(a-h)^2+(b-z)^2}} = \frac{CL}{CK} = cos.\,KCB = cos.\,\varphi_1,$$

wofern wir die Neigungswinkel der Wege AK und KC gegen den Horizont mit φ und φ_1 bezeichnen; daher erhalten wir als Bedingungsgleichung

$$\frac{cos.\,\varphi}{v} = \frac{cos.\,\varphi_1}{v_1}.$$

Setzen wir die den Geschwindigkeiten v und v_1 entsprechenden Fallhöhen MA und $NK = y$ und y_1, also $v = \sqrt{2gy}$ und $v_1 = \sqrt{2gy_1}$, so geht unsere Gleichung in folgende

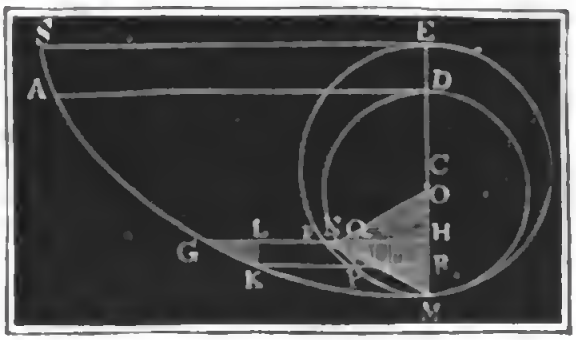
$$\frac{cos.\,\varphi}{\sqrt{y}} = \frac{cos.\,\varphi_1}{\sqrt{y_1}}$$

über, und wenden wir nun unsern Fall auf das Fallen in einer krummlinigen Bahn $SAKC$ an, so folgt hiernach, daß für jede Stelle in dieser

Cycloidenpendel.

der Quotient $\frac{cos.\varphi}{\sqrt{y}}$ eine conſtante Zahl, etwa $= \frac{1}{\sqrt{2r}}$ iſt.

Fig. 374.



Dieſe Eigenſchaft entſpricht aber einer Cycloide SGM, Fig. 374, denn es iſt für ein Wegelement GK,

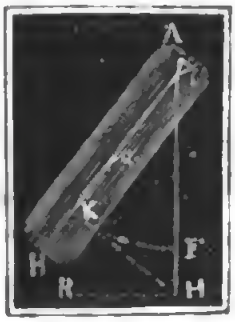
$$cos.\varphi = \frac{GL}{GK} = \frac{FH}{FM}$$
$$= \frac{\sqrt{MH.EH}}{\sqrt{MH.EM}}$$
$$= \sqrt{\frac{EH}{EM}} = \sqrt{\frac{y}{2r}},$$

und daher $\frac{cos.\varphi}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2r}}$, wobei r den Halbmeſſer $CM = CE$ des Erzeugungskreiſes bezeichnet.

Es iſt alſo ein Cycloidenbogen SG, in welchem ein Körper in der kürzeſten Zeit von einem Punkte S nach einem anderen G herabfällt.

Zuſammengeſetztes Pendel.

Fig. 375



§. 267. Um die Schwingungszeit eines zuſammengeſetzten Pendels oder irgend eines um eine horizontale Axe C ſchwingenden Körpers AB, Fig. 375, zu finden, ſuchen wir zunächſt den Mittelpunkt des Schwunges oder Schwingungspunkt (franz. centre d'oscillation; engl. center of oscillation), d. i. denjenigen Punkt K des Körpers auf, welcher, wenn er für ſich allein um C ſchwingt oder ein mathematiſches Pendel ausmacht, dieſelbe Schwingungsdauer hat, als der ganze Körper. Man ſieht leicht ein, daß es dieſer Erklärung zufolge mehrere Schwingungspunkte in einem Körper giebt; gewöhnlich meint man aber nur denjenigen von ihnen, welcher mit dem Schwerpunkte in einem und demſelben Perpendikel zur Umdrehungsaxe liegt.

Aus dem veränderlichen Ausſchlagswinkel $KCF = \varphi$ folgt die Beſchleunigung des iſolirten Punktes K, $= g\,sin.\varphi$, weil man ſich vorſtellen kann, daß derſelbe von einer ſchiefen Ebene mit der Neigung $KHR = KCF = \varphi$ herabgleitet. Iſt aber Ma^2 das Trägheitsmoment des ganzen Körpers oder der Körperverbindung AB, Ms deſſen ſtatiſches Moment, d. i. das Product aus Maſſe und aus dem Abſtande $CS = s$ ihres Schwerpunktes S von der Umdrehungsaxe C, und r die Entfernung CK

des Schwingungspunktes K von der Umdrehungsaxe oder die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem materiellen Pendel AB isochron schwingt, so hat man die auf K reducirte Masse $= \frac{Ma^2}{r^2}$, und die dahin reducirte Umdrehungskraft $= \frac{s}{r} M g \sin. \varphi$; folglich die Beschleunigung $p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{s}{r} Mg \sin. \varphi : \frac{Ma^2}{r^2} = \frac{Msr}{Ma^2} . g \sin. \varphi$. Damit dieses Pendel mit dem mathematischen einerlei Schwingungsdauer habe, ist nöthig, daß beide an jeder Stelle ihrer Bewegung einerlei Beschleunigung besitzen, daß also $\frac{Msr}{Ma^2} . g \sin. \varphi = g \sin. \varphi$ sei. Diese Gleichung giebt nun $r = \frac{Ma^2}{Ms} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Statisches Moment}}$. Man findet also die Entfernung des Schwingungspunktes vom Drehungspunkte, oder die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem zusammengesetzten gleiche Schwingungsdauer hat, wenn man das Trägheitsmoment des zusammengesetzten Pendels durch sein statisches Moment dividirt.

Zusammengesetztes Pendel.

Führt man diesen Werth von r in die Formel $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, so erhält man für die Schwingungsdauer eines zusammengesetzten Pendels die Formel $t = \pi \sqrt{\frac{Ma^2}{Mgs}} = \pi \sqrt{\frac{a^2}{gs}}$, oder genauer, $t = \left(1 + \frac{h}{8r}\right) \pi \sqrt{\frac{a^2}{gs}}$. Umgekehrt läßt sich aus der Schwingungsdauer eines aufgehängten Körpers sein Trägheitsmoment finden, indem man setzt:

$$Ma^2 = \left(\frac{t}{\pi}\right)^2 . Mgs \text{ oder } a^2 = \left(\frac{t}{\pi}\right)^2 gs.$$

Fig. 376.

Beispiele. 1) Für eine gleichförmig dichte prismatische Stange AB, Fig. 376, deren Drehpunkt C um $CA = l_1$ und $CB = l_2$ von den Enden A und B absteht, hat man das Trägheitsmoment nach §. 233: $Ma^2 = \frac{1}{3} F (l_1^3 + l_2^3)$, und das statische Moment $Ms = \frac{1}{2} F (l_1^2 - l_2^2)$, es ist daher die Länge des mathematischen Pendels, welches mit dieser Stange isochron schwingt, $r = \frac{Ma^2}{Ms} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l_1^3 + l_2^3}{l_1^2 - l_2^2} = \frac{l^2 + 3d^2}{6d}$, wenn l die Summe $l_1 + l_2$, und d die Differenz $l_1 - l_2$ bezeichnet. Soll diese Stange halbe Secunden schlagen, so hat man $r = \frac{1}{4} \cdot \frac{g}{\pi^2} = \frac{1}{4} . 38 = 9{,}5$ Zoll, beträgt aber die ganze Länge l der Stange 12 Zoll, so ist zu setzen: $9.5 = \frac{144 + 3d^2}{6d}$ oder

Zuſammengeſetztes Pendel.

Fig. 377.

$d^2 - 19d = -48$, es folgt daher $d = \frac{19 - \sqrt{169}}{2} = 3$, und hieraus $l_1 = \frac{l+d}{2} = {}^{15}/_{2} = 7{}^{1}/_{2}$ Zoll, und $l_2 = \frac{l-d}{2} = {}^{9}/_{2} = 4{}^{1}/_{2}$ Zoll. 2) Für ein Pendel mit kugelförmiger Linſe AB, Fig. 377, iſt, wenn G das Gewicht und l die Länge CA der Stange oder des Fadens, dagegen K das Gewicht der Kugel und r_1 ihren Halbmeſſer $MA = MB$ bezeichnet:

$$r = \frac{{}^{1}/_{2} Gl^2 + K[(l+r_1)^2 + {}^{2}/_{5} r_1{}^2]}{{}^{1}/_{2} Gl + K(l+r_1)}.$$

Wiegt nun der Draht 0,05 Pf., die Kugel aber 1,5 Pf., iſt ferner die Länge des Drahtes 1 Fuß, und der Halbmeſſer der Kugel 1.15 Zoll, ſo hat man die Entfernung des Schwingungspunktes dieſes Pendels von der Drehungsaxe:

$$r = \frac{{}^{1}/_{2}.0{,}05.12^2 + 1{,}5.(13{,}15^2 + {}^{2}/_{5}.1{,}15^2)}{{}^{1}/_{2}.0{,}05.12 + 1{,}5.13{,}15} = \frac{2{,}4 + 260{,}177}{0{,}3 + 19{,}725} = \frac{262{,}577}{20{,}025}$$

$= 13{,}112$ Zoll. Ohne Rückſicht auf den Draht wäre $r = \frac{260.177}{19{,}725} = 13{,}190$ Zoll; und die träge Maſſe der Kugel, in ihrem Centro angenommen, wäre $r = 13{,}15$ Zoll. Die Schwingungszeit dieſer Kugel iſt:

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} = 0{,}562 \sqrt{\frac{13{,}112}{12}} = 0{,}562 \sqrt{1{,}0926..} = 0{,}5874 \text{ Sec.}$$

§. 268. Der Aufhängepunkt und der Schwingungspunkt eines materiellen Pendels ſind wechſelſeitig (franz. réciproque, engl. reciprocal), d. h. es kann der eine mit dem andern vertauſcht, alſo das Pendel im Schwingungspunkte aufgehangen werden, ohne daß die Schwingungszeit eine andere wird. Der Beweis dieſes Satzes führt ſich mit Hülfe des §. 231 auf folgende Weiſe. Iſt T das Trägheitsmoment des zuſammengeſetzten Pendels AB, Fig. 378, in Hinſicht auf eine Umdrehung um den Schwerpunkt S, ſo hat man daſſelbe für eine Umdrehung um die Axe C, welche um $CS = s$ vom Schwerpunkte S abſteht, $T_1 = T + Ms^2$, und daher den Abſtand des Schwingungspunktes K von der Drehungsaxe C:

Fig. 378.

$$r = \frac{T_1}{Ms} = \frac{T + Ms^2}{Ms} = \frac{T}{Ms} + s.$$

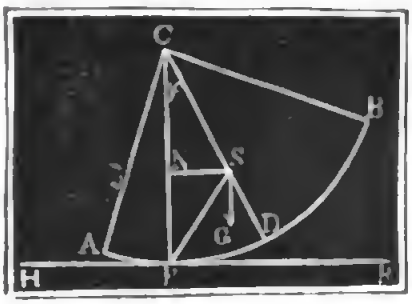
Bezeichnet man nun den Abſtand $KS = r - s$ des Schwingungspunktes K vom Schwerpunkte durch s_1, ſo erhält man die einfache Gleichung $ss_1 = \frac{T}{M}$, in welcher s und s_1 auf gleiche Weiſe vorkommen, und daher auch mit einander vertauſcht werden können. Dieſe Formel gilt alſo nicht allein für den Fall, wenn s den Abſtand des Drehungspunktes, und s_1 den des Schwingungspunktes von dem Schwerpunkte bezeichnet, ſondern auch umgekehrt, wenn s den Abſtand des Schwin-

gungspunktes, und s_1 den des Drehungspunktes vom Schwerpunkte ausdrückt, es wird also C zum Schwingungspunkte, wenn K als Aufhängepunkt dient. Man benutzt diese Eigenschaft bei dem sogenannten, zuerst von Bohnenberger vorgeschlagenen und später von Kater angewendeten Reversionspendel AB, Fig. 379, welches mit zwei schneidigen Axen C und K ausgerüstet ist, die so gegen einander gestellt sind, daß die Schwingungszeiten dieselben bleiben, das Pendel mag um die eine oder um die andere Axe schwingen. Um nicht die Axen gegen einander verstellen zu müssen, werden noch zwei Laufgewichte P und Q angebracht, wovon das kleinere durch eine feine Schraube gestellt werden kann. Hat man durch Verschieben oder Einstellen dieser Laufgewichte es dahin gebracht, daß die Schwingungsdauer dieselbe ist, das Pendel mag in C oder in K aufhängen, so bekommt man in der Entfernung CK beider Schneiden die Länge r des einfachen Pendels, welches mit dem Reversionspendel gleichzeitig schwingt, und man erhält nun die Schwingungsdauer durch die Formel $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$.

Zusammengesetztes Pendel.

Fig. 379.

Fig. 380.



§. 269. Mit dem Schwingen eines Pendels läßt sich auch das Schaukeln oder Wiegen eines Körpers mit walzenförmigem Fuße vergleichen. Dieses Wiegen ist zwar, wie jede andere wälzende Bewegung, aus einer progressiven und einer Drehbewegung zusammengesetzt, allein es läßt sich auch annehmen, daß es aus einer einfachen Drehung mit veränderlicher Drehaxe bestehe. Diese Drehaxe ist aber der Stützpunkt P, womit der schaukelnde Körper ABC, Fig. 380, auf der horizontalen Basis HR aufruhet. Ist der Halbmesser $CD = CP$ der walzenförmigen Basis $ADB = r$, und der Abstand CS des Schwerpunktes des ganzen Körpers vom Mittelpunkte C dieser Basis $= s$, so hat man für die dem Drehungswinkel $SCP = \varphi$ entsprechende Entfernung $SP = y$ des Schwerpunktes vom Drehungspunkte:

Wiegen.

$$y^2 = r^2 + s^2 - 2rs\cos.\varphi = (r-s)^2 + 4rs\left(\sin.\frac{\varphi}{2}\right)^2;$$

bezeichnen wir daher noch das Trägheitsmoment des ganzen Körpers in Hinsicht auf den Schwerpunkt S durch Mk^2, so erhalten wir das Trägheitsmoment in Hinsicht auf den Stützpunkt P:

Wiege.

$$T = M(k^2 + y^2) = M\left[k^2 + (r-s)^2 + 4rs\left(\sin.\frac{\varphi}{2}\right)^2\right],$$

wofür bei kleinen Schwingungswinkeln $= M[k^2 + (r-s)^2 + rs\varphi^2]$ oder gar nur $M[k^2 + (r-s)^2]$ geſetzt werden kann. Da nun das Kraftmoment $= G \,.\, SN = Mg \,.\, CS \sin.\ \varphi = Mgs \sin.\ \varphi$ iſt, ſo folgt die Winkelacceleration für die Drehung um P:

$$\varkappa = \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Trägheitsmoment}} = \frac{Mgs \sin.\ \varphi}{M[k^2 + (r-s)^2]} = \frac{gs \sin.\ \varphi}{k^2 + (r-s)^2}.$$

Beim einfachen Pendel iſt dieſelbe $= \frac{g \sin.\ \varphi}{r_1}$, wenn r_1 deſſen Länge bezeichnet; ſollen daher beide iſochron ſchwingen, ſo muß ſein:

$$\frac{gs \sin.\ \varphi}{k^2 + (r-s)^2} = \frac{g \sin.\ \varphi}{r_1};\ \text{d. i. } r_1 = \frac{k^2 + (r-s)^2}{s}.$$

Die Schwingungszeit der Wiege iſt hiernach:

$$t = \pi\sqrt{\frac{r_1}{g}} = \pi\sqrt{\frac{k^2 + (r-s)^2}{gs}}.$$

Fig. 381.

Dieſe Theorie läßt ſich auch auf ein Pendel AB, Fig. 381, mit abgerundeter Umdrehungsaxe CM anwenden, wenn man ſtatt r den Krümmungshalbmeſſer CM der Axe einführt. Wäre ſtatt der runden Axe eine ſchneidige Axe D angebracht, ſo würde die Schwingungszeit

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{k^2 + \overline{DS}^2}{g \,.\, DS}} = \pi\sqrt{\frac{k^2 + (s-x)^2}{g(s-x)}}$$

betragen, wofern die Entfernung CD der Schneide vom Mittelpunkte der runden Axe durch x bezeichnet wird. Beide Pendel haben nun gleiche Schwingungszeiten, wenn

$$\frac{k^2+(s-x)^2}{s-x} = \frac{k^2+(r-s)^2}{s},\ \text{od.}\ \frac{k^2}{s-x} - x = \frac{k^2+r^2}{s} - 2r$$

iſt. Schreiben wir $\frac{k^2}{s-x} = \frac{k^2}{s} + \frac{k^2 x}{s^2}$ annähernd, und vernachläſſigen wir r^2, ſo erhalten wir $x = \frac{2rs^2}{s^2 - k^2}$.

Anmerkung. Von dem coniſchen Pendel iſt unter dem Artikel »Regulator« im dritten Theile die Rede.

Im Anhang zu dieſem Bande wird von den ſchwingenden Bewegungen ausführlich gehandelt.

Viertes Kapitel.

Die Lehre vom Stoße.

Stoß überhaupt.

§. 270. Vermöge der Undurchdringlichkeit der Materie können zwei Körper gleichzeitig nicht einen und denselben Raum einnehmen. Kommen aber zwei bewegte Körper so mit einander in Berührung, daß einer in den Raum des andern einzudringen sucht, so findet eine Wechselwirkung zwischen beiden statt, welche eine Veränderung in den Bewegungszuständen dieser Körper zur Folge hat. Diese Wechselwirkung ist es, welche man Stoß (franz. choc; engl. impact, collision) nennt.

Die Verhältnisse des Stoßes hängen zunächst von dem Gesetze der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung (§. 62) ab; während des Stoßes drückt der eine Körper genau ebenso stark auf den andern, wie dieser in entgegengesetzter Richtung auf jenen. Die gerade Linie, welche winkelrecht auf den Flächen steht, in welchen sich beide Körper berühren, und durch den Berührungspunkt selbst geht, ist die Richtung der Stoßkraft. Befinden sich die Schwerpunkte beider Körper in dieser Linie, so heißt der Stoß ein centrischer oder Centralstoß, außerdem aber ein excentrischer Stoß. Die Körper A und B in Fig. 382 geben einen centrischen Stoß, weil ihre Schwerpunkte S_1 und S_2 in der Normale $N\bar{N}$ zur Berührungsebene DE liegen; von den Körpern A und B in Fig. 383 stößt A centrisch und B excentrisch, weil S_1 in, und S_2 außerhalb der Normallinie $N\bar{N}$ befindlich ist.

Fig. 382.

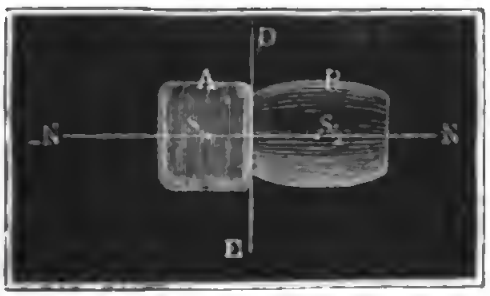
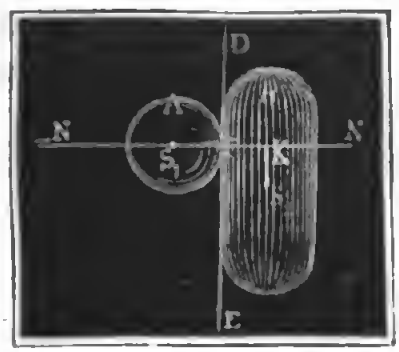


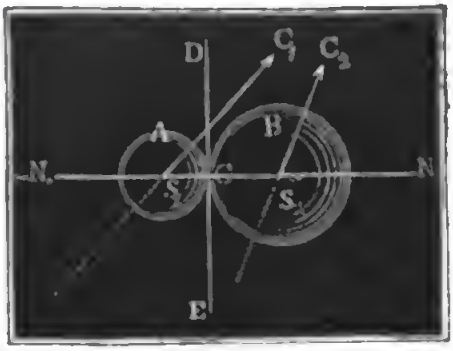
Fig. 383.



In Hinsicht auf die Bewegungsrichtung unterscheidet man den geraden Stoß (franz. choc direct; engl. direct impact) und den schiefen Stoß (franz. choc oblique; engl. oblique impact) von einander. Beim geraden Stoße fällt die Bewegungsrichtung in die

Stoß überhaupt.

Fig. 384.



Stoßlinie, beim ſchiefen Stoße findet aber eine Abweichung zwiſchen beiden Richtungen ſtatt. Bewegen ſich z. B. die Körper A und B Fig. 384 in Richtungen S_1C_1 und S_2C_2, welche von der Normalen oder Stoßlinie $N\overline{N}$ abweichen, ſo findet ein ſchiefer Stoß ſtatt, während derſelbe ein gerader wäre, wenn dieſe Bewegungsrichtungen mit $N\overline{N}$ zuſammenfielen.

Außerdem unterſcheidet man noch den Stoß freier Körper und den Stoß ganz oder theilweiſe unterſtützter Körper von einander.

§. 271. Die Zeit während der Mittheilung oder Veränderung der Bewegung durch den Anſtoß iſt zwar ſehr klein, aber keineswegs unendlich klein; ſie hängt, ſowie die Stoßkraft ſelbſt, von Maſſe, Geſchwindigkeit und Elaſticität der zum Stoße gelangenden Körper ab. Man kann dieſe Zeit aus zwei Perioden beſtehend annehmen. In der erſten Periode drücken die Körper einander zuſammen und in der zweiten dehnen ſich dieſelben ganz oder zum Theil wieder aus. Durch das Zuſammendrücken wird die Elaſticität in Wirkſamkeit geſetzt, welche ſich mit der Trägheit in's Gleichgewicht ſetzt und eben dadurch den Bewegungszuſtand der zuſammenſtoßenden Körper verändert. Wird bei dem Zuſammendrücken die Elaſticitätsgrenze nicht überſchritten, ſo geht der Körper am Ende des Stoßes in ſeine vorige Geſtalt vollkommen zurück, und dann nennen wir den Körper einen vollkommen elaſtiſchen; nimmt aber der Körper am Ende des Stoßes ſeine vorige Form nicht vollſtändig wieder an, ſo nennen wir den Körper unvollkommen elaſtiſch, und behält endlich der Körper die durch das Maximum des Zuſammendrückens erhaltene Form, beſitzt er alſo gar kein Beſtreben zum Ausdehnen, ſo nennen wir den Körper einen unelaſtiſchen. Jedenfalls iſt aber dieſe Eintheilung nur in Beziehung auf eine gewiſſe Stärke des Stoßes als richtig anzunehmen; denn es iſt möglich, daß ein und derſelbe Körper bei einem ſchwachen Stoße ſich noch elaſtiſch und bei einem ſtarken Stoße unelaſtiſch zeigt. Streng genommen giebt es aber weder einen vollkommen elaſtiſchen, noch einen vollkommen unelaſtiſchen Körper; doch nennen wir in der Folge ſolche Körper elaſtiſche, welche ihre Geſtalt nach dem Stoße ziemlich wieder herſtellen, und diejenigen unelaſtiſche, welche durch den Stoß bedeutende bleibende Formveränderungen erleiden (vergl. §. 183)

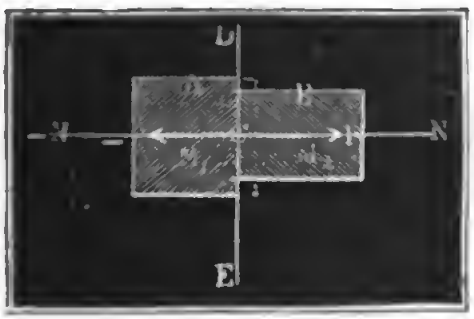
In der praktiſchen Mechanik werden die zum Stoße gelangenden Körper, wie z. B. Holz, Eiſen u. ſ. w., in der Regel als unelaſtiſche angeſehen, weil dieſelben an und für ſich eine kleine Elaſticität beſitzen und

durch Wiederholung der Stöße auch noch an Elasticität verlieren. Uebrigens ist es eine wichtige Regel, Stöße bei Maschinen und Bauwerken so viel wie möglich zu vermeiden, oder zu mäßigen oder in elastische zu verwandeln, weil durch dieselben Erschütterungen und große Abnutzungen herbeigeführt werden und weil dieselben einen Theil der Leistung der Maschinen consumiren.

§. 272. Entwickeln wir zunächst die Gesetze des geraden Centralstoßes frei beweglicher Körper. Denken wir uns die Stoßzeit aus lauter gleichen Theilen τ bestehend und nehmen wir an, daß die Stoßkraft während des ersten Zeittheilchens P_1, während des zweiten P_2, während des dritten P_3 sei u. s. w. Ist nun die Masse des einen Körpers A (Fig. 385) $= M_1$, so hat man die entsprechenden Acceleration: $p_1 = \frac{P_1}{M_1}$, $p_2 = \frac{P_2}{M_1}$, $p_3 = \frac{P_3}{M_1}$ u. s. w. Nach §. 19 ist aber die einer Acceleration p und einem Zeittheilchen τ entsprechende Geschwindigkeitsveränderung: $x = p\tau$; es sind daher für den vorliegenden Fall die elementaren Geschwindigkeitszu- oder abnahmen: $x_1 = \frac{P_1\tau}{M_1}$, $x_2 = \frac{P_2\tau}{M_1}$, $x_3 = \frac{P_3\tau}{M_1}$ u. s. w., und es ist die in einer gewissen endlichen Zeit erfolgte Geschwindigkeitszu- oder abnahme der Masse M_1: $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots = (P_1 + P_2 + P_3) + \ldots) \frac{\tau}{M_1}$, sowie die entsprechende Geschwindigkeitsveränderung der Masse B von der Größe M_2: $= (P_1 + P_2 + P_3 + \ldots) \frac{\tau}{M_2}$.

Unelastischer Stoß.

Fig. 385.



Bei dem folgenden oder stoßenden Körper A wirkt die Stoßkraft der Geschwindigkeit c_1 entgegen, es findet folglich hier eine Geschwindigkeitsabnahme statt, und es ist die nach einer gewissen Zeit noch übrig bleibende Geschwindigkeit dieses Körpers: $v_1 = c_1 - (P_1 + P_2 + \ldots) \frac{\tau}{M_1}$; bei dem vorangehenden oder gestoßenen Körper B hingegen wirkt die Stoßkraft in der Bewegungsrichtung, es erhält daher die Geschwindigkeit c_2 einen Zuwachs und es geht dieselbe in

$$v_2 = c_2 + (P_1 + P_2 + \ldots) \frac{\tau}{M_2}$$ über.

Unelaſtiſcher Stoß.

Eliminiren wir aus beiden Gleichungen $(P_1 + P_2 + \ldots)\, v$, ſo bleibt uns die allgemeine Formel:

I. $M_1 (c_1 - v_1) = M_2 (v_2 - c_2)$, oder $M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2$.

Man bezeichnet wohl das Product aus Maſſe und Geſchwindigkeit eines Körpers durch den Namen Bewegungsmoment (franz. quantité de mouvement; engl. momentum of body) und kann hiernach behaupten: für jeden Augenblick der Stoßzeit iſt die Summe der Bewegungsmomente $(M_1 v_1 + M_2 v_2)$ beider Körper ebenſo groß wie vor dem Stoße.

Im Augenblicke des größten Zuſammendrückens haben beide Körper einerlei Geſchwindigkeit v, ſetzen wir daher dieſen Werth ſtatt v_1 und v_2 in die gefundene Gleichung, ſo bleibt $M_1 v + M_2 v = M_1 c_1 + M_2 c_2$, und es ergiebt ſich die Geſchwindigkeit beider Körper im Augenblicke der ſtärkſten Zuſammendrückung: $v = \dfrac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}$.

Sind die Körper A und B unelaſtiſch, beſitzen ſie alſo nach dem Zuſammendrücken kein Beſtreben zum Sichwiederausdehnen, ſo hört alle Mittheilung oder Veränderung der Bewegung auf, wenn beide Körper bis auf's Maximum zuſammengedrückt ſind, und es gehen daher auch beide nach dem Stoße mit der gemeinſchaftlichen Geſchwindigkeit

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} \text{ fort.}$$

Beiſpiele. 1) Bewegt ſich ein unelaſtiſcher Körper B von 30 Pfd Gewicht mit 3 Fuß Geſchwindigkeit, und trifft ihn ein anderer unelaſtiſcher Körper A von 50 Pfd. mit 7 Fuß Geſchwindigkeit, ſo gehen beide nach dem Zuſammentreffen mit der Geſchwindigkeit $v = \dfrac{50.7 + 30.3}{50 + 30} = \dfrac{350 + 90}{80} = \dfrac{44}{8} = \dfrac{11}{2}$ $= 5\frac{1}{2}$ Fuß fort. 2) Um einen Körper von 120 Pfd. Gewicht aus einer Geſchwindigkeit $c_2 = 1\frac{1}{2}$ Fuß in eine Geſchwindigkeit v von 2 Fuß zu verſetzen, läßt man ihn von einem 50 Pfd. ſchweren Körper ſtoßen, welche Geſchwindigkeit muß dieſer haben? Hier iſt

$$c_1 = v + \frac{(v - c_2)\, M_2}{M_1} = 2 + \frac{(2 - 1{,}5).120}{50} = 2 + \frac{6}{5} = 3{,}2 \text{ Fuß.}$$

Elaſtiſcher Stoß.

§. 273. Sind die zum Stoße gelangenden Körper vollkommen elaſtiſch, ſo dehnen ſie ſich, nachdem ſie ſich in der erſten Periode zuſammengedrückt haben, in der zweiten Periode der Stoßzeit allmälig wieder aus; und wenn ſie am Ende die erſte Geſtalt wieder angenommen haben, ſo ſetzen ſie ihre Bewegungen mit verſchiedenen Geſchwindigkeiten fort. Da aber die mechaniſche Arbeit, welche aufzuwenden iſt, um einen elaſtiſchen Körper zuſammenzudrücken, gleich iſt der Arbeit, welche derſelbe bei ſeiner Ausdehnung wieder ausgiebt, ſo findet beim Stoße zwiſchen elaſtiſchen Körpern ein Verluſt an lebendiger Kraft nicht ſtatt, und es gilt daher auch für denſelben noch folgende zweite Gleichung:

II. $M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2$, oder $M_1 (c_1^2 - v_1^2) = M_2 (v_2^2 - c_2^2)$. Elastischer Stoß.

Aus den Gleichungen I. und II. lassen sich nun die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der Körper nach dem Stoße finden. Zuerst folgt durch Division $\frac{c_1^2 - v_1^2}{c_1 - v_1} = \frac{v_2^2 - c_2^2}{v_2 - c_2}$, d. i. $c_1 + v_1 = v_2 + c_2$ oder $v_2 - v_1 = c_1 - c_2$; setzt man nun den sich hieraus ergebenden Werth $v_2 = c_1 + v_1 - c_2$ in die Gleichung I., so folgt

$$M_1 v_1 + M_2 v_1 + M_2 (c_1 - c_2) = M_1 c_1 + M_2 c_2, \text{ oder}$$

$(M_1 + M_2) v_1 = (M_1 + M_2) c_1 - 2 M_2 (c_1 - c_2)$, wodurch sich nun herausstellt: $v_1 = c_1 - \frac{2 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$ und

$$v_2 = c_1 - c_2 + c_1 - \frac{2 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} = c_2 + \frac{2 M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}.$$

Während bei unelastischen Körpern der Verlust an Geschwindigkeit des einen Körpers

$$c_1 - v = c_1 - \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} \text{ ist,}$$

fällt hiernach bei elastischen Körpern derselbe doppelt so groß, nämlich $c_1 - v_1 = \frac{2 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$ aus, und während bei den unelastischen Körpern der Gewinn an Geschwindigkeit des andern Körpers

$$v - c_2 = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} - c_2 = \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

beträgt, stellt sich bei elastischen Körpern derselbe:

$$v_2 - c_2 = \frac{2 M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}, \text{ ebenfalls doppelt so groß heraus.}$$

Beispiel. Zwei vollkommen elastische Kugeln, die eine von 10 Pfd., die andere von 16 Pfd. Gewicht, stoßen mit den Geschwindigkeiten 12 Fuß und 6 Fuß gegen einander, welches sind ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoße? Es ist hier $M_1 = 10$ und $c_1 = 12$ Fuß, M_2 aber $= 16$ und $c_2 = -6$ Fuß zu setzen, daher ergiebt sich der Geschwindigkeitsverlust des ersten Körpers $c_1 - v_1 = \frac{2 \cdot 16 (12 + 6)}{10 + 16} = \frac{2 \cdot 16 \cdot 18}{26} = 22{,}154$ Fuß, und der Geschwindigkeitsgewinn des andern: $v_2 - c_2 = \frac{2 \cdot 10 \cdot 18}{26} = 13{,}846$ Fuß; es prallt hiernach der erste Körper nach dem Stoße mit $v_1 = 12 - 22{,}154 = -10{,}154$ Fuß, und der andere Körper mit $-6 + 13{,}846 = 7.846$ Fß. Geschwindigkeit zurück. Uebrigens ist das Maaß der lebendigen Kraft beider Körper nach dem Stoße $= M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = 10 \cdot 10{,}154^2 + 16 \cdot 7{,}846^2 = 1031 + 985 = 2016$ ebenso groß wie vor dem Stoße, nämlich $M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 = 10 \cdot 12^2 + 16 \cdot 6^2 = 1440 + 576 = 2016$. Wären diese Körper unelastisch, so würde der erste nur $\frac{c_1 - v_1}{2} = 11{,}077$ Fuß an

Geschwindigkeit verlieren und der andere $\frac{v_2 - c_2}{2} = 6{,}923$ Fuß gewinnen, es würde also der erste Körper nach dem Stoße noch die Geschwindigkeit $12 - 11{,}077 = 0{,}923$ Fuß behalten, und der zweite die Geschwindigkeit $-6 + 6{,}923 = 0{,}923$ annehmen, übrigens aber der Arbeitsverlust $[2016 - (10+16)\,0{,}923^2] : 2g = (2016 - 22{,}2) \cdot 0{,}016 = 31.9$ Fßpf. entstehen.

Besondere Fälle.

§. 274. Die in den vorstehenden Paragraphen entwickelten Formeln für die Endgeschwindigkeiten des Stoßes gelten natürlich auch dann noch, wenn der eine Körper in Ruhe ist, oder wenn sich beide Körper einander entgegen bewegen, oder wenn eine Masse unendlich groß ist in Hinsicht auf die andere u. s. w. Ist die Masse M_2 in Ruhe, so hat man $c_2 = 0$, daher für unelastische Körper $v = \frac{M_1 c_1}{M_1 + M_2}$ und für elastische:

$$v_1 = c_1 - \frac{2 M_2 c_1}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} c_1, \text{ und}$$

$$v_2 = 0 + \frac{2 M_1 c_1}{M_1 + M_2} = \frac{2 M_1}{M_1 + M_2} c_1.$$

Laufen die Körper einander entgegen, ist also c_2 negativ, so folgt für unelastische Körper $v = \frac{M_1 c_1 - M_2 c_2}{M_1 + M_2}$ und für elastische

$$v_1 = c_1 - \frac{2 M_2 (c_1 + c_2)}{M_1 + M_2} \text{ und } v_2 = -c_2 + \frac{2 M_1 (c_1 + c_2)}{M_1 + M_2}.$$

Sind in diesem Falle die Bewegungsmomente einander gleich, ist also $M_1 c_1 = M_2 c_2$, so ist beim unelastischen Stoße $v = 0$, d. h. die Körper versetzen einander in Ruhe, bei elastischen Körpern ist aber

$$v_1 = c_1 - \frac{2 (M_2 c_1 + M_1 c_1)}{M_1 + M_2} = c_1 - 2 c_1 = -c_1, \text{ und}$$

$$v_2 = -c_2 + \frac{2 (M_2 c_2 + M_1 c_2)}{M_1 + M_2} = -c_2 + 2 c_2 = +c_2; \text{ dann}$$

kehren also die Körper nach dem Stoße mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten zurück. Sind hingegen die Massen einander gleich, so hat man für unelastische Körper $v = \frac{c_1 - c_2}{2}$, dagegen für elastische $v_1 = -c_2$, und $v_2 = c_1$, d. h. dann gehen die Massen mit verwechselten Geschwindigkeiten zurück.

Laufen die Massen wieder in gleicher Richtung und ist die vorausgehende Masse M_2 unendlich groß, so hat man für unelastische Körper $v = \frac{M_2 c_2}{M_2} = c_2$, und für elastische: $v_1 = c_1 - 2(c_1 - c_2) = 2 c_2 - c_1$, $v_2 = c_2 + 0 = c_2$; es wird also die Geschwindigkeit der unendlich großen Masse durch den Anstoß der endlichen Masse nicht abgeändert. Ist nun noch die unendlich große Masse in Ruhe, also $c_2 = 0$, so hat

man für unelastische Körper $v = 0$ und für elastische $v_1 = -c_1$, $v_2 = 0$; dann bleibt also auch die unendlich große Masse in Ruhe, es verliert aber im ersten Falle der anstoßende Körper seine Geschwindigkeit vollständig, und es wird dieselbe im zweiten Falle in die entgegengesetzte verwandelt. Besondere Fälle.

Beispiele. 1) Mit welcher Geschwindigkeit ist ein Körper von 8 Pf. an einen ruhenden Körper von 25 Pf. anzustoßen, damit der letztere eine Geschwindigkeit von 2 Fuß annimmt? Wären die Körper unelastisch, so hätte man zu setzen: $v = \frac{M_1 c_1}{M_1 + M_2}$, d. i. $2 = \frac{8 \cdot c_1}{8+25}$, daher $c_1 = {}^{33}/_{4} = 8{}^{1}/_{4}$ Fuß die gesuchte Geschwindigkeit; wären sie aber elastisch, so hätte man $v_2 = \frac{2 M_1 c_1}{M_1 + M_2}$, daher $c_1 = {}^{33}/_{8} = 4{}^{1}/_{8}$ Fuß.

Fig. 386.

2) Trifft eine Kugel M_1 (Fig. 386) die ruhende Masse $M_2 = nM_1$ mit der Geschwindigkeit c_1, die zweite Masse eine dritte Masse $M_3 = nM_2 = n^2 M_1$ mit der durch den Stoß erlangten Geschwindigkeit, diese wieder eine Masse $M_4 = nM_3 = n^3 M_1$ u. s. w., so hat man bei vollkommener Elasticität dieser Massen die Geschwindigkeiten

$$v_2 = \frac{2M_1}{M_1 + nM_1} c_1 = \frac{2}{1+n} \cdot c_1, \quad v_3 = \frac{2M_2}{M_2 + nM_2} v_2 = \frac{2}{1+n} \cdot v_2 = \left(\frac{2}{1+n}\right)^2 c_1,$$

$v_4 = \left(\frac{2}{1+n}\right)^3 c_1$ u. s. w. Ist z. B. das Gewicht einer jeden Masse nur halb so groß, als das der nächst vorhergehenden, hat man also den Exponenten der von den Massen gebildeten geometrischen Reihe: $n = {}^{1}/_{2}$, so folgt $v_2 = {}^{4}/_{3}\, c_1$, $v_3 = ({}^{4}/_{3})^2\, c_1$, $v_4 = ({}^{4}/_{3})^3\, c_1 \ldots$, $v_{12} = ({}^{4}/_{3})^{12}\, c_1 = 13{,}32 \cdot c_1$.

§. 275. Beim Zusammenstoßen unelastischer Massen findet stets ein Verlust an lebendiger Kraft statt, weshalb die Massen nach dem Stoße nicht so viel Arbeit zu verrichten vermögen, als vor dem Stoße. Vor dem Stoße enthalten die mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 fortgehenden Massen M_1 und M_2 die lebendige Kraft $M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2$, nach dem Stoße haben aber die mit der Geschwindigkeit $v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}$ fortgehenden Massen die lebendige Kraft $M_1 v^2 + M_2 v^2$; es giebt daher die Subtraction dieser Kräfte den Verlust an lebendiger Kraft durch den Anstoß: Arbeitsverlust.

$$K = M_1 (c_1^2 - v^2) + M_2 (c_2^2 - v^2) = M_1 (c_1 + v)(c_1 - v)$$

$$- M_2 (c_2 + v)(v - c_2), \text{ aber } M_1 (c_1 - v) = M_2 (v - c_2) = \frac{M_1 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2},$$

daher folgt

$$K = (c_1 + v - c_2 - v) \frac{M_1 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} = \frac{(c_1 - c_2)^2 M_1 M_2}{M_1 + M_2} = \frac{(c_1 - c_2)^2}{\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}}.$$

Arbeitsverluſt. Sind die Gewichte der Maſſen G_1 und G_2, iſt alſo $M_1 = \frac{G_1}{g}$ und $M_2 = \frac{G_2}{g}$, ſo hat man hiernach den Verluſt an mechaniſcher Arbeit oder Leiſtung: $L = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$.

Man nennt $\frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$ das harmoniſche Mittel aus G_1 und G_2, und kann hiernach behaupten: der Verluſt an Leiſtung, welcher durch den Stoß zweier unelaſtiſchen Maſſen herbeigeführt und auf die Formveränderung dieſer verwendet wird, iſt gleich dem Producte aus dem harmoniſchen Mittel beider Maſſen und aus der Fallhöhe, welche der Differenz der Geſchwindigkeiten dieſer Maſſen entſpricht.

Iſt eine der Maſſen, z. B. M_2, in Ruhe, ſo hat man dieſen Arbeitsverluſt $L = \frac{c_1^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$, und iſt die bewegte Maſſe M_1 ſehr groß gegen die ruhende, ſo verſchwindet G_2 gegen G_1 und es bleibt $L = \frac{c_1^2}{2g} \cdot G_2$.

Uebrigens läßt ſich auch ſetzen:

$$K = M_1(c_1^2 - v^2) + M_2(c_2^2 - v^2) = M_1(c_1^2 - 2c_1 v + v^2 + 2c_1 v - 2v^2) + M_2(c_2^2 - 2c_2 v + v^2 + 2c_2 v - 2v_2^2)$$
$$= M_1(c_1 - v)^2 + 2M_1 v(c_1 - v) + M_2(c_2 - v)^2 + 2M_2 v(c_2 - v)$$
$$= M_1(c_1 - v)^2 + M_2(c_2 - v)^2, \text{ weil } M_1(c_1 - v) = M_2(v - c_2) \text{ iſt.}$$

Hiernach iſt alſo die durch die unelaſtiſchen Stöße verlorne lebendige Kraft gleich der Summe von den Producten aus den Maſſen und den Quadraten ihrer Geſchwindigkeitsverluſte oder -gewinnſte.

Beiſpiele. 1) Wenn bei einer Maſchine in jeder Minute 16 Stöße zwiſchen den unelaſtiſchen Maſſen $M_1 = \frac{1000}{g}$ Pf. und $M_2 = \frac{1200}{g}$ Pf. mit den Geſchwindigkeiten $c_1 = 5$ Fuß und $c_2 = 2$ Fuß erfolgen, ſo iſt ihr Verluſt an Leiſtung in Folge dieſer Stöße:

$$L = {}^{16}/_{60} \cdot \frac{(5-2)^2}{2g} \cdot \frac{1000 \cdot 1200}{2200} = {}^{4}/_{15} \cdot 9 \cdot 0{,}016 \cdot {}^{6000}/_{11} = 0{,}576 \cdot {}^{400}/_{11} = 20{,}94$$

Fßpf. p. Sec. 2) Wenn auf einer Eiſenbahn zwei Wagenzüge von 120000 Pf. und 160000 Pf. Gewicht mit den Geſchwindigkeiten $c_1 = 20$ und $c_2 = 15$ Fß. gegen einander ſtoßen, ſo entſteht ein auf die Zerſtörung der Locomotiven und Wagen verwendeter Arbeitsverluſt, welcher bei vollſtändigem Mangel an Elaſticität der zum Stoße gelangenden Theile

$$= \frac{(20+15)^2}{2g} \cdot \frac{120000 \cdot 160000}{280000} = 35^2 \cdot 0{,}016 \cdot \frac{1920000}{28} = 1344000 \text{ Fßpf.}$$

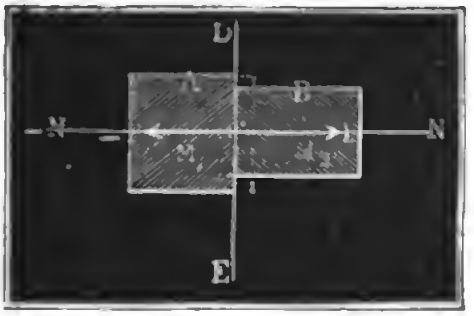
beträgt.

Härte. §. 276. Kennt man die Elaſticitätsmodul der zum Stoße gelangenden

Körper, so kann man auch die Kraft des Zusammendrückens und die Größe desselben finden. Es seien von den Körpern A u. B, Fig. 387, die Querschnitte F_1 und F_2, die Längen l_1 und l_2 und die Elasticitätsmodul E_1 und E_2. Stoßen beide mit einer Kraft P gegen einander, so sind die bewirkten Zusammendrückungen, nach §. 185:

Härte.

Fig 387



$$\lambda_1 = \frac{Pl_1}{F_1E_1} \text{ und } \lambda_2 = \frac{Pl_2}{F_2E_2},$$

und das Verhältniß derselben ist $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{F_2E_2}{F_1E_1} \cdot \frac{l_1}{l_2}$.

Bezeichnen wir nun der Einfachheit wegen $\frac{FE}{l}$ durch H, so erhalten wir $\lambda_1 = \frac{P}{H_1}$ und $\lambda_2 = \frac{P}{H_2}$, sowie $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{H_2}{H_1}$. Nennen wir nach dem Beispiele Whewell's (S. The Mechanics of Enginneering §. 207) die Größe $\frac{FE}{l}$ die Härte (franz. dureté, raideur; engl. hardness) eines Körpers, so folgt, daß die Tiefen der Zusammendrückungen den Härten umgekehrt proportional sind.

Stößt eine Masse $M = \frac{G}{g}$ mit der Geschwindigkeit c auf eine unbewegliche oder unendlich große Masse, so verwendet sie ihre ganze lebendige Kraft auf das Zusammendrücken, es ist daher (nach §. 186):

$$\tfrac{1}{2} Ps = \frac{Mc^2}{2} = \frac{c^2}{2g} G.$$

Nun ist aber der Weg s gleich der Summe von den Zusammendrückungen λ_1 und λ_2, und $\lambda_1 = \frac{P}{H_1}$, sowie $\lambda_2 = \frac{P}{H_2}$; es folgt daher

$$s = \lambda_1 + \lambda_2 = P\left(\frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2}\right) = \frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2} \cdot P,$$ sowie umgekehrt

$$P = \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} s, \text{ und die Bestimmungsgleichung } \tfrac{1}{2} \cdot \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \cdot s^2 = \frac{c^2}{2g} G, \text{ also } s = c\sqrt{\frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2} \cdot \frac{G}{g}},$$

woraus sich nun P, λ_1 u. λ_2 berechnen lassen.

Beispiel. Schlägt man einen schmiedeeisernen Hammer von 4 Quadratzoll Basis und 6 Zoll Höhe mit einer Geschwindigkeit von 50 Fuß auf eine Bleiplatte von 2 Quadratzoll Basis und 1 Zoll Dicke, so stellen sich folgende Verhältnisse

Härte heraus. Der Elaſticitätsmodul des Schmiedeeiſens iſt $E_1 = 29000000$ und der des Bleies $E_2 = 700000$, daher ſind die Härten dieſer Körper: $H_1 = \frac{F_1 E_1}{l_1} = \frac{4 \cdot 29000000}{6} = 19333333$ und $H_2 = \frac{F_2 E_2}{l_2} = \frac{2 \cdot 700000}{1} = 1400000$.

Setzt man dieſe Werthe in die Formel $s = c \sqrt{\frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2} \cdot \frac{G}{g}}$, und führt man das Gewicht des Hammers $= 4 \cdot 6 \cdot 0{,}29 = 7$ Pf., alſo $\frac{G}{g} = 7 \cdot 0{,}032 = 0{,}224$ ein, ſo erhält man den Weg des Hammers beim Zuſammendrücken:

$s = 50 \sqrt{\frac{20733333 \cdot 0{,}224}{19333333 \cdot 1400000}} = 50 \sqrt{\frac{0{,}46443}{2706666}} = 0{,}0207$ Zoll $= 0{,}249$ Linien. Hieraus folgt die Stoßkraft

$P = \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \cdot s = \frac{19333333 \cdot 1400000}{20733333} \cdot 0{,}0207 = 27037$ Pf.; ferner die Zuſammendrückung des Hammers: $\lambda_1 = \frac{P}{H_1} = \frac{27037}{19333333} = 0{,}0014$ Zoll $= 0{,}016$ Linien, und die der Bleiplatte: $\lambda_2 = \frac{P}{H_2} = \frac{27037}{1400000} = 0{,}0193$ Zoll $= 0{,}233$ Linien.

Elaſtiſch-unelaſtiſcher Stoß. §. 277. Bewegen ſich zwei Maſſen M_1 und M_2 mit den Geſchwindigkeiten c_1 und c_2 hinter einander her, ſo iſt im Augenblicke der größten Zuſammendrückung die gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit beider nach §. 272 $v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}$, und die auf die Zuſammendrückung verwendete Arbeit nach §. 275:

$$L = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}.$$

Nun läßt ſich dieſe Arbeit auch

$$= \tfrac{1}{2} Ps = \tfrac{1}{2} P (\lambda_1 + \lambda_2) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} s^2$$

ſetzen, es ergiebt ſich folglich die Summe der Zuſammendrückungen beider Maſſen: $s = (c_1 - c_2) \sqrt{\frac{G_1 G_2}{g(G_1 + G_2)} \cdot \frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2}}$, woraus ſich nun die zuſammendrückende Kraft P und die Zuſammendrückungen der einzelnen Maſſen, nämlich λ_1 und λ_2, finden laſſen.

Sind die Maſſen unelaſtiſch, ſo bleiben dieſe Zuſammendrückungen auch nach dem Stoße, iſt aber nur eine von beiden Maſſen unelaſtiſch, ſo dehnt ſich die andere Maſſe in einer zweiten Periode wieder aus, und es erzeugt die daraus erwachſende Arbeit eine neue Geſchwindigkeitsveränderung. Iſt z. B. die Maſſe $M_1 = \frac{G_1}{g}$ elaſtiſch, ſo wird in dieſer zweiten Periode

des Stoßes die Arbeit $\frac{1}{2} P\lambda_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P^2}{H_1} = \frac{1}{2H_1}\left(\frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2}\right)^2 s^2$ Elastisch-unelastischer Stoß.

$= \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2}$ frei; man hat daher in diesem Falle für die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 nach dem Stoße die Formeln:

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2 \text{ und}$$

$$M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 v^2 + M_2 v^2 + (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2}$$

$$= M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 - (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} + (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2},$$

d. i. $M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 - (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1}{H_1 + H_2}$.

Setzt man den Geschwindigkeitsverlust $c_1 - v_1 = x$, so hat man den Geschwindigkeitsgewinn $v_2 - c_2 = \frac{M_1 x}{M_2}$, und es nimmt die letzte Gleichung die Form

$$x(2c_1 - x) - x\left(2c_2 + \frac{M_1 x}{M_2}\right) - (c_1 - c_2)^2 \frac{M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1}{H_1 + H_2} = 0,$$

oder

$$\frac{M_1 + M_2}{M_2} x^2 - 2(c_1 - c_2)x + (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1}{H_1 + H_2} = 0 \text{ an.}$$

Multiplicirt man dieselbe durch $\frac{M_2}{M_1 + M_2}$ und setzt man $\frac{H_1}{H_1 + H_2}$ $= 1 - \frac{H_2}{H_1 + H_2}$, so erhält man die quadratische Gleichung:

$$x^2 - 2(c_1 - c_2)\frac{M_2}{M_1 + M_2} x + (c_1 - c_2)^2 \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2$$
$$= (c_1 - c_2)^2 \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2 \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2}, \text{ oder}$$

$$\left(x - (c_1 - c_2)\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2 = (c_1 - c_2)^2 \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2 \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2},$$

deren Auflösung giebt x, oder den Geschwindigkeitsverlust des ersten Körpers:

$$c_1 - v_1 = (c_1 - c_2)\frac{M_2}{M_1 + M_2}\left(1 + \sqrt{\frac{H_2}{H_1 + H_2}}\right),$$

und den Geschwindigkeitsgewinn des andern Körpers:

$$v_2 - c_2 = (c_1 - c_2)\frac{M_1}{M_1 + M_2}\left(1 + \sqrt{\frac{H_2}{H_1 + H_2}}\right).$$

Beispiel. Wenn man annimmt, daß in dem Beispiele des vorigen Paragraphen der eiserne Hammer vollkommen elastisch und die Bleiplatte ganz unelastisch ist, so erhält man den Geschwindigkeitsverlust des mit 50 Fuß Geschwindig-

keit auffallenden 7 Pfd. ſchweren Hammers, da $c_2 = 0$ und $M_2 = \infty$ zu ſetzen iſt:

$$c_1 - v_1 = c_1 \left(1 + \sqrt{\frac{H_2}{H_1 + H_2}}\right) = 50 \left(1 + \sqrt{\frac{1400000}{20733333}}\right)$$
$$= 50\,(1 + 0{,}26) = 63 \text{ Fuß},$$

daher die Geſchwindigkeit des Hammers nach dem Stoße: $v_1 = c_1 - 63 = 50 - 63 = -13$ Fuß. Die Geſchwindigkeit der unterſtützten Bleiplatte bleibt Null.

Unvollkommen elaſtiſcher Stoß.

§. 278. Sind die an einander anſtoßenden Körper unvollkommen elaſtiſch, ſo dehnen ſich dieſelben in der zweiten Periode der Stoßzeit nur zum Theil wieder aus, es wird alſo auch die beim Comprimiren in der erſten Periode verbrauchte lebendige Kraft in der zweiten Periode nicht vollſtändig wieder ausgegeben. Sind wieder λ_1 und λ_2 die Tiefen der Eindrücke, und iſt P die Stoßkraft, ſo hat man die Arbeitsverluſte beim Comprimiren $= \frac{1}{2} P\lambda_1$ und $\frac{1}{2} P\lambda_2$, und wird nun beim Ausdehnen hiervon das μfache, oder allgemeiner, beim Ausdehnen des einen Körpers das μ_1- und beim Ausdehnen des zweiten das $\mu_2$fache zurückgegeben, ſo bleibt der geſammte Arbeitsverluſt nach dem Stoße:

$L = \frac{1}{2} P[(1-\mu_1)\lambda_1 + (1-\mu_2)\lambda_2]$, oder $\lambda_1 = \frac{P}{H_1}$ und $\lambda_2 = \frac{P}{H_2}$ geſetzt,

$L = \frac{1}{2} P^2 \left[\frac{1-\mu_1}{H_1} + \frac{1-\mu_2}{H_2}\right]$. Nach dem vorigen Paragraphen iſt aber $P = \frac{H_1 H_2 s}{H_1 + H_2}$ und $s = (c_1 - c_2)\sqrt{\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2}}$, daher ergiebt ſich dann der in Frage geſtellte Arbeitsverluſt

$$L = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \left(\frac{1-\mu_1}{H_1} + \frac{1-\mu_2}{H_2}\right).$$

Um nun die Geſchwindigkeiten v_1 und v_2 nach dem Stoße zu finden, haben wir die Gleichungen $M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2$ und

$$M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2$$
$$- (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{(1-\mu_1) H_2 + (1-\mu_2) H_1}{H_1 + H_2}$$

mit einander zu verbinden und aufzulöſen. Ganz auf dieſelbe Weiſe wie im vorigen Paragraphen ergiebt ſich der Geſchwindigkeitsverluſt des erſten Körpers:

$$c_1 - v_1 = (c_1 - c_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2} \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_2 H_1 + \mu_1 H_2}{H_1 + H_2}}\right),$$

und der Geſchwindigkeitsgewinn des vorangehenden Körpers:

$$v_2 - c_2 = (c_1 - c_2) \frac{M_1}{M_1 + M_2} \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_2 H_1 + \mu_1 H_2}{H_1 + H_2}}\right)$$

Dieſe beiden allgemeinen Formeln enthalten auch die Geſetze des vollkommen elaſtiſchen und des unelaſtiſchen Stoßes. Setzt man in ihnen

$\mu_1 = \mu_2 = 1$, so erhält man die schon oben gefundenen Formeln für den Stoß zwischen vollkommen elastischen Körpern, nimmt man aber $\mu_1 = \mu_2 = 0$, so erhält man die Formeln des unelastischen Stoßes u. s. w. Sind beide Körper von gleichem Grade der Elasticität, ist also $\mu_1 = \mu_2$, so hat man einfacher $c_1 - v_1 = (c_1 - c_2)\,\frac{M_2}{M_1 + M_2}\,(1 + \sqrt{\mu})$ und

Unvollkommen elastischer Stoß.

$$v_2 - c_2 = (c_1 - c_2)\,\frac{M_1}{M_1 + M_2}\,(1 + \sqrt{\mu}).$$

Ist noch die Masse M_2 in Ruhe und unendlich groß, so folgt $c_1 - v_1 = c_1\,(1 + \sqrt{\mu})$, d. i. $v_1 = -c_1\sqrt{\mu}$, sowie umgekehrt $\mu = \left(\frac{v_1}{c_1}\right)^2$. Läßt man die Masse M_1 von einer Höhe h auf eine gleichartige Masse M_2 herabfallen, und steigt dieselbe auf eine Höhe h_1 zurück, so kann man aus beiden den Coefficienten der unvollkommenen Elasticität durch die Formel $\mu = \frac{h_1}{h}$ finden. Schon Newton fand auf diese Weise für Elfenbein $\mu = (^8/_9)^2 = {}^{64}/_{81} = 0{,}79$, für Glas $\mu = (^{15}/_{16})^2 = 0{,}9375^2 = 0{,}879$; für Kork, Stahl, Wolle $\mu = (^5/_9)^2 = 0{,}555^2 = 0{,}309$. Hierbei wird jedoch vorausgesetzt, daß der stoßende oder auffallende Körper die Kugel- und der gestoßene Körper oder die Unterlage eine Plattenform hat.

Beispiel. Welche Geschwindigkeiten nehmen zwei Stahlplatten nach dem Stoße an, wenn dieselben vor dem Stoße die Geschwindigkeiten $c_1 = 10$ und $c_2 = -6$ Fuß besitzen, die eine 30 und die andere 40 Pfund wiegt? Hier ist

$$c_1 - v_1 = (10+6)\cdot {}^{40}/_{70}\,(1 + {}^5/_9) = 16\cdot {}^4/_7\cdot {}^{14}/_9 = \frac{16\cdot 8}{9} = 14{,}22 \text{ Fuß},$$

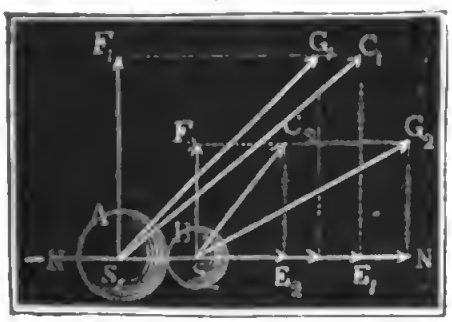
daher sind die gesuchten Geschwindigkeiten

$$v_1 = c_1 - 14{,}22 = 10 - 14{,}22 = -4{,}22 \text{ Fuß und}$$
$$v_2 = c_2 + 10{,}66 = -6 + 10{,}66 = 4{,}66 \text{ Fuß}.$$

§. 279. Weichen die Bewegungsrichtungen $\overline{S_1 C_1}$ und $\overline{S_2 C_2}$ zweier Körper A und B, Figur 388, von der Normale $N\overline{N}$ zur Berührungsebene ab, so ist deren Anstoß ein schiefer. Wir führen die Theorie desselben auf die des geraden Stoßes zurück, wenn wir die Geschwindigkeiten $S_1 C_1 = c_1$ und $S_2 C_2 = c_2$ nach der Normale und nach einer Tangentialrichtung zerlegen; die Seitengeschwindigkeiten in der Richtung der Normale $N\overline{N}$ geben einen Centralstoß und werden daher auch genau so verändert, wie beim Centralstoß, die mit der Berührungsebene parallelen

Schiefer Stoß.

Fig. 388.



Schiefer Stoß. Geſchwindigkeiten hingegen verurſachen gar keinen Stoß und bleiben daher unverändert. Vereinigt man die nach den Regeln des Centralſtoßes veränderte Normalgeſchwindigkeit eines jeden Körpers mit der unverändert gebliebenen Tangentialgeſchwindigkeit, ſo erhält man die reſultirenden Geſchwindigkeiten dieſer Körper nach dem Stoße. Setzen wir die Winkel, welche die Bewegungsrichtungen mit der Normale einſchließen, α_1 und α_2, alſo $C_1 S_1 N = \alpha_1$ und $C_2 S_2 N = \alpha_2$, ſo erhalten wir für die Normalgeſchwindigkeiten $S_1 E_1$ und $S_2 E_2$ die Werthe $c_1 \cos \alpha_1$ und $c_2 \cos. \alpha_2$, dagegen für die Tangentialgeſchwindigkeiten $S_1 F_1$ und $S_2 F_2 : c_1 \sin. \alpha_1$ und $c_2 \sin. \alpha_2$. Durch den Stoß erleiden aber die erſteren Geſchwindigkeiten Veränderungen, und es geht die erſte über in

$$v_1 = c_1 \cos. \alpha_1 - (c_1 \cos. \alpha_1 - c_2 \cos. \alpha_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2} (1 + \sqrt{\mu})$$

und die zweite in:

$$v_2 = c_2 \cos. \alpha_2 + (c_1 \cos. \alpha_1 - c_2 \cos. \alpha_2) \frac{M_1}{M_1 + M_2} (1 + \sqrt{\mu}),$$

wofern, wie ſeither allemal, M_1 und M_2 die Maſſen beider Körper bezeichnen.

Aus v_1 und $c_1 \sin. \alpha_1$ ergiebt ſich die reſultirende Geſchwindigkeit $S_1 G_1$ des erſten Körpers $w_1 = \sqrt{v_1^2 + c_1^2 \sin. \alpha_1^2}$, und aus v_2 und $c_2 \sin. \alpha_2$ die Geſchwindigkeit $S_2 G_2$ des zweiten Körpers $w_2 = \sqrt{v_2^2 + c_2^2 \sin. \alpha_2^2}$; auch ergeben ſich die Abweichungen der Geſchwindigkeitsrichtungen von der Normale durch die Formeln

$$tang. \beta_1 = \frac{c_1 \sin. \alpha_1}{v_1} \text{ und } tang. \beta_2 = \frac{c_2 \sin. \alpha_2}{v_2},$$

wenn β_1 den Winkel $G_1 S_1 N$ und β_2 den Winkel $G_2 S_2 N$ bezeichnet.

Beiſpiel. Zwei Kugeln von 30 und 50 Pfd. Gewicht ſtoßen ſich mit den Geſchwindigkeiten $c_1 = 20$ und $c_2 = 25$ Fuß, die um die Winkel $\alpha_1 = 21°,35'$ und $\alpha_2 = 65°,20'$ von der Normale abweichen, in welchen Richtungen und mit welchen Geſchwindigkeiten gehen dieſe Maſſen nach dem Stoße fort? Es ſind die unveränderlichen Seitengeſchwindigkeiten: $c_1 \sin. \alpha_1 = 20 . \sin. 21°,35' = 7{,}357$ Fuß und $c_2 \sin. \alpha_2 = 25 . \sin. 65°,20' = 22{,}719$ Fuß, dagegen die veränderlichen: $c_1 \cos. \alpha_1 = 20 . \cos. 21°,35' = 18{,}598$ Fuß, und $c_2 \cos. \alpha_2 = 25 . \cos. 65°,20' = 10{,}433$ Fuß. Sind die Körper unelaſtiſch, ſo hat man $\mu = 0$, daher die veränderten Normalgeſchwindigkeiten

$v_1 = 18{,}598 - (18{,}598 - 10{,}433) . {}^{50}/_{80} = 18{,}598 - 5{,}103 = 13{,}495$ Fuß und
$v_2 = 10{,}433 + 8{,}165 . {}^{3}/_{8} = 10{,}433 + 3{,}062 = 13{,}495$ Fuß.

Die reſultirenden Geſchwindigkeiten ſind nun

$$w_1 = \sqrt{13{,}495^2 + 7{,}357^2} = \sqrt{236{,}24} = 15{,}37 \text{ Fuß und}$$
$$w_2 = \sqrt{13{,}495^2 + 22{,}719^2} = \sqrt{698{,}27} = 26{,}42 \text{ Fuß;}$$

für ihre Richtungen hat man

$$tang. \beta_1 = \frac{7{,}357}{13{,}495}, \; log. tang. \beta_1 = 0{,}73653 - 1, \; \beta_1 = 28°,36' \text{ und}$$

$$tang. \beta_2 = \frac{22{,}719}{13{,}495}, \; log. tang. \beta_2 = 0{,}22622, \; \beta_2 = 59°,17'.$$

Fig. 389.

§. 280. Trifft die Masse A, Fig. 389, gegen eine andere unendlich große Masse, oder gegen ein unbewegliches Hinderniß BB, hat man also $c_2 = 0$ und $M_2 = \infty$, so folgt

Schiefer Stoß.

$$v_1 = c_1 \cos.\alpha_1 - c_1 \cos.\alpha_1 (1 + \sqrt{\mu})$$
$$= - c_1 \cos.\alpha_1 \sqrt{\mu} \text{ und}$$
$$v_2 = 0 + c_1 \cos.\alpha_1 . \frac{M_1 (1 + \sqrt{\mu})}{\infty}$$
$$= 0 + 0 = 0;$$

ist nun noch $\mu = 0$, so wird auch $v_1 = 0$, ist aber $\mu = 1$, so ist $v_1 = - c_1 \cos.\alpha_1$, d. h. beim unelastischen Stoße geht die Normalgeschwindigkeit ganz verloren, beim elastischen hingegen wird sie in die entgegengesetzte verwandelt. Für den Winkel, um welchen die Bewegungsrichtung nach dem Stoße von der Normale abweicht, ist

$$tang.\beta_1 = \frac{c_1 sin.\alpha_1}{v_1} = - \frac{c_1 sin.\alpha_1}{c_1 \cos.\alpha_1 \sqrt{\mu}} = - tang.\alpha_1 \sqrt{\frac{1}{\mu}};$$

für unelastische Körper wird also

$$tang.\beta_1 = - \frac{tang.\alpha_1}{0} = \infty, \text{ d. i. } \beta_1 = 90^0, \text{ und für elastische}$$

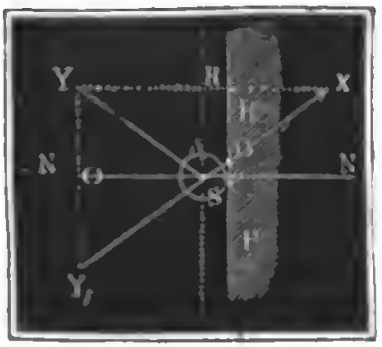
$tang.\beta_1 = - tang.\alpha_1$, d. i. $\beta_1 = - \alpha_1$. Nach dem Stoße eines unelastischen Körpers gegen ein unelastisches Hinderniß geht also der erstere mit der Tangentialgeschwindigkeit $c_1 \, sin.\alpha_1$ in der Richtung SF der Berührungebene fort, nach dem Stoße eines elastischen Körpers gegen ein elastisches Hinderniß aber geht der Körper mit unveränderter Geschwindigkeit in einer Richtung SG fort, die mit der Normale $N\bar{N}$ und der anfänglichen Richtung XS in eine Ebene fällt, und mit der Normale denselben Winkel $GS\bar{N}$ einschließt, wie die Bewegungsrichtung vor dem Stoße mit ebenderselben auf der entgegengesetzten Seite. Man nennt den Winkel $XS\bar{N}$, welchen die Bewegungsrichtung vor dem Stoße mit der Normale oder dem Lothe einschließt, den Einfallswinkel (franz. angle d'incidence; engl. angle of incidence) und den Winkel $GS\bar{N}$, welchen die Bewegungsrichtung nach dem Stoße eben damit bildet, den Austritts- oder Reflexionswinkel (franz. angle de réflexion, engl. angle of reflexion), und kann hiernach behaupten: beim vollkommen elastischen Stoße fallen Reflexions- und Einfallswinkel mit dem Einfallslothe in einerlei Ebene und beide Winkel sind einander gleich.

Beim unvollkommen elastischen Stoße ist das Verhältniß $\sqrt{\mu}$ der Tan-

Schiefer Stoß.

genten dieſer Winkel gleich dem Verhältniſſe der durch die Ausdehnung zurückgegebenen Geſchwindigkeit zu der durch die Compreſſion verlorenen Geſchwindigkeit. Mit Hülfe dieſes Geſetzes läßt ſich nun leicht die Richtung finden, in welcher der Körper A, Figur 390, gegen das unbewegliche Hinderniß BB zu ſtoßen iſt, damit er nach dem Stoße eine gewiſſe Richtung SY verfolge. Iſt der Stoß ein elaſtiſcher, ſo fällen wir von einem Punkte Y der gegebenen Richtung das Perpendikel YO gegen das Einfallsloth $N\overline{N}$, verlängern daſſelbe, bis die Verlängerung OY_1 dem Perpendikel ſelbſt gleich wird: SY_1 iſt dann die in Frage ſtehende Stoßrichtung, denn es iſt, dieſer Conſtruction zufolge, Winkel $NSY_1 = NSY$. Iſt der Stoß unelaſtiſch, ſo mache man $OY_1 = \sqrt{\mu} \,.\, OY$, dann iſt Y_1S ebenfalls die geſuchte Anfangsrichtung, da $\frac{tang.\alpha_1}{tang.\beta_1} = \frac{OY_1}{OY}$ und auch $= \sqrt{\mu}$ iſt.

Fig. 390.



Fällt man ein Loth YR gegen die Linie SR parallel zur Berührungsebene und macht deſſen Verlängerung $RX = \sqrt{\frac{1}{\mu}}\, RY$, ſo bekommt man aus leicht einzuſehenden Gründen in SX die geſuchte Einfallsrichtung ebenfalls.

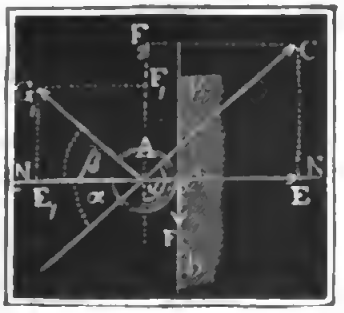
Anmerkung. Die Theorie des ſchiefen Stoßes findet ihre vorzüglichſte Anwendung beim Billardſpiel. S. Théorie mathématique des effets du jeu de billard, par Coriolis. Nach Coriolis iſt beim Anſtoße eines Billardballes gegen die Bande das Verhältniß der zurückgegebenen Geſchwindigkeit zur Einfallsgeſchwindigkeit = 0,5 bis 0,6, alſo $\mu = 0{,}5^2 = 0{,}25$ bis $0{,}6^2 = 0{,}36$. Mit Hülfe dieſes Werthes läßt ſich nun auch die Richtung angeben, in welcher ein Ball A gegen eine Bande BB zu ſtoßen iſt, damit er nach einem gegebenen Punkte Y von dieſer zurückgeworfen werde. Man fälle von dem gegebenen Punkte Y das Perpendikel YR gegen die Schwerlinie des Balles parallel zur Bande, verlängere daſſelbe um $RX = \sqrt{\frac{1}{\mu}} = {}^{10}/_{6}$ bis ${}^{10}/_{5}$ ſeines Werthes und ziehe die Gerade Y_1X: der ſich herausſtellende Durchſchnitt D iſt die Stelle, nach welcher man den Ball A zu ſtoßen hat, damit er durch Bricol nach Y gelange. Durch die Drehbewegung des Balles wird dieſes Verhältniß noch etwas geändert.

§. 281. Bei dem ſchiefen Stoße entſteht auch eine Reibung zwiſchen den ſich ſtoßenden Körpern, welche die Seitengeſchwindigkeiten in der Richtung der Berührungsebene abändert. Die Reibung des Stoßes beſtimmt ſich wie die Reibung des Druckes; bezeichnet P die Stoßkraft und φ den Rei-

bungscoefficienten, so ist sie $F = \varphi P$. Sie unterscheidet sich nur insofern von der Reibung des Druckes, als sie, wie der Stoß selbst, nur während einer sehr kleinen Zeit wirksam ist. Die durch sie hervorgebrachten Geschwindigkeitsveränderungen sind aber deshalb nicht unmeßbar klein, denn die Stoßkraft P, und folglich auch der Theil φP derselben, ist in der Regel sehr groß. Bezeichnet man die stoßende Masse durch M und die durch die Stoßkraft P erzeugte Normalacceleration durch p, so hat man $P = Mp$ und daher $F = \varphi Mp$, sowie die Verzögerung oder negative Acceleration der Reibung während des Stoßes $\frac{F}{M} = \varphi p$; d. i. φmal so groß, als die der Normalkraft. Nun haben aber die Wirkungen beider Kräfte gleiche Zeitdauer; es ist daher auch die durch die Reibung erzeugte Geschwindigkeitsveränderung φmal so groß, als die durch den Stoß bewirkte Veränderung in der Normalgeschwindigkeit. Schiefer Stoß.

In dem Falle, wenn ein Körper gegen eine unbewegliche Masse BB unter dem Einfallswinkel α, Fig. 391, stößt, ist nach dem vorigen Paragraphen die Veränderung in der Normalgeschwindigkeit:

Fig. 391.



$w = c \cos.\alpha\,(1 + \sqrt{\mu})$; daher die durch die Reibung bewirkte Veränderung in der Tangentialgeschwindigkeit $= \varphi w = \varphi c\,(1 + \sqrt{\mu})\,\cos.\alpha$. Es geht also nach dem Stoße die Seitengeschwindigkeit $c \sin.\alpha$ in $c \sin.\alpha - \varphi c\,(1 + \sqrt{\mu})\,\cos.\alpha = [\sin.\alpha - \varphi \cos.\alpha(1 + \sqrt{\mu})]\,c$ über und fällt bei vollkommen elastischen Körpern $= (\sin.\alpha - 2\varphi \cos.\alpha)\,c$ dagegen bei unelastischen Körpern $= (\sin.\alpha - \varphi \cos\alpha)\,c$ aus.

Durch die Reibung des Stoßes erhalten die Körper sehr oft eine Drehung um ihren Schwerpunkt, oder es wird, wenn eine Drehbewegung vor dem Stoße schon vorhanden war, dieselbe abgeändert. Ist das Trägheitsmoment des runden Körpers A, in Hinsicht auf seinen Schwerpunkt $S = Ml^2$, und der Drehungshalbmesser $SC = a$, so hat man die auf den Berührungspunkt C reducirte Masse des Körpers $= \frac{Ml^2}{a^2}$, daher die durch die Reibung F hervorgebrachte Drehbeschleunigung dieses Punktes:

$$p_1 = \frac{F}{Ml^2 : a^2} = \frac{\varphi Mp}{Ml^2 : a^2} = \varphi p \cdot \frac{a^2}{l^2},$$

und die entsprechende Geschwindigkeitsveränderung:

$$w_1 = \varphi \frac{a^2}{l^2} \cdot w = \varphi \frac{a^2}{l^2}\,(1 + \sqrt{\mu})\,c \cos.\alpha.$$

Schiefer Stoß. Bei einem Cylinder iſt $\frac{a^2}{l^2} = 2$, und bei einer Kugel $= {}^5/_2$, daher folgt für dieſe runden Körper die durch den Stoß gegen eine Ebene hervorgebrachte Veränderung in der Umdrehungsgeſchwindigkeit:

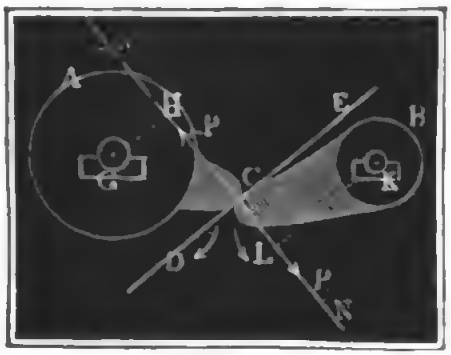
$$w_1 = 2\varphi\,(1 + \sqrt{\mu})\,c\,cos.\,\alpha \text{ und } = {}^5/_2\varphi\,(1 + \sqrt{\mu})\,c\,cos.\,\alpha.$$

Beiſpiel. Wenn ein Billardball mit 15 Fuß Geſchwindigkeit und unter dem Einfallswinkel $\alpha = 45°$ gegen die Bande ſtößt, welche Bewegungen nimmt derſelbe nach dem Stoße an? Setzt man für $\sqrt{\mu}$ den mittleren Werth 0,55, ſo hat man die normale Seitengeſchwindigkeit nach dem Stoße $= -\sqrt{\mu}\,c\,cos.\,\alpha$ $= -0{,}55\,.\,15\,.\,cos.\,45° = -8{,}25\,.\,\sqrt{1/2} = -5{,}833$ Fuß, und nimmt man mit Coriolis $\varphi = 0{,}20$ an, ſo erhält man die Seitengeſchwindigkeit parallel zur Bande $= c\,sin.\,\alpha - \varphi\,(1+\sqrt{\mu})\,c\,cos.\,\alpha = (1 - 0.20\,.\,1{,}55)\,10{,}607$ $= 0{,}69\,.\,10{,}607 = 7{,}319$ Fuß, auch folgt für den Reflexionswinkel β:

$tang.\,\beta = \frac{7{,}319}{5{,}833} = 1{,}2548$, alſo $\beta = 51°, 27'$, und die Geſchwindigkeit nach dem Stoße bleibt $= \frac{5{,}833}{cos.\,51°,27'} = 9{,}360$ Fuß. Außerdem nimmt der Ball auch noch die Umdrehungsgeſchwindigkeit ${}^5/_2\varphi\,.\,1{,}55\,.\,10.607 = 8{,}220$ Fuß um ſeine vertikale Schwerlinie an. Da der Ball ſich nicht gleitend, ſondern wälzend auf dem Billard fortbewegt, ſo iſt anzunehmen, daß er außer der fortſchreitenden Geſchwindigkeit $c = 15$ Fuß auch noch eine gleichgroße Umdrehungsgeſchwindigkeit beſitze und daß ſich dieſe ebenfalls in die Componenten $c\,cos.\,\alpha = 10{,}607$ und $c\,sin.\,\alpha = 10.607$ zerlegen laſſe. Der erſte Component entſpricht einer Drehung um eine Axe parallel zur Bandenaxe und geht in $c\,cos.\,\alpha - {}^5/_2\varphi\,(1+\sqrt{\mu})\,c\,cos.\,\alpha$ $= 10{,}607 - 8{,}220 = 2{,}387$ Fuß über, der andere Component $c\,sin.\,\alpha = 10.607$ Fuß entſpricht einer Drehung um eine Axe normal zur Bande und bleibt unverändert.

Drehbare Körper.

Fig. 392.



§. 282. Stoßen zwei um feſte Axen G und K drehbare Körper A und B, Fig. 392, gegen einander, ſo ſtellen ſich Geſchwindigkeitsveränderungen heraus, die ſich aus den Trägheitsmomenten $M_1 l_1^2$ und $M_2 l_2^2$ der Maſſen dieſer Körper hinſichtlich der feſten Axen und mit Hülfe der im Vorſtehenden gefundenen Formeln beſtimmen laſſen. Sind die Perpendikel GH und KL, welche ſich von den Drehungsaxen gegen die Stoßlinie fällen laſſen, a_1 und a_2, ſo hat man die auf die Lothpunkte H und L in der Stoßlinie reducirten trägen Maſſen $= \frac{M_1 l_1^2}{a_1^2}$ und $\frac{M_2 l_2^2}{a_2^2}$, und führt man dieſe Werthe ſtatt M_1 und M_2 in die Formeln für den freien Centralſtoß ein, ſo bekommt man die Geſchwindigkeitsveränderungen der

Drehbare Körper.

Punkte H und L (§. 278) $= (c_1 - c_2) \frac{M_2 l_2^2 : a_2^2}{M_1 l_1^2 : a_1^2 + M_2 l_2^2 : a_2^2} (1 + \sqrt{\mu})$

$= (c_1 - c_2) \frac{M_2 l_2^2 a_1^2}{M_1 l_1^2 a_2^2 + M_2 l_2^2 a_1^2} (1 + \sqrt{\mu})$ und

$(c_1 - c_2) \frac{M_1 l_1^2 : a_1^2}{M_1 l_1^2 : a_1^2 + M_2 l_2^2 : a_2^2} (1 + \sqrt{\mu})$,

$= (c_1 - c_2) \frac{M_1 l_1^2 a_2^2}{M_1 l_1^2 a_2^2 + M_2 l_2^2 a_1^2} (1 + \sqrt{\mu})$,

wofern c_1 und c_2 die Geschwindigkeiten dieser Punkte vor dem Stoße waren.

Führen wir aber die Winkelgeschwindigkeiten ein, bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeiten vor dem Stoße durch ε_1 und ε_2 und die nach dem Stoße durch ω_1 und ω_2, so haben wir $c_1 = a_1 \varepsilon_1$, $c_2 = a_2 \varepsilon_2$ zu setzen und erhalten für den stoßenden Körper den Verlust an Winkelgeschwindigkeit $= a_1 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2) \frac{M_2 l_2^2}{M_1 l_1^2 a_2^2 + M_2 l_2^2 a_1^2} (1 + \sqrt{\mu})$ und für den gestoßenen Körper den Gewinn an Winkelgeschwindigkeit

$= a_2 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2) \frac{M_1 l_1^2}{M_1 l_1^2 a_2^2 + M_2 l_2^2 a_1^2} (1 + \sqrt{\mu})$,

folglich die Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stoße selbst:

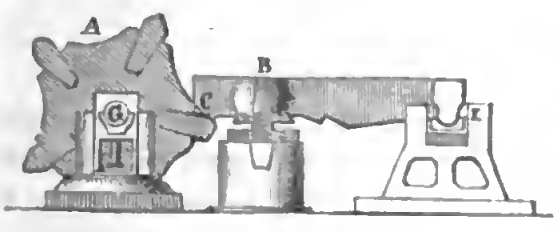
$\omega_1 = \varepsilon_1 - a_1 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2) (1 + \sqrt{\mu}) \frac{M_2 l_2^2}{M_1 l_1^2 a_2^2 + M_2 l_2^2 a_1^2}$ und

$\omega_2 = \varepsilon_2 + a_2 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2) (1 + \sqrt{\mu}) \frac{M_1 l_1^2}{M_1 l_1^2 a_2^2 + M_2 l_2^2 a_1^2}$.

Sind beide Körper vollkommen elastisch, so hat man $\mu = 1$, also $1 + \sqrt{\mu} = 2$, und sind sie unelastisch, so hat man $\mu = 0$, also $1 + \sqrt{\mu} = 1$. Im letzteren Falle ist der durch den Stoß hervorgebrachte Verlust an lebendiger Kraft

$= (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2)^2 . \frac{M_1 l_1^2 . M_2 l_2^2}{M_1 l_1^2 a_2^2 + M_2 l_2^2 a_1^2}$.

Fig. 393.



Beispiel. Die armirte Welle AG, Figur 393, hat das Trägheitsmoment in Hinsicht auf ihre Umdrehungsaxe G, $= M_1 l_1^2 = 40000 : g$, und der Stirnhammer BK dasselbe in Hinsicht auf seine Axe K, $= 150000 : g$, der Hebelarm GC der Welle ist 2 Fuß und der Hebelarm KC des Hammers 6 Fuß, und die Winkelgeschwindigkeit der Welle im Augenblicke des Stoßes an den Hammer $= 1{,}05$ Fuß. Wie groß ist diese Geschwindigkeit nach dem Stoße und welche Leistung geht durch jeden Stoß verloren, wenn gänzlicher Mangel an Elasticität vorhanden ist? Es ist die gesuchte Winkelgeschwindigkeit der Welle

Drehbare Körper.

$\omega_1 = 1{,}05 - \frac{4 \cdot 1{,}05 \cdot 150000}{40000 \cdot 36 + 150000 \cdot 4} = 1{,}05 \left(1 - \frac{60}{204}\right) = 1{,}05 \cdot 0{,}706$

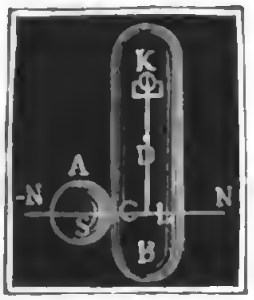
$= 0{,}741$ Fuß, und die des Hammers $= \frac{2 \cdot 6 \cdot 1{,}05 \cdot 4}{204} = 0{,}247$ Fuß, d. i. 3mal ſo klein, als die der Welle. Der Arbeitsverluſt bei jedem Anſtoße iſt

$$L = \frac{(2 \cdot 1{,}05)^2}{2g} \cdot \frac{40000 \cdot 150000}{40000 \cdot 36 + 150000 \cdot 4} = 0{,}016 \cdot (2{,}1)^2 \cdot \frac{600000}{144 + 60}$$

$$= 0{,}016 \cdot 4{,}41 \cdot \frac{150000}{51} = \frac{10584}{51} = 207{,}5 \text{ Fußpf.}$$

§. 283. Kommt ein freier und in fortſchreitender Bewegung befindlicher Körper A, Fig. 394, mit einem um eine feſte Axe K drehbaren Körper BCK zum Stoße, ſo findet man die Geſchwindigkeiten nach dem Stoße, indem man in den Formeln des vorigen Paragraphen ſtatt $a_1\varepsilon_1$ und $a_1\omega_1$ die progreſſiven Geſchwindigkeiten c_1 und v_1, und ſtatt $\frac{M_1 l_1^2}{a_1^2}$ die träge Maſſe M_1 des erſten Körpers einſetzt, die übrigen Bezeichnungen aber unverändert läßt. Es iſt hiernach die Geſchwindigkeit der erſten Maſſe nach dem Stoße:

Fig. 394.



$v_1 = c_1 - (c_1 - a_2\varepsilon_2)(1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_2 l_2^2}{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2}$, und die Winkelgeſchwindigkeit der zweiten:

$$\omega_2 = \varepsilon_2 + a_2 (c_1 - a_2\varepsilon_2)(1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_1}{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2}.$$

Iſt die Maſſe M_2 in Ruhe, alſo $\varepsilon_2 = 0$, ſo hat man

$$v_1 = c_1 - c_1 (1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_2 l_2^2}{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2} \text{ und}$$

$$\omega_2 = a_2 c_1 (1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_1}{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2}.$$

Iſt hingegen M_1 in Ruhe, ſtößt alſo die oſcillirende Maſſe, ſo hat man $c_1 = 0$, daher $v_1 = a_2\varepsilon_2 (1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_2 l_2^2}{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2}$ und

$$\omega_2 = \varepsilon_2 \left(1 - (1 + \sqrt{\mu}) \frac{M_1 a_2^2}{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2}\right).$$

Die Geſchwindigkeit, welche einer ruhenden Maſſe von einer andern durch den Anſtoß ertheilt wird, hängt nicht allein von der Geſchwindigkeit des Anſtoßes und von den Maſſen der Körper, ſondern auch von dem Abſtande $KL = a_2$ ab, um welchen die Stoßrichtung $N\bar{N}$ von der Axe K des drehbaren Körpers abſteht. Stößt die freie Maſſe, ſo nimmt die drehbare Maſſe die Winkelgeſchwindigkeit

$$\omega_2 = c_1 (1 + \sqrt{\mu}) \frac{M_1 a_2}{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2}$$

an, und trifft die schwingende Masse gegen die freie, so erhält diese die Geschwindigkeit Drehbare Körper.

$$v_1 = \varepsilon_2 (1 + \sqrt{\mu}) \frac{M_2 l_2^2 . a_2}{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2},$$ es werden aber beide Geschwindigkeiten um so größer, je größer $\frac{a_2}{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2}$ oder $\frac{1}{M_1 a_2 + \frac{M_2 l_2^2}{a_2}}$, also je kleiner $M_1 a_2 + M_2 \frac{l_2^2}{a_2}$ ist.

Setzen wir statt a_2, $a \pm x$, wo x sehr klein ist, so bekommen wir den Werth des letzteren Ausdruckes

$$M_1 (a \pm x) + \frac{M_2 l_2^2}{a \pm x} = M_1 a \pm M_1 x + \frac{M_2 l_2^2}{a} (1 \mp \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} \pm ..),$$

oder, wegen der Kleinheit der Potenzen von x,

$$= M_1 a + \frac{M_2 l_2^2}{a} \pm \left(M_1 - \frac{M_2 l_2^2}{a^2}\right) x + \ldots$$

Soll nun a dem kleinsten aller Werthe von $M_1 a_2 + \frac{M_2 l_2^2}{a_2^2}$ entsprechen, so muß das Glied $\pm \left(M_1 - \frac{M_2 l_2^2}{a^2}\right) x$ wegfallen, weil dasselbe bei einem Zusatze (x) ein anderes Zeichen erhält, als bei einer Abnahme ($- x$). Es muß also $\left(M_1 - \frac{M_2 l_2^2}{a^2}\right) x =$ Null, d. i. $\frac{M_2 l_2^2}{a^2} = M_1$, folglich

$$a = \sqrt{\frac{M_2 l_2^2}{M_1}} = l_2 \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} \text{ sein.}$$

Wenn man also in diesem Abstande den einen Körper gegen den andern stößt, so nimmt dieser die größte Geschwindigkeit an, und zwar

$$\omega = (1 + \sqrt{\mu}) \frac{c_1}{2 l_2} \sqrt{\frac{M_1}{M_2}},$$

in dem Falle, wenn der drehbare Körper gestoßen wird, und

$$v = \tfrac{1}{2} l_2 \varepsilon_2 (1 + \sqrt{\mu}) \sqrt{\frac{M_2}{M_1}},$$

wenn der freie Körper einen Stoß erhält.

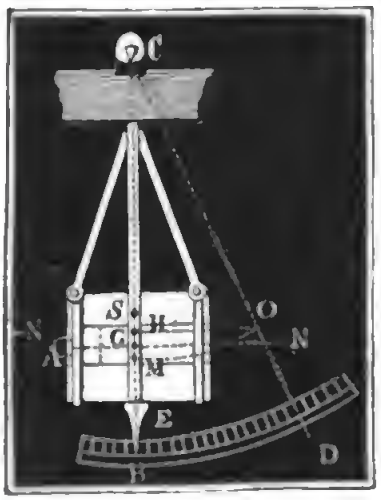
Man nennt den in der Stoßlinie befindlichen Endpunkt D des der größten Geschwindigkeit entsprechenden Abstandes oder Hebelarmes a zuweilen, jedoch unpassend, Mittelpunkt des Stoßes, angemessener vielleicht Stoßpunkt.

Beispiel. Welche Lage hat der Stoßpunkt, wenn die freie Masse in einer eisernen Kugel von 16 Pf. Gewicht besteht und die drehbare Masse ein Trägheitsmoment von 1000 : g hat? Es ist der Abstand dieses Punktes von der festen Axe des letzteren Körpers: $a = \sqrt{\frac{1000}{16}} = \sqrt{62{,}5} = 7{,}906$ Fuß. Ist der Stoß unelastisch und trifft der Block gegen die Kugel mit der Geschwindigkeit $c = 3$ Fuß, so nimmt die letztere die Geschwindigkeit $v = \frac{3}{4} . 7{,}906 = 11{,}86$ Fuß an.

Ballistisches Pendel.

§. 284. Eine Anwendung der im Vorſtehenden entwickelten Lehren findet man in der Theorie des ballistiſchen Pendels oder des Pendels von Robins (franz. pendule ballistique; engl. ballistic pendulum).

Fig. 395.



Daſſelbe beſteht in einer großen, um eine horizontale Axe C drehbaren Maſſe MH, Fig. 395, welche durch gegen ſie abgeſchoſſene Geſchützkugeln A in Schwingungen verſetzt wird und dazu dient, die Geſchwindigkeiten derſelben zu ermitteln. Damit ein möglichſt unelaſtiſcher Stoß eintrete, iſt in der vorderen Seite, wo die Kugel anſchlägt, eine Oeffnung angebracht, die man von Zeit zu Zeit mit friſchem Holze, oder Thon u. ſ. w. ausfüllt. Es bleibt dann auch die Kugel nach dem jedesmaligen Schuſſe in dieſen Maſſen ſtecken und ſchwingt mit dem ganzen Körper gemeinſchaftlich. Zur Ermittelung der Geſchwindigkeit der Kugel iſt es nöthig, den Elongationswinkel dieſes Pendels zu kennen; deshalb wird noch ein Gradbogen BD angebracht und ein Stift E unter dem Schwerpunkte des Pendels befeſtigt, der an dem erſteren hingleitet.

Nach dem vorſtehenden Paragraphen iſt die Winkelgeſchwindigkeit des balliſtiſchen Pendels nach dem Anſtoße der Kugel: $\omega = \frac{M_1 a_2 c_1}{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2}$, wenn M_1 die Maſſe der Kugel, $M_2 l_2^2$ das Trägheitsmoment des Pendels, c_1 die Geſchwindigkeit der Kugel und a_2 den Hebelarm CG des Stoßes oder den Abſtand der Stoßlinie $N\bar{N}$ von der Drehungsaxe des Pendels bezeichnet. Iſt die Entfernung CM des Schwingungspunktes M der ganzen Maſſe ſammt Kugel vom Drehpunkte C, d. i. die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem balliſtiſchen gleiche Schwingungsdauer hat, $= r$, und der Elongationswinkel $BCD = \alpha$, ſo hat man die Steighöhe des iſochron ſchwingenden einfachen Pendels: $h = CM - CH = r - r\ cos.\alpha = r\ (1 - cos.\alpha) = 2r\left(sin.\frac{\alpha}{2}\right)^2$, und daher die Geſchwindigkeit im unterſten Punkte ſeiner Bahn: $v = \sqrt{2gh} = 2\sqrt{gr}\ sin.\frac{\alpha}{2}$, oder die entſprechende Winkelgeſchwindigkeit $\omega = \frac{v}{r} = 2\sqrt{\frac{g}{r}}\ .\ sin.\frac{\alpha}{2}$. Durch Gleichſetzen dieſer beiden Werthe für die Winkelgeſchwindigkeit folgt

$$c_1 = \frac{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2}{M_1 a_2}\ .\ 2\sqrt{\frac{g}{r}}\ .\ sin.\frac{\alpha}{2}.$$

Ballistisches Pendel.

Nun ist aber der Theorie des einfachen Pendels zufolge

$$r = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Stat. Moment}} = \frac{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2}{(M_1 + M_2)\, s},$$

wenn s den Abstand des Schwerpunktes S von der Drehaxe bezeichnet; es folgt daher $M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2 = (M_1 + M_2)\, s r$ und

$$c_1 = 2\left(\frac{M_1 + M_2}{M_1}\right) \cdot \frac{s}{a_2} \sqrt{gr} \,.\, sin.\, \frac{\alpha}{2}.$$

Macht das Pendel in der Minute n Schwingungen, so ist die Schwingungsdauer $\pi \sqrt{\frac{r}{g}} = \frac{60''}{n}$, daher $\sqrt{gr} = \frac{60''.g}{n\pi}$, und die gesuchte Kugelgeschwindigkeit $c_1 = \frac{M_1 + M_2}{M_1} \cdot \frac{120\, g s}{n \pi a_2} .sin.\, \frac{\alpha}{2}$.

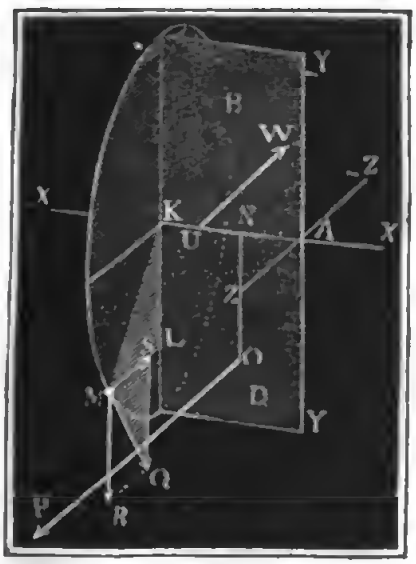
Beispiel. Wenn ein ballistisches Pendel von 3000 Pf. Gewicht durch eine angeschossene Kugel von 6 Pf. in Schwingungen versetzt wird, deren Elongation 15° beträgt, wenn ferner der Abstand s des Schwerpunktes von der Axe $= 5$ Fuß und der Abstand der Schußlinie von eben dieser Axe $= 5\frac{1}{2}$ Fuß beträgt, und endlich die Zahl der Schwingungen in einer Minute $n = 40$ ist, so war nach obiger Formel die Geschwindigkeit der Kugel im Augenblicke des Anstoßes:

$$c = \frac{3006}{6} \cdot \frac{120 \,.\, 31{,}25 \,.\, 5}{40 \,.\, 3{,}1416 \,.\, 5{,}5}\, sin.\, 7\tfrac{1}{2}^\circ = \frac{501 \,.\, 3750 \,.\, sin.\, 7^\circ, 30'}{44 \,.\, 3{,}1416} = 1774 \text{ Fuß}.$$

Mittelpunkt des Stoßes.

§. 285. Wenn ein sich um eine feste Axe C drehender Körper mit einem andern zusammenstößt, so findet im Allgemeinen eine Rückwirkung des Stoßes auf die Axe des Körpers statt, die vorzüglich von dem Abstande zwischen der Stoß- und Axenrichtung abhängig ist. Bestimmen wir diese Reaction oder diesen Axendruck in dem einfachen Falle, wenn die Stoßrichtung winkelrecht gegen die Ebene gerichtet ist, die sich durch die Drehaxe und durch den Schwerpunkt des Körpers legen läßt.

Fig. 396.



Es sei BD die Schwerebene durch die Drehaxe $X\overline{X}$ des Körpers in Figur 396, $Y\overline{Y}$ eine zweite rechtwinkelige Axe in eben dieser Ebene und $Z\overline{Z}$ die dritte Axe rechtwinkelig gegen diese Schwerebene. Ein Element M_1 des Körpers ist gegen dieses sich in A kreuzendes Axensystem durch die Coordinaten $AK = x_1$, $KL = y_1$ und $LM = z_1$, ein anderes Element durch Coordinaten x_2, y_2, z_2 u. s. w. bestimmt. Ist $\varkappa$ die Winkelacceleration, so hat man die Trägheitskraft des Elementes $M_1 : Q_1 = M_1 \,.\, \varkappa \,.\, \overline{KM}$, und zerlegt man diese in die Seitenkraft

Mittelpunkt des Stoßes.

R parallel und in die Seitenkraft S rechtwinkelig zur gedachten Schwereebene, ſo giebt die Aehnlichkeit der Dreiecke KML und QMR oder MQS: $R = M_1 . \varkappa z_1 = \varkappa M_1 z_1$ und $S = \varkappa M_1 y_1$. Es iſt hiernach die Summe aller Seitenkräfte parallel zur Ebene $= \varkappa (M_1 z_1 + M_2 z_2 + ..)$, und die Summe der Seitenkräfte rechtwinkelig gegen dieſe Ebene

$$\varkappa (M_1 y_1 + M_2 y_2 + ..).$$

Da die Ebene BD durch den Schwerpunkt geht, ſo iſt die Momentenſumme $M_1 z_1 + M_2 z_2 + .. =$ Null, es bleibt daher auch nur die Kräfteſumme $\varkappa (M_1 y_1 + M_2 y_2 + ..)$ übrig. Iſt nun P die Stoßkraft und W der Widerſtand oder die Reaction auf die Axe, ſo hat man zunächſt zu ſetzen: $P = W + \varkappa (M_1 y_1 + M_2 y_2 ...)$.

Das ſtatiſche Moment der Kraft $Q_1 = M_1 \varkappa . \overline{KM}$ iſt $= M_1 \varkappa . \overline{KM} . \overline{KM} = \varkappa . M_1 . \overline{KM}^2$, oder die Entfernung KM durch r_1 bezeichnet, $= \varkappa M_1 r_1^2$, das Moment der Kraft eines andern Maſſentheils $= \varkappa M_2 r_2^2$ u. ſ. w., daher das ſtatiſche Moment der ganzen Trägheit $= \varkappa (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + ...)$. Setzen wir nun den Abſtand NO der Stoßrichtung von der Axenrichtung $= b$, ſo haben wir das Moment der Stoßkraft P in Hinſicht auf $X\bar{X}$ $= Pb$, während das von $W = 0$ iſt; wir können daher auch ſetzen:

$$Pb = \varkappa (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + ..),$$

und bekommen durch Elimination von $\varkappa$ aus beiden Gleichungen:

$$P = W + \frac{Pb\,(M_1 y_1 + M_2 y_2 + ..)}{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + ..}, \text{ d. i. die geſuchte Reaction:}$$

$$W = P\left(1 - \frac{b\,(M_1 y_1 + M_2 y_2 + ..)}{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + ..}\right).$$

Bezeichnen wir endlich den Abſtand AN der Stoßrichtung von der Axe $Y\bar{Y}$ durch a und den Abſtand AU des Angriffspunktes U der Reaction W vom Anfangspunkte durch u, ſo haben wir noch

Moment $Pa =$ Mom. $Wu +$ Mom. $\varkappa (M_1 x_1 y_1 + M_2 x_2 y_2 + ..)$,

und es folgt der Abſtand des geſuchten Angriffspunktes:

$$u = \frac{Pa - \varkappa (M_1 x_1 y_1 + M_2 x_2 y_2 + ..)}{W}, \text{ d. i.}$$

$$u = \frac{a\,(M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + ..) - b\,(M_1 x_1 y_1 + M_2 x_2 y_2 + ..)}{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + .. - b\,(M_1 y_1 + M_2 y_2 + ..)}.$$

Die Reaction W iſt Null, wenn $b (M_1 y_1 + M_2 y_2 + ..) = M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + ..$, d. i.

$$1)\ b = \frac{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + ..}{M_1 y_1 + M_2 y_2 + ..} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{ſtatiſch. Moment}},$$

und auch ihr Moment iſt Null, wenn $Pa = \varkappa (M_1 x_1 y_1 + M_2 x_2 y_2 + ..)$, d. i.

$$2)\ a = \frac{M_1 x_1 y_1 + M_2 x_2 y_2 + ..}{M_1 y_1 + M_2 y_2 + ..}.$$

Man nennt den durch dieſe Coordinaten a und b beſtimmten Punkt O

in der die feste Axe enthaltenden Schwerebene den **Mittelpunkt des Stoßes** (franz. centre de percussion; engl. centre of percussion). Jede durch diesen Punkt gehende und gegen genannte Schwerebene rechtwinkelig gerichtete Stoßkraft wird von der Masse vollkommen aufgenommen, ohne eine Wirkung gegen die Axe übrig zu lassen oder einen Druck in derselben zu erzeugen. Die Formel (1) zeigt an, daß der Mittelpunkt des Stoßes mit dem Schwingungspunkte (vergl. §. 267) gleichen Abstand von der Umdrehungsaxe hat. Mittelpunkt des Stoßes.

Damit ein Hammer beim Aufschlagen nicht pralle, d. i. auf die Hand, welche ihn hält, oder auf die Hülse, um welche er sich dreht, nicht reagire, ist es nöthig, daß der Schlag durch den Mittelpunkt des Stoßes gehe.

Fig. 397.

Beispiele. 1) Bei einer prismatischen Stange CA, Fig. 397, die sich um einen ihrer Endpunkte dreht, steht der Mittelpunkt des Stoßes um $CO = b = \frac{\frac{1}{3}r^2}{\frac{1}{2}r} = \frac{2}{3}r = \frac{2}{3}CA$ von der Axe ab. Wenn man also die Stange an einem Ende festhält, und mit dem in der Entfernung $CO = \frac{2}{3}CA$ befindlichen Punkte O aufschlägt, so wird man kein Prallen fühlen. 2) Bei einem Parallelepipede BDE, Fig. 398, welches sich um eine zu vier Seiten parallel gehende und um $SA = s$ vom Schwerpunkte abstehende Axe $X\bar{X}$ dreht, ist der Abstand AO des Stoßmittelpunktes O von der Axe, $b = \frac{s^2 + \frac{1}{3}d^2}{s}$, wo d die halbe Diagonale CA der Seitenflächen ist, durch welche die Axe $X\bar{X}$ hindurchgeht (§. 234). Ginge die Stoßkraft P durch den Schwerpunkt, so wäre die Reaction

$$W = P\left(1 - s.\frac{s}{s^2 + \frac{1}{3}d^2}\right) = P\left(1 - \frac{s^2}{s^2 + \frac{1}{3}d^2}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\frac{Pd^2}{s^2 + \frac{1}{3}d^2} = \frac{Pd^2}{3s^2 + d^2}.$$

Fig. 398.

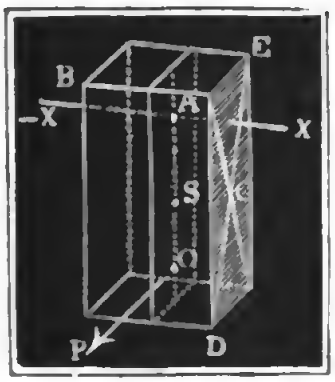
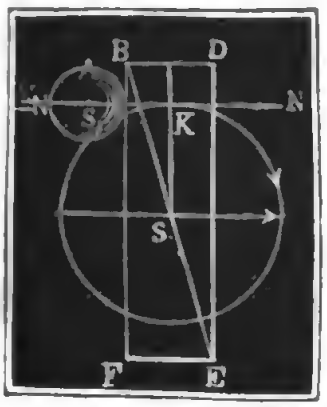


Fig. 399.



§. 286. Untersuchen wir endlich noch einen einfachen Fall des excentrischen Stoßes, wenn beide Massen vollkommen frei sind. Wenn zwei Körper A und BE, Fig. 399, so zusammenstoßen, daß die Richtung $N\bar{N}$ des Stoßes durch den Schwerpunkt S_1 des einen Körpers hindurch und vor dem Schwerpunkt S des andern Körpers vorbeigeht, so ist der Stoß in Hinsicht auf den ersten Körper centrisch und in Hinsicht auf den andern excentrisch. Die Excentrischer Stoß.

Excentriſcher Stoß

Wirkungen dieſes excentriſchen Stoßes laſſen ſich aber nach dem Lehrſatze in §. 228 finden, wenn man annimmt erſtens, der zweite Körper ſei frei und die Stoßrichtung gehe durch den Schwerpunkt S ſelbſt, und zweitens, dieſer Körper werde im Schwerpunkte feſtgehalten und die Stoßkraft wirke als eine Umdrehungskraft. Iſt nun c_1 die anfängliche Geſchwindigkeit von A, c die des Schwerpunktes von BE, und gehen durch den Stoß beide Geſchwindigkeiten in v_1 und v über, ſo beibt, wie in §. 272, $M_1 v_1 + Mv = M_1 c_1 + Mc$. Iſt ferner ε die anfängliche Winkelgeſchwindigkeit des Körpers BE bei ſeiner Umdrehung um die Axe durch den Schwerpunkt und ſenkrecht gegen die Ebene $N\overline{N}S_2$, geht dieſe Geſchwindigkeit durch den Stoß in ω über, und bezeichnet man das Trägheitsmoment dieſes Körpers in Hinſicht auf S durch Ml^2 und die Excentricität, oder den Abſtand SK des Schwerpunktes S von der Stoßrichtung durch s, ſo hat man auch

$$M_1 v_1 + \frac{Ml^2}{s^2} . s\omega = M_1 c_1 + \frac{Ml^2}{s^2} s\varepsilon.$$

Sind beide Körper unelaſtiſch, ſo haben die Berührungspunkte beider am Ende des Stoßes gleiche Geſchwindigkeit, es iſt alſo noch $v_1 = v + s\omega$. Beſtimmt man aus den vorigen Gleichungen v und ω durch v_1 und ſetzt man die erhaltenen Werthe in die letzte Gleichung, ſo erhält man $v_1 = \frac{M_1 (c_1 - v_1)}{M} + c + \frac{M_1 s^2 (c_1 - v_1)}{Ml^2} + s\varepsilon$, und hieraus beſtimmt ſich der Verluſt an Geſchwindigkeit des erſten Körpers

$$c_1 - v_1 = \frac{Ml^2 (c_1 - c - s\varepsilon)}{(M_1 + M) l^2 + M_1 s^2},$$

der Gewinn an progreſſiver Geſchwindigkeit des zweiten:

$$v - c = \frac{M_1 l^2 (c_1 - c - s\varepsilon)}{(M_1 + M) l^2 + M_1 s^2},$$

und der Gewinn an Winkelgeſchwindigkeit deſſelben:

$$\omega - \varepsilon = \frac{M_1 s (c_1 - c - s\varepsilon)}{(M_1 + M) l^2 + M_1 s^2}.$$

Beim vollkommen elaſtiſchen Stoße ſind dieſe Werthe doppelt und beim unvollkommen elaſtiſchen Stoße $(1 + \sqrt{\mu})$ mal ſo groß.

Beiſpiel. Trifft eine eiſerne Kugel A von 65 Pf. Gewicht das anfänglich in Ruhe befindliche Parallelepiped BE aus Tannenholz mit 36 Fuß Geſchwindigkeit, iſt die Länge dieſes Körpers 5 Fuß, die Breite 3 Fuß und die Dicke 2 Fuß, und weicht die Stoßrichtung $N\overline{N}$ um $SK = s = 1\frac{3}{4}$ Fuß von dem Schwerpunkte S ab, ſo ergeben ſich folgende Geſchwindigkeiten nach dem Stoße. Das ſpecifiſche Gewicht des Tannenholzes = 0,45 angenommen, folgt das Gewicht des parallelepipediſchen Körpers = 5.3.2.66.0,45 = 891 Pf. Das Quadrat der halben Diagonale BS der Seitenfläche parallel zur Stoßrichtung iſt

$(5/2)^2 + (2/2)^2 = 7{,}25$, daher folgt (nach §. 234), $M_1 l^2 = 893/3 \,.\, 7{,}25 = 2153{,}25$ und $(M_1 + M)\, l^2 = 956/3 \,.\, 7{,}25 = 2310{,}33$, und es ist nun die Geschwindigkeit der Kugel nach dem Stoße Excentrischer Stoß.

$$v_1 = c_1 - \frac{M\, l^2\, c_1}{(M_1 + M)\, l^2 + M_1 s^2} = 36\left(1 - \frac{2153{,}25}{2310{,}33 + 65 \,.\, 1{,}75^2}\right)$$

$$= 36\left(1 - \frac{2153{,}25}{2509{,}39}\right) = 36 \,.\, 0{,}142 = 5{,}112 \text{ Fuß},$$

ferner die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des gestoßenen Körpers

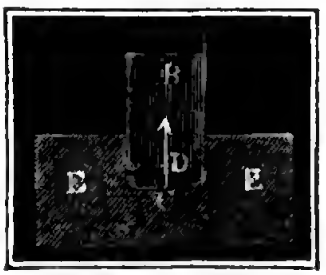
$$v = \frac{M_1\, l^2\, c_1}{(M_1 + M)\, l^2 + M_1 s^2} = \frac{157{,}08 \,.\, 36}{2509{,}39} = 2{,}253 \text{ Fuß},$$

und endlich die Winkelgeschwindigkeit desselben

$$\omega = \frac{M_1\, s\, c_1}{(M_1 + M)\, l^2 + M_1 s^2} = \frac{199{,}06 \,.\, 36}{2509{,}39} = 2{,}856 \text{ Fuß}.$$

§. 287. Die Wirkungen des Stoßes werden sehr oft benutzt, um einen Einrammen.

Fig. 400.



Körper B, Fig. 400, in einen andern Körper E, z. B. in eine weiche Masse, einzuschlagen oder einzurammen. Ist der Widerstand, welchen die letztere Masse dem Eindringen der ersteren entgegensetzt, constant und $= P$, und die Tiefe CD des Eindringens bei einem Schlage $= s$, so wird die mechanische Arbeit Ps consumirt. Ist hingegen dieser Widerstand anfänglich $=$ Null und wächst er mit der Tiefe des Eindringens gleichmäßig, so daß er am Ende, nachdem der Körper um die Tiefe s in die zweite Masse eingedrungen ist, $= P$ beträgt, so ist die consumirte Arbeit nur $\frac{(0 + P)}{2}\, s = \frac{1}{2} Ps$. Ist endlich der Widerstand anfänglich $= P_1$ und wächst derselbe ebenfalls mit dem Wege gleichmäßig, so daß er nach Durchlaufung des Weges s in P_2 übergeht, so hat man jene Leistung oder Arbeit $= \frac{(P_1 + P_2)}{2}\, s$ zu setzen.

Fängt nun der Körper B, dessen Masse M sein möge, mit der Geschwindigkeit v an in die Masse einzudringen, und setzt er bei dem Eindringen diese Geschwindigkeit zu, so hat er in Folge seiner lebendigen Kraft die Arbeit $\frac{Mv^2}{2} = \frac{v^2}{2g}\, G$ verrichtet, wofern $G = Mg$ sein Gewicht bezeichnet.

Bei constantem Widerstande ist nun zu setzen: $Ps = \frac{v^2}{2g}\, G$; bei allmälig zunehmendem und mit Null anfangendem Widerstande hingegen:

$$Ps = \frac{v^2}{2g} \,.\, 2G;$$

Einrammen bei von P_1 bis P_2 allmälig anwachſendem Widerſtande endlich:

$$(P_1 + P_2)\, s = \frac{v^2}{2g} \cdot 2G.$$

Die Anfangsgeſchwindigkeit v erzeugt man in der Regel dadurch, daß man eine dritte Maſſe A, deren Größe $= M_1$ und Gewicht $= G_1$ ſein möge, mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit c_1 auf die zweite Maſſe B aufſchlagen läßt. Sind nun dieſe Maſſen unelaſtiſch, ſo hat man die Geſchwindigkeit, mit welcher beide nach dem Stoße fortgehen und in die Maſſe E einzudringen anfangen: $v = \frac{M_1 c_1}{M + M_1} = \frac{G_1 c_1}{G + G_1}$.

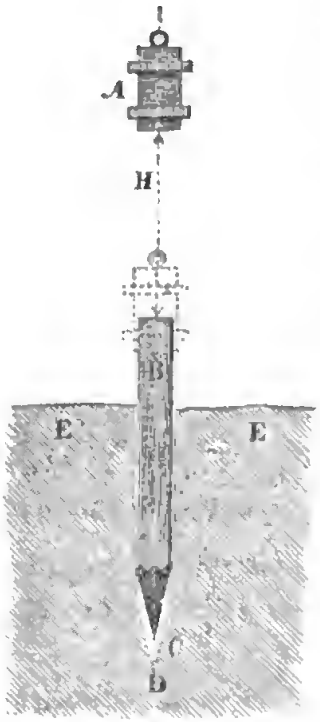
Beim Einrammen einer Pilotte oder eines Pfahles, Fig. 401, beſteht B in einem, mit Eiſen beſchuhten Pfahle und A in einem von einer gewiſſen Höhe herabfallenden ſchweren Körper, den man den Rammklotz, Rammbär oder Hoyer nennt. Iſt die Fallhöhe $= h_1$, ſo hat man

$$\frac{v^2}{2g} = \left(\frac{G_1}{G+G_1}\right)^2 \cdot \frac{c_1^2}{2g} = \left(\frac{G_1}{G+G_1}\right)^2 \cdot h_1,$$

daher die der Geſchwindigkeit v entſprechende mechaniſche Arbeit des Pfahles und Rammklotzes zuſammen

$$= \left(\frac{G_1}{G+G_1}\right)^2 (G + G_1)\, h_1 = \frac{G_1^2 h_1}{G + G_1}.$$

Fig. 401.



Für einen conſtanten Widerſtand P des Erdreiches iſt aber die beim Eindringen des Pfahles aufzuwendende Leiſtung $= Ps$, daher hat man zu ſetzen:

$$Ps = \frac{G_1^2 h_1}{G + G_1}.$$

Da beim Eindringen das Gewicht $G+G_1$ noch die Arbeit $(G+G_1)\, s$ verrichtet, ſo hat man genauer $(P-G-G_1)\, s = \frac{G_1^2 h_1}{G+G_1}$ zu ſetzen; es iſt aber $G + G_1$ gegen P hinreichend klein, um es in der Regel vernachläſſigen zu können.

Wäre endlich G ſehr klein gegen G_1, wie z. B. beim Einſchlagen eines Nagels, ſo hätte man $Ps = G_1 h$.

Beiſpiel. Ein Pfahl von 400 Pf. Gewicht iſt bei der letzten Hitze von 20 Schlägen mittels eines 700 Pf. ſchweren und 5 Fuß hoch herabfallenden Rammbäres noch 6 Zoll tiefer eingedrungen, welchen Widerſtand leiſtet der Erdboden, oder welche Laſt kann der Pfahl tragen, ohne tiefer einzudringen? Hier iſt G

$= 400$, $G_1 = 700$ Pfd., $h_1 = 5$ und $s = \frac{0{,}5}{20} = 0{,}025$ Fuß, wobei vorausgesetzt wird, daß der Pfahl bei jedem Schlage um gleichviel eindringt. Nach der gefundenen Formel ist der fragliche Widerstand Einrammen.

$$P = \frac{700^2 \,.\, 5}{1100 \,.\, 0{,}025} = \frac{4900}{11} \,.\, 200 = 89100 \text{ Pf.}$$

Wegen der Sicherheit auf die Dauer belastet man solche Pfähle nur $\frac{1}{100}$ bis $\frac{1}{10}$ mal so stark.

§. 288. Setzen wir voraus, daß sowohl der Pfahl als auch der Rammbär unvollkommen elastisch sei, so erhalten wir für die Anfangsgeschwindigkeit des Pfahles nach dem Aufschlagen des Hoyers (s. §. 278)

$$v = \frac{G_1 c_1}{G + G_1}\left(1 + \sqrt{\frac{\mu H_1 + \mu_1 H}{H_1 + H}}\right),$$

und dagegen die des letzteren:

$$v_1 = \left[1 - \frac{G}{G + G_1}\left(1 + \sqrt{\frac{\mu H_1 + \mu_1 H}{H_1 + H}}\right)\right] c_1.$$

Nun ist aber (nach §. 276), $H = \frac{FE}{l}$ und $H_1 = \frac{F_1 E_1}{l_1}$, wenn F, l und E, sowie F_1, l_1 und E_1 die Querschnitte, Längen und Elasticitätsmodul des Pfahles und Bäres bezeichnen, daher hat man auch

$$\sqrt{\frac{\mu H_1 + \mu_1 H}{H_1 + H}} = \sqrt{\frac{\mu F_1 E_1 l + \mu_1 F E l_1}{F_1 E_1 l + F E l_1}};$$

endlich ist aber für den eisernen Bär E in der Regel viel größer als für den hölzernen Pfahl (s. §. 189), daher läßt sich annähernd die Größe $= \sqrt{\mu}$ und

$$v = (1 + \sqrt{\mu}) \,.\, \frac{G_1 c_1}{G + G_1} \text{ und}$$

$$v_1 = \left(1 - (1 + \sqrt{\mu})\,\frac{G}{G + G_1}\right) c_1 = \left(\frac{G_1 - G\sqrt{\mu}}{G_1 + G}\right) c_1 \text{ setzen.}$$

Nimmt man nun $\mu = 0$, setzt man also gänzliche Unelasticität voraus, so hat man es mit dem im vorigen Paragraphen behandelten Falle zu thun; setzt man aber $\mu = 1$, nimmt man also an, daß der Bär vollkommen elastisch sei, so erhält man hiernach

$$v = \frac{2 G_1 c_1}{G + G_1} \text{ und } v_1 = \left(\frac{G_1 - G}{G_1 + G}\right) c_1.$$

Es ist sonach $v_1 < v$, es dringt folglich der Pfahl ohne Bär in das Erdreich, und es ist das Arbeitsquantum des ersteren während des Eindringens:

$$Ps = G\frac{v^2}{2g} = \left(\frac{2 G_1}{G + G_1}\right)^2 \frac{G c_1^2}{2g} = \left(\frac{2 G_1}{G + G_1}\right)^2 \,.\, G h_1.$$

Einrammen. Die Leiſtung zum Aufheben des Rammbäres iſt $L = G_1 h_1$, und daher das Verhältniß der Leiſtung des Pfahles zu der des Bäres, im erſten Falle

$$\frac{Ps}{L} = \frac{G_1}{G + G_1},$$

und im zweiten, $\frac{Ps}{L} = \frac{4 G G_1}{(G + G_1)^2}$.

Dieſes Verhältniß iſt am größten und zwar $= 1$, im erſten Falle, wenn $\frac{G_1}{G} = \infty$, und im zweiten, wenn $\frac{G_1}{G} = 1$, d. i., wenn im erſten Falle der Rammbär unendlich ſchwer iſt, und wenn im zweiten Falle derſelbe mit dem Pfahl einerlei Gewicht hat.

Uebrigens entſpringt im zweiten Falle aus der lebendigen Kraft des Rammbäres noch eine Nachwirkung, denn da der Bär nach dem Aufſchlagen noch die Geſchwindigkeit $v_1 = \left(\frac{G_1 - G}{G_1 + G}\right) c_1$ hat, welcher die Geſchwindigkeitshöhe $k = \left(\frac{G_1 - G}{G_1 + G}\right)^2 \cdot \frac{c_1^2}{2g} = \left(\frac{G_1 - G}{G_1 + G}\right)^2 h_1$ entſpricht, ſo theilt er bei einem zweiten Zuſammenſtoß mit dem Pfahl noch die Arbeit $\left(\frac{2 G_1}{G_1 + G}\right)^2 G k = \left(\frac{2 G_1}{G_1 + G}\right)^2 \left(\frac{G_1 - G}{G_1 + G}\right)^2 G h_1$ mit, und es iſt hiernach $Ps = \left[1 + \left(\frac{G_1 - G}{G_1 + G}\right)^2\right] \left(\frac{2 G_1}{G_1 + G}\right)^2 G h_1$ zu ſetzen.

Beiſpiel. Für das Beiſpiel des vorigen Paragraphen erhalten wir bei Zugrundelegung der zweiten Formel den Widerſtand des Pfahles:

$$P = \left(\frac{2 G_1}{G_1 + G}\right)^2 \frac{G h_1}{s} = \left(\frac{2 \cdot 700}{700 + 400}\right)^2 \cdot \frac{400 \cdot 5}{0{,}025} = (14/11)^2 \cdot \frac{400}{0{,}005}$$

$= 129600$ Pfund, oder, wenn wir noch die Nachwirkung hinzunehmen,

$$P = \left[1 + \left(\frac{700 - 400}{700 + 400}\right)^2\right] \cdot 129600 = 1{,}0744 \cdot 129600 = 139200 \text{ Pfund},$$

alſo mehr als nach der erſten Formel.

Abſolute Elaſticität. §. 289. Eine prismatiſche Stange vom Querſchnitte F und der Länge l wird beim Elaſticitätsmodul E durch die Kraft

$$P = \frac{\lambda}{l} FE$$

um λ länger ausgezogen (ſ. §. 185), welche hierbei die mechaniſche Arbeit $L = \frac{P\lambda}{2} = \frac{\lambda^2 FE}{2l} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 EFl$ (ſ. §. 186*) verrichtet.

Für einen Stab vom Querſchnitte $F = 1$ und der Länge $l = 1$ hat man $L = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 . E$, und wenn nun $\frac{\lambda}{l}$ das Ausdehnungsver-

hältniß bei der Elasticitätsgrenze bezeichnet, so ist $L = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 E$ für jeden Stoff eine bestimmte Erfahrungsgröße, die man den Arbeitsmodul der Elasticität (franz. coëfficient de la résistance vive d'élasticité, engl. modulus of resilience) nennen kann. Bezeichnen wir diesen Modul in der Folge durch den Buchstaben A, so erhalten wir die Arbeit zum Ausdehnen einer prismatischen Stange überhaupt

Absolute Stoßfestigkeit.

$$L = A \,.\, Fl = AV.$$

Es ist also die Arbeit, durch welche ein prismatischer Körper bis zur Elasticitätsgrenze ausgedehnt wird, dem Volumen $V = Fl$ dieses Körpers proportional. Ist dagegen $\frac{\lambda_1}{l_1}$ die Ausdehnung des Körpers im Augenblicke des Zerreißens, so ist $L_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{l_1}\right)^2 E$ ein anderer Erfahrungscoefficient, den man den Arbeitsmodul der Festigkeit nennen und durch den Buchstaben A_1 bezeichnen kann; und es ist hiernach die Arbeit zum Zerreißen einer prismatischen Stange überhaupt:

$$L_1 = A_1 \,.\, Fl = A_1 V.$$

Um den Arbeitsmodul A der Elasticität bestimmen zu können, muß man den Elasticitätsmodul E oder den Tragmodul T (s. §. 187), und das Ausdehnungsverhältniß $\frac{\lambda}{l}$ bei der Elasticitätsgrenze kennen. Es ist dann

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 E, \text{ oder da } T = \frac{\lambda}{l} E \text{ ist, einfacher}$$

$$A = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda}{l} \,.\, T = \frac{1}{2}\,\frac{T^2}{E}.$$

Um den Arbeitsmodul A_1 der Festigkeit ermitteln zu können, muß man hingegen den Festigkeitsmodul K (s. §. 187) und das Ausdehnungsverhältniß $\frac{\lambda_1}{l_1}$ für den Moment des Zerreißens kennen. Es ist $\frac{\lambda_1}{l_1} = \frac{K}{E}$, und daher

$$A_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda_1}{l_1} \,.\, K = \frac{1}{2}\,\frac{K^2}{E}.$$

Für die rückwirkende Festigkeit des Zermalmens gelten dieselben Formeln.

Beispiele. 1) Wenn für Eichenholz der Arbeitsmodul der Elasticität $A = 2{,}5$ Zollpfund, und der der Festigkeit $A_1 = 20$ Zollpfund ist, so hat man die Arbeit, welche erfordert wird, um eine Stange von 60 Zoll Länge und 3 Quadratzoll Querschnitt bis zur Elasticitätsgrenze auszudehnen:

$L = 2{,}5 \,.\, 60 \,.\, 3 = 450$ Zoll Pfund, und die, um diese Stange zu zerreißen

$L_1 = 20 \,.\, 60 \,.\, 3 = 3600$ Zoll Pfund.

Abſolute Stoßfeſtigkeit.

2) Nach den Verſuchen von Brix iſt für den ungeglühten Eiſendraht $E = 30'000000$ und $\frac{\lambda}{l} = 0{,}001$, daher hat man für denſelben den Arbeitsmodul der Elaſticität $A = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 . E = \frac{1}{2} . 0{,}000001 . 30'000000 = 15$ Zollpfund. Ferner iſt nach dieſen Verſuchen $K = 100000$ Pf. und $\frac{\lambda_1}{l_1} = 0{,}0034$, und daher iſt für den Arbeitsmodul der Feſtigkeit für den ungeglühten Eiſendraht

$$A_1 = \frac{1}{2}\frac{\lambda_1}{l_1} . K = \frac{1}{2} . 0{,}0034 . 100000 = 170 \text{ Zollpfund.}$$

Anmerkung. Mittels der in §. 189 mitgetheilten Tabelle laſſen ſich dieſe Arbeitsmodule für verſchiedene Körper berechnen.

§. 290. Mit Hülfe der Arbeitsmodul A und A_1 kann man nun auch leicht berechnen, unter welchen Bedingungen ein prismatiſcher Körper AB, Fig 402, durch einen in der Axenrichtung geführten Stoß bis zur Elaſticitätsgrenze ausgedehnt oder zerriſſen werden kann. Iſt G das Gewicht und c die Geſchwindigkeit des ſtoßenden Körpers, ſo hat man die Arbeit, welche derſelbe beim Aufſchlagen auf den prismatiſchen Körper, deſſen Gewicht wir mit G_1 bezeichnen wollen, entwickelt:

Fig. 402.

$$L = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{G^2}{G+G_1},$$

oder, da er hierbei noch von der Höhe λ herunterſinkt, noch genauer:

$$L = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{G^2}{G+G_1} + \lambda G.$$

Da wegen der Ausdehnung des Körpers um λ in Folge des Stoßes der Schwerpunkt deſſelben noch um $\frac{1}{2}\lambda$ ſinkt, ſo hat man noch genauer:

$$L = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{G^2}{G+G_1} + \lambda (G + \tfrac{1}{2} G_1).$$

Setzt man nun dieſer Arbeit der einen oder andern in dem vorigen Paragraphen gefundenen Arbeiten zum Ausdehnen oder Zerreißen des Körpers gleich, ſo erhalten wir folgende Gleichungen:

1) Für die Ausdehnung bis zur Elaſticitätsgrenze

$$A F l = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{G^2}{G+G_1} + \lambda (G + \tfrac{1}{2} G_1),$$

oder, wenn man $Fl\gamma = G_1$, wo γ die Dichtigkeit des geſtoßenen Körpers iſt, ſetzt und keine zweite Maſſe an dem Körper hängt:

$$\frac{A G_1}{\gamma} = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{G^2}{G+G_1} + \lambda (G + \tfrac{1}{2} G_1),$$

und meist genau genug: Absolute Stoßfestigkeit.

$$\frac{A}{\gamma} G_1 = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{G^2}{G+G_1} = \frac{G^2 h}{G+G_1}.$$

2) Für die Ausdehnung bis zum Zerreißen hat man statt A, A_1 und statt λ, λ_1 zu setzen, weshalb

$$A_1 F l = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{G^2}{G+G_1} + \lambda_1 (G + \tfrac{1}{2} G_1),$$

oder annähernd

$$A_1 F l = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{G^2}{G+G_1} = \frac{G^2 h}{G+G_1} \text{ folgt.}$$

Hiernach ergiebt sich z. B. die der Stoßgeschwindigkeit entsprechende Fallhöhe

$$h = \frac{A_1 F l (G+G_1)}{G^2}.$$

Man ersieht hieraus, daß die Stange um so stärkere Stöße aushalten kann, je größer ihre Masse ist. Dies ist eine für die Baukunst sehr wichtige Regel.

Beispiele. 1) Wenn das Fördergefäß oder die sogenannte Treibtonne, welche in einem seigern Schachte an einem 400 Pfund schweren Drahtseile hängt, 2000 Pfund wiegt, wenn der Arbeitsmodul der Festigkeit dieses Drahtseiles $A_1 = 80$ Zollpfund beträgt und jeder Cubikzoll Drahtseil ein Gewicht von 0,16 Pfund hat, so ist die Höhe von welcher die etwa im Schachte hängen gebliebene Tonne hinabfallen muß, um das Seil zu zerreißen

$$h = \frac{80 \,.\, 400 \,.\, 2400}{0{,}16 \,.\, 4000000} = \frac{8 \,.\, 24}{1{,}6} = 120 \text{ Zoll} = 10 \text{ Fuß}.$$

Wenn dagegen der Arbeitsmodul der Elasticität nur 7 Pfund beträgt, so hat man die Fallhöhe der Tonne, bei welcher das Drahtseil über die Elasticitätsgrenze hinaus ausgedehnt wird, $h_1 = {}^7/_{80} \,.\, h = {}^7/_8$ Fuß $= 8\frac{1}{2}$ Zoll.

2) Wenn bei einer Kettenbrücke zwei gegenüber befindliche Hängestangen zusammen ein constantes Gewicht von 5000 Pf. tragen und durch einen darüber wegfahrenden Wagen noch mit 6000 Pfund belastet werden, wenn ferner der Arbeitsmodul A des Schmiedeeisens 7 Zollpfund, die Länge einer Hängestange 200 Zoll, und der Querschnitt derselben 1,5 Quadratzoll beträgt, so hat man

$$h = \frac{AFl\,(G+G_1)}{G^2} = \frac{7 \,.\, 2 \,.\, 1{,}5 \,.\, 200 \,.\, 11000}{36000000} = \frac{7 \,.\, 11}{60} = {}^{77}/_{60}$$

$= 1{,}28$ Zoll. Rollt hiernach der Wagen über ein Hinderniß von 1,3 Zoll weg, so werden die Hängestangen schon Gefahr laufen, über die Elasticitätsgrenze hinaus ausgedehnt zu werden.

§. 291. Wirkt die Kraft P an einem Ende eines prismatischen Körpers rechtwinkelig gegen die Axe desselben, während das andere Ende festgehalten wird, so hat man das Arbeitsquantum, welches der Einbiegung oder Bogenhöhe a entspricht nach §. 192: Relative Stoßfestigkeit.

$$L = \frac{Pa}{2} = \frac{P^2 l^3}{6 WE}$$

Relative Steifigkeit.

Nun iſt aber (nach §. 190) $Mr = Plr = WE$, und (nach §. 200) $\frac{e}{r} = \frac{\lambda}{l}$; es folgt daher hier

$$L = \frac{W^2 E^2 l}{6 WEr^2} = \frac{WEl}{6e^2}\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 E \cdot \frac{Wl}{3e^2}.$$

Iſt nun $\frac{\lambda}{l}$ das Ausdehnungsverhältniß bei der Elaſticitätsgrenze, ſo hat man $\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 E$ gleich dem Arbeitsmodul A, und daher das entſprechende Arbeitsquantum des Balkens:

$$L = A \cdot \frac{Wl}{3e^2}.$$

Ebenſo iſt die Arbeit zum Abbrechen des Balkens:

$$L_1 = A_1 \cdot \frac{Wl}{3e^2}.$$

Liegt der Balken an beiden Enden auf und wirkt die Kraft in der Mitte, ſo hat man ſtatt l, $\frac{l}{2}$, und ſtatt P, $\frac{P}{2}$, alſo auch ſtatt L, $\frac{L}{2}$ zu ſetzen, weshalb ſich die Formeln in nichts ändern.

Für einen parallelepipediſchen Balken von der Breite b und Höhe h hat man

$$W = \frac{bh^3}{12} \text{ und } e = \frac{h}{2},$$

daher

$$L = \tfrac{1}{9} A \cdot bhl = \tfrac{1}{9} AV, \text{ ſowie}$$
$$L_1 = \tfrac{1}{9} A_1 V.$$

Für cylindriſche Stäbe vom Halbmeſſer r iſt hingegen

$$\frac{W}{e^2} = \frac{\pi r^4}{4r^2} = \frac{\pi r^2}{2},$$

und daher

$$L = \tfrac{1}{6} AV \text{ und } L_1 = \tfrac{1}{6} A_1 V.$$

Es verhält ſich alſo in beiden Fällen die Arbeit zum Biegen oder Abbrechen des prismatiſchen Körpers wie das Volumen deſſelben.

§. 292 *). Die letzten Formeln finden vorzüglich ihre Anwendung, wenn ein an beiden Enden unterſtützter prismatiſcher Körper BB, Figur 403 (a. f. S.), in ſeiner Mitte D den Schlag eines von einer Höhe $AD = h$ niederfallenden Körpers aufnehmen muß. Iſt $\frac{G}{g} = M$ die träge Maſſe des fallenden Körpers und M_1 die nach der Mitte D redu-

cirte träge Maſſe des Körpers BB, ſo hat man wieder das Arbeitsvermögen, welches beide Körper nach dem Aufſchlagen beſitzen: Relative Stoßfeſtigkeit.

$$L = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{M^2}{M+M_1} = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{M}{M+M_1} \cdot Mg = \frac{M}{M+M_1} Gh.$$

Fig. 403.

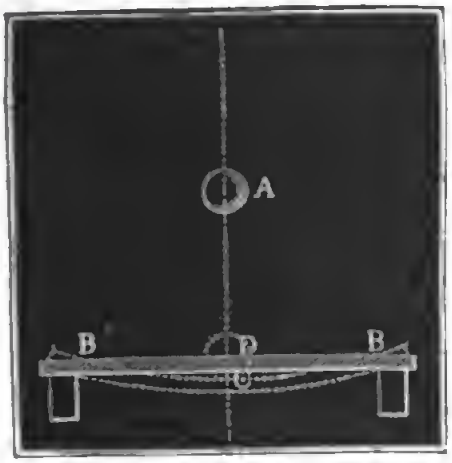
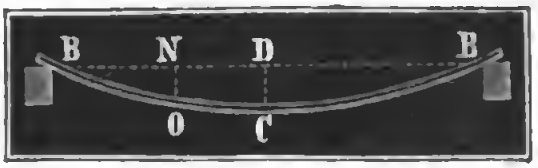


Fig. 404.



Was nun aber die träge Maſſe M_1 anlangt, ſo finden wir dieſe auf folgende Weiſe. Es ſei G_1 das Gewicht dieſer Stange, l die halbe Länge BD, Fig. 404, derſelben, x eine Abſciſſe BN und y die entſprechende Ordinate NO der von BB im Augenblicke der größten Biegung gebildeten Curve; endlich bezeichne noch a die größte Bogenhöhe DC dieſer Curve. Denken wir uns BD in unendlich viele Theile, jeden $= dx$, zerlegt, ſo erhalten wir ein Element O des Stangengewichtes $= \frac{G\,dx}{l}$, und daher ein Element der trägen Stangenmaſſe von N nach D reducirt:

$$dM_1 = \frac{G_1\,dx}{gl} \cdot \left(\frac{NO}{DC}\right)^2 = \frac{G_1\,y^2\,dx}{ga^2l}.$$

Nun iſt aber nach §. 192

$$y = \frac{Px}{2WE}\left(l^2 - \frac{x^2}{3}\right), \text{ alſo}$$

$$y^2 = \frac{P^2x^2}{4W^2E^2}\left(l^4 - {}^2/_3 l^2x^2 + \frac{x^4}{9}\right), \text{ und}$$

$$a^2 = \frac{P^2l^6}{9W^2E^2}, \text{ daher folgt hier}$$

$$dM_1 = \frac{9G_1x^2\left(l^4 - {}^2/_3 l^2x^2 + \frac{x^4}{9}\right)dx}{4gl^7}, \text{ und}$$

die nach der Mitte D reducirte träge Maſſe der Stange BB,

$$M_1 = \int_0^l \frac{9G_1}{4gl^7}\left(l^4x^2 - {}^2/_3 l^2x^4 + {}^1/_9 x^6\right)dx$$

$$= \frac{9G_1}{4gl^7}\left(l^4 \cdot \frac{l^3}{3} - {}^2/_3 l^2 \cdot \frac{l^5}{5} + {}^1/_9 \frac{l^7}{7}\right) = {}^{17}/_{35} \cdot \frac{G_1}{g}.$$

Relative Stoßfeſtigkeit.

Dies vorausgeſetzt, können wir nun die Leiſtung

$$L = \frac{M}{M + M_1} \cdot Gh = \frac{G^2 h}{G + {}^{17}/_{35} G_1}$$

ſetzen, und erhalten ſo die Bedingung des Ausbiegens bis zur Elaſticitätsgrenze:

$$A \cdot \frac{W l}{6 e^2} = \frac{G^2 h}{G + {}^{17}/_{35} G_1},$$

alſo, wenn der Balken eine parallelepipediſche Form hat,

$${}^1/_9 A V = \frac{G^2 h}{G + {}^{17}/_{35} \cdot G_1}, \text{ und daher}$$

$$h = \frac{A V (G + {}^{17}/_{35} G_1)}{9 G^2}, \text{ oder } V = \frac{G_1}{\gamma} \text{ geſetzt,}$$

$$h = \frac{A G_1 (G + {}^{17}/_{35} G_1)}{9 \gamma G^2}.$$

Führt man A_1 ſtatt A ein, ſo giebt der Ausdruck

$$h = \frac{A_1 G_1 (G + {}^{17}/_{35} G_1)}{9 \gamma G^2}$$

die Höhe an, von welcher das Gewicht G herabfallen muß, um den parallelepipediſchen Stab zu zerbrechen.

Beiſpiel. Wie hoch muß ein eiſernes Gewicht G von 100 Pfund herabfallen, um eine Gußeiſenplatte von 36 Zoll Länge, 12 Zoll Breite und 3 Zoll Dicke in ihrer Mitte zu zerſchlagen? Es iſt hier der Arbeitsmodul der Feſtigkeit

$$A_1 = {}^1/_2 \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 E = {}^1/_2 \left(\frac{K}{E}\right)^2 E = {}^1/_2 \frac{K^2}{E} = {}^1/_2 \cdot \frac{19000^2}{17{,}000000}$$

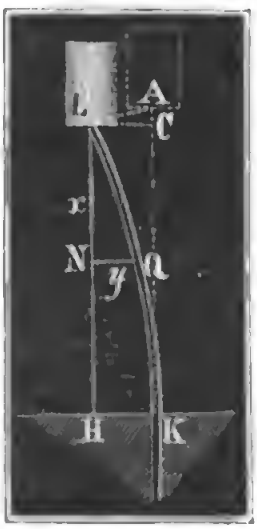
$$= {}^{361}/_{34} = 10{,}6 \text{ Zollpfund (S. Tabelle §. 189),}$$

ferner $V = bhl = 12 \cdot 3 \cdot 36 = 1296$ Cubikzoll, und da ein Cubikzoll Gußeiſen $\gamma = 0{,}275$ Pf. wiegt, $G_1 = 1296 \cdot 0{,}275 = 356{,}4$ Pf.; daher die fragliche Höhe

$$h = \frac{10{,}6 \cdot 1296 \cdot (100 + {}^{17}/_{35} \cdot 356{,}4)}{9 \cdot 100000}$$

$$= \frac{1{,}374}{9} \cdot 273 = 41{,}7 \text{ Zoll.}$$

Fig. 405.



Rückwirkende Stoßfeſtigkeit.

§. 293*). Man kann auch die Arbeit berechnen, welche zum Zerknicken eines Körpers LQK, Fig. 405, nöthig iſt. Aus der §. 213*) gefundenen Gleichung der elaſtiſchen Linie

$$y = a \sin. \left(x \sqrt{\frac{P}{WE}}\right),$$

folgt durch Differenziiren

$$dy = a \cos. \left(x \sqrt{\frac{P}{WE}}\right) \sqrt{\frac{P}{WE}} \cdot dx,$$

und daher für das Element ds dieſer Curve

Rückwirkende Stoßfeſtigkeit.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(1 + \frac{Pa^2}{WE}\left[cos.\left(x\sqrt{\frac{P}{WE}}\right)\right]^2\right) dx.$$

Da dy klein iſt gegen dx, ſo hat man annähernd

$$ds = dx\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = \left(1 + \frac{Pa^2}{2WE}\left[cos.\left(x\sqrt{\frac{P}{WE}}\right)\right]^2\right) dx$$

$$= \left(1 + \frac{Pa^2}{4WE}\left[1 + cos.\left(2x\sqrt{\frac{P}{WE}}\right)\right]\right) dx;$$

und es ergiebt ſich daher durch Integration

$$s = x + \frac{Pa^2}{4WE}\left[x + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{WE}{P}} \cdot sin.\left(2x\sqrt{\frac{P}{WE}}\right)\right].$$

Nimmt man $x = l$, ſo hat man, da, nach §. 213, $l\sqrt{\frac{P}{WE}} = \frac{\pi}{2}$ iſt

$$sin.\left(2l\sqrt{\frac{P}{WE}}\right) = sin.\,\pi = 0,$$

und daher die der Durchbiegung oder Bogenhöhe $HK = a$ entſprechende Senkung des Gewichtes, $AC = \delta = s - l = \frac{Pa^2 l}{4WE}$.

Nun iſt aber nach §. 213, die Kraft, welche eine Durchbiegung überhaupt hervorbringt, $P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \cdot WE$, daher folgt die Senkung oder der Weg von P während der Biegung der Stange KL

$$\delta = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \cdot \frac{a^2 l}{4} = \frac{\pi^2 a^2}{16 l}.$$

Noch iſt auch $Par = WE$, und $\frac{e}{r} = \frac{\lambda}{l}$, daher folgt auch

$$a = \frac{WE}{Pr} = \frac{\lambda}{l} \cdot \frac{1}{e}\left(\frac{2l}{\pi}\right)^2 \text{ und}$$

$$\delta = \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \cdot \frac{l^3}{\pi^2 e^2}.$$

Endlich iſt die dieſer Senkung δ oder die dem Ausdehnungsverhältniſſe $\frac{\lambda}{l}$ entſprechende mechaniſche Arbeit

$$L = P\delta = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \cdot \frac{l^3}{\pi^2 e^2} \cdot WE$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \cdot E \cdot \frac{Wl}{e^2},$$

Rückwirkende Stoßfeſtigkeit.

d. i. $L = \frac{1}{2} A \cdot \frac{Wl}{e^2}$ oder $L_1 = \frac{1}{2} A_1 \cdot \frac{Wl}{e^2}$,

je nachdem es ſich um Biegung bis zur Elaſticitätsgrenze, oder um Brechung des ganzen Körpers handelt.

Beiſpiel. Wenn ein hölzerner Pfahl noch 10 Fuß = 120 Zoll aus dem Erdboden hervorragt, und der letztere einen Widerſtand von 20000 Fuß dem tiefern Eindringen des Pfahles entgegenſetzt, ſo muß derſelbe einen durch die Formel $P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 WE$ beſtimmten Querſchnitt erhalten, um der Biegung beim Aufſchlagen des Rammbäres widerſtehen zu können. Man hat $W = \frac{\pi r^4}{4}$, wenn der Querſchnitt des Pfahles ein Kreis iſt, daher $P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \cdot \frac{\pi r^4 E}{4}$, und den Halbmeſſer des Querſchnitts

$$r = \sqrt[4]{\frac{4P}{\pi E} \cdot \left(\frac{2l}{\pi}\right)^2} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 20000}{1800000} \cdot \frac{4 \cdot 120^2}{\pi^2}}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{2560}{\pi^2}} = 3{,}01 \text{ Zoll.}$$

Iſt der Pfahl ſchwächer, hat er z. B. nur 6 Zoll Dicke, ſo wird ihn die mechaniſche Arbeit

$$L = \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 E \cdot \frac{Wl}{e^2} = \frac{1}{16} \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \cdot \pi r^2 l E$$

$$= \frac{1}{16} \frac{1800000}{600^2} \cdot 9 \cdot 120 \cdot \pi = 1060 \text{ Zollpfund}$$

bis zur Elaſticitätsgrenze, und dagegen die Leiſtung

$$L_1 = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{K}{E}\right)^2 \cdot \pi r^2 l E = \frac{1}{16} (\frac{16}{1000})^2 \cdot 1800000 \cdot 9 \cdot 120\, \pi$$

$$= 16956 \text{ Zollpfund bis zum Zerbrechen einbiegen.}$$

Wenn nun die Schläge auf den Pfahlkopf durch einen Rammbär ausgeführt werden, der 400 Pfund wiegt und 60 Zoll hoch herabfällt, ſo wird bei dem Gewicht $G_1 = 150$ Pfund des ganzen Pfahles, die Arbeit des Pfahles nach einem Schlage

$$L = \frac{G^2 h}{G + G_1} = \frac{400^2 \cdot 60}{550} = \frac{160000 \cdot 6}{55}$$

$$= 960000 : 55 = 17455 \text{ Zollpfund}$$

betragen, und daher der Pfahl nicht bloß gebogen, ſondern auch zerknickt werden.

Arbeit der Torſionsfeſtigkeit.

§. 294. Es laſſen ſich auch noch die Wirkungen des Stoßes auf die Torſion der Wellen unterſuchen. Nach §. 216 iſt die mechaniſche Leiſtung, welche die Torſion α einer Welle vom Halbmeſſer r erfordert

$$L = \frac{P \alpha a}{2} = \frac{\alpha^2 \cdot WE}{4l};$$

nun iſt aber auch $\lambda = \frac{s^2}{2l} = \frac{\alpha^2 e^2}{2l}$, daher folgt $\alpha^2 = \frac{2\lambda l}{e^2}$ und

$$L = \frac{\lambda WE}{2e^2} = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{l} E \cdot \frac{Wl}{e^2}.$$

Führt man ſtatt $\frac{\lambda}{l} E = T$ oder K ein, ſo bekommt man die Arbeit, welche aufzuwenden iſt, um die äußerſten, im Abſtande e von der Wellenaxe befindlichen Faſern bis zur Elaſticitätsgrenze zu ſpannen, Arbeit der Torſionsfeſtigkeit.

$$L = \frac{T}{2} \cdot \frac{Wl}{e^2},$$

und die, um die Welle abzuwürgen:

$$L_1 = \frac{K}{2} \cdot \frac{Wl}{e^2}.$$

Für eine cylindriſche Welle iſt $W = \frac{\pi r^4}{2}$, daher

$$L = \frac{T}{4} \cdot \pi r^2 l, \quad \text{und} \quad L_1 = \frac{K}{4} \cdot \pi r^2 l.$$

Hat die Welle das Trägheitsmoment $M_1 a_1^2$ und die Winkelgeſchwindigkeit ε_1, und ſtößt ſie eine Maſſe M, in dem Axenabſtande a, ſo iſt die von der Torſion der Welle aufzunehmende Stoßleiſtung

$$L = \frac{(\varepsilon_1 a)^2}{2} \cdot \frac{M_1^2 \frac{a_1^4}{a^4}}{M + \frac{M_1 a_1^2}{a^2}} = \frac{\varepsilon_1^2}{2} \cdot \frac{M_1^2 a_1^4}{Ma^2 + M_1 a_1^2},$$

und es laſſen ſich nun die Wirkungen des Stoßes auf die Torſion leicht berechnen, wenn man dieſen Ausdruck einem der vorigen gleichſetzt.

Beiſpiel. Der Schwungring eines Walzwerkes wiegt 10000 Pfund, und geht mit 50 Fuß Geſchwindigkeit um; wie ſtark muß die 100 Zoll lange eiſerne Welle deſſelben ſein, damit ſie bei einem plötzlichen, etwa durch ein unüberwindliches Hinderniß hervorgebrachten Aufhalten keinen Schaden leide? Es iſt hier $L = G\frac{c^2}{2g} = 10000 \cdot 0{,}016 \cdot 2500 = 400000$ Fußpfund $= 4800000$ Zollpfund; und auch

$$L = \frac{K}{4} \cdot \pi r^2 l = \frac{3000 \cdot 100 \cdot \pi r^2}{4} = 300000 \cdot \frac{\pi}{4} r^2 \text{ Zollpfund.}$$

wenn man nach §. 189, $K = 3000$ Pfund ſetzt. Durch Gleichſetzung bekommt man nun $F = \pi r^2 = \frac{19200000}{300000} = 649$ Quadratzoll, und daher die nöthige Wellenſtärke $d = 2r = 9$ Zoll.

Anmerkung. Der Stoßfeſtigkeit iſt erſt in neuerer Zeit mehr Aufmerkſamkeit geſchenkt worden. Wir finden über ſie nur Einiges mitgetheilt in Tredgold's Werk über die Stärke des Gußeiſens u. ſ. w. (Strength of cast iron). in Poncelet's Introduction à la mécanique industrielle und in Rühlmann's Geodynamik. Letzteres Werk bezieht ſich vorzüglich auf die Verſuche Hodgkinſon's über die Feſtigkeit prismatiſcher Körper gegen den Stoß, worüber ein beſonderer Artikel in dem erſten Band der Zeitſchrift für das geſammte Ingenieurweſen (dem Ingenieure) von Bornemann u. ſ. w. handelt.

Die Verſuche Hodgkinſon's ſtimmen im Weſentlichen mit der vorſtehen-

Stoßfeſtigkeit. den Theorie über die Stoßfeſtigkeit überein; ſie erſtrecken ſich vorzüglich auf die relative Feſtigkeit, und ſind in der Art ausgeführt worden, daß pendelartig aufgehangene Gewichte horizontal gegen vertikale, an den Enden unterſtützte, Stäbe ſchlugen. Es beſtätigte ſich hierbei die Richtigkeit der Formel $L = \frac{G^2 h}{G + \frac{1}{2} G_1}$, welche unter der Vorausſetzung gefunden wird, daß der Stoß ein unelaſtiſcher iſt, vollſtändig; es hing die Leiſtung L gar nicht von der materiellen Beſchaffenheit des ſtoßenden Körpers ab. Gleich ſchwere Körper aus verſchiedenen Stoffen (Gußeiſen, Gußſtahl, Glockenmetall, Blei) brachten bei gleicher Fallhöhe an einem und demſelben Stabe (aus Gußeiſen oder Gußſtahl) gleiche Durchbiegungen hervor; auch waren dieſe faſt genau dieſelben, welche die Theorie unter der Vorausſetzung findet, daß der Stab vollſtändig elaſtiſch iſt.

Fünfter Abſchnitt.

Statik flüſſiger Körper.

Erſtes Kapitel.

Vom Gleichgewichte und Drucke des Waſſers in Gefäßen.

§. 295. Wir betrachten die flüſſigen Körper als Verbindungen materieller Punkte, deren Zuſammenhang unter einander ſo ſchwach iſt, daß die kleinſten Kräfte hinreichen, durch Verſchieben eine Trennung derſelben zu bewirken (§. 59). Manche der in der Natur vorkommenden Körper, wie z. B. die Luft, das Waſſer u. ſ. w., beſitzen dieſe Eigenſchaft der Flüſſigkeit im hohen Grade, andere Körper hingegen, wie z. B. Oel, Schmiere, aufgeweichte Erde u. ſ. w., ſind im mindern Grade flüſſig. Man nennt jene vollkommen, dieſe aber unvollkommen flüſſige Körper. Gewiſſe Körper, wie z. B. die Teige, ſtehen den feſten Maſſen ebenſo nahe als den flüſſigen. Flüſſigkeit.

Vollkommen flüſſige Körper, von welchen in der Folge nur die Rede ſein wird, ſind auch zugleich vollkommen elaſtiſch, d. h. ſie laſſen ſich durch äußere Kräfte zuſammendrücken und nehmen nach Wegnahme dieſer Kräfte das erſte Volumen vollkommen wieder an. Nur iſt die Größe der einem gewiſſen Drucke entſprechenden Volumenveränderung bei verſchiedenen Flüſſigkeiten ſehr verſchieden; während ſich dieſelbe bei den tropfbarflüſſigen Körpern höchſt unbedeutend zeigt, fällt ſie bei den luftförmigen Körpern, die man deshalb auch elaſtiſche Flüſſigkeiten nennt, ſehr groß aus. Dieſer geringe Grad von Zuſammendrückbarkeit der tropfbarflüſſigen Körper iſt der Grund, weswegen man bei den meiſten Unterſuchungen der Hydroſtatik (§. 63) dieſelben als incompreſſibele

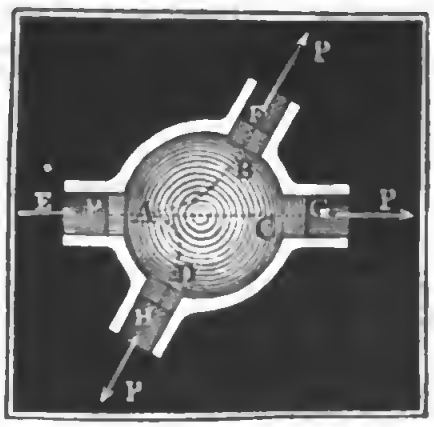
Flüſſigkeit. oder unelaſtiſche Flüſſigkeiten anſieht und behandelt. Da das Waſſer unter allen tropfbarflüſſigen Körpern am meiſten verbreitet iſt und im Leben am häufigſten angewendet wird, ſo ſieht man es als den Repräſentanten aller dieſer Flüſſigkeiten an und ſpricht bei den Unterſuchungen in der Mechanik des Flüſſigen immer nur vom Waſſer, indem man ſtillſchweigend vorausſetzt, daß die mechaniſchen Verhältniſſe anderer tropfbaren Flüſſigkeiten dieſelben ſind wie die des Waſſers.

Aus denſelben Gründen iſt in der Mechanik der elaſtiſch-flüſſigen Körper immer nur von der gemeinen atmoſphäriſchen Luft die Rede.

Anmerkung. Eine Waſſerſäule von einem Quadratzoll Querſchnitt wird durch ein Gewicht von 15 Pfd., welches dem Drucke der Atmoſphäre entſpricht, um ohngefähr 0,00005 oder 50 Milliontel ihres Volumens zuſammengedrückt, wogegen eine Luftſäule unter dem Drucke dieſes Gewichtes nur die Hälfte ihres anfänglichen Volumens einnimmt. Siehe: Aimé, über die Zuſammendrückung der Flüſſigkeiten, in Poggendorff's Annalen, Ergänzungsband (nach 72), 1848.

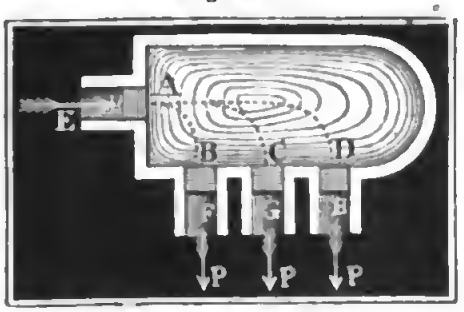
Princip des gleichen Druckes §. 296. Die charakteriſtiſche Eigenſchaft der Flüſſigkeiten, wodurch ſich dieſelben weſentlich von den feſten Körpern unterſcheiden, und welche der Lehre vom Gleichgewichte flüſſiger Körper zur Baſis dient, iſt die Fähigkeit, den Druck, welcher auf einen Theil der Oberfläche der Flüſſigkeit ausgeübt wird, nach allen Richtungen hin unverändert fortzupflanzen. Bei den feſten Körpern pflanzt ſich der Druck nur in ſeiner eigenen Richtung fort (§. 83); wird dagegen das Waſſer von einer Seite her gedrückt, ſo entſteht in der ganzen Maſſe derſelben eine Spannung, die ſich nach allen Seiten hin äußert und daher an allen Stellen der Oberfläche deſſelben wahrzunehmen iſt. Um ſich von der Richtigkeit dieſes Geſetzes zu überzeugen, kann man einen mit Waſſer gefüllten Apparat anwenden, wie ihn Figur 406 im horizontalen Durchſchnitte repräſentirt. Die gleich weiten und in gleicher Höhe über dem horizontalen Fußboden befindlichen Röhren *AE*, *BF* u. ſ. w. ſind durch vollkommen bewegliche und genau abſchließende Kolben verſchloſſen; das Waſſer drückt deshalb auch durch ſein Gewicht auf den einen Kolben genau ſo ſtark wie auf den andern. Sehen wir aber von dieſem Drucke ab, oder nehmen wir das Waſſer gewichtslos an. Drücken wir dagegen den einen Kolben mit einer gewiſſen Kraft *P* gegen das Waſſer ſo pflanzt ſich dieſe durch das Waſſer hindurch bis zu den übrigen Kolben *B*, *C*, *D* fort und

Fig. 406.



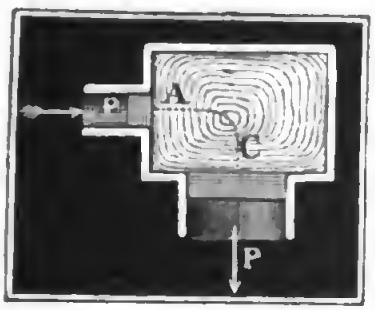
es iſt zur Herſtellung des Gleichgewichtes, oder um das Zurückgehen dieſer Kolben zu verhindern, nöthig, auf jeden dieſer Kolben eine gleich große Gegenkraft P wirken zu laſſen. Wir ſind daher berechtigt, anzunehmen, daß die auf einen Theil A der Oberfläche der Waſſermaſſe wirkende Kraft P eine Spannung in dieſer erzeugt, und ſich dadurch nicht nur in der geraden Linie AC, ſondern auch in jeder andern Richtung BF, DH u. ſ. w. auf andere gleich große Oberflächentheile C, B, D fortpflanzt. Princip des gleichen Druckes

Fig. 407.



Sind die Axen der Röhren BF, CG u. ſ. w., Fig. 407, unter ſich parallel, ſo laſſen ſich die Kräfte, welche auf ihre Kolben wirken, durch Addition zu einer einzigen Kraft vereinigen; iſt n die Anzahl dieſer gleich großen Kolben, ſo beträgt daher der Geſammtdruck auf dieſelben: $P_1 = nP$, und in dem von der Figur repräſentirten Falle $P_1 = 3P$. Nun iſt aber der Inbegriff F_1 der gedrückten Flächen B, C, D ebenfalls $= n$ mal gedrückte Fläche F des einen Kolbens, es läßt ſich daher n nicht nur $= \frac{P_1}{P}$, ſondern auch $= \frac{F_1}{F}$, alſo überhaupt $\frac{P_1}{P} = \frac{F_1}{F}$ ſetzen.

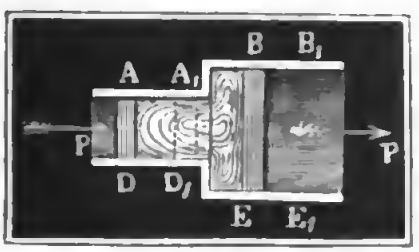
Fig. 408.



Rücken wir nun noch die Röhren B, C, D u. ſ. w. ſo zuſammen, daß ſie, wie in Fig. 408, eine einzige ausmachen, und verſchließen wir ſie durch einen einzigen Kolben, ſo geht F_1 in eine einzige Fläche über und es iſt P_1 die auf ſie wirkende Kraft; es folgt daher das allgemeinere Geſetz: **die Drücke, welche ein flüſſiger Körper auf verſchiedene Theile der Gefäßwand ausübt, ſind den Inhalten dieſer Theile proportional.**

Dieſes Geſetz entſpricht auch dem Principe der virtuellen Geſchwindigkeiten. Bewegt ſich der Kolben $AD = F$, Fig. 409, um den Weg $AA_1 = s$ einwärts, ſo drückt er das Waſſerprisma Fs aus ſeiner Röhre, und geht der Kolben $BE = F_1$ um den Weg $BB_1 = s_1$ auswärts, ſo läßt er den prismatiſchen Raum $F_1 s_1$ zurück. Da wir aber vorausgeſetzt haben, daß ſich die Waſſermaſſe weder ausdehnen noch zuſammendrücken läßt, ſo muß das Volumen der-

Fig. 409.



Princip des gleichen Druckes.

ſelben bei dieſen Kolbenbewegungen unverändert bleiben, alſo der Zuſatz Fs dem Abgange $F_1 s_1$ gleich ſein. Die Gleichung $F_1 s_1 = Fs$ giebt aber $\frac{F_1}{F} = \frac{s}{s_1}$, und aus der Verbindung dieſer Proportion mit der Proportion $\frac{P_1}{P} = \frac{F_1}{F}$ folgt $\frac{P_1}{P} = \frac{s}{s_1}$, es iſt daher auch Arbeit $P_1 s_1$ = Arbeit Ps (S. §. 80).

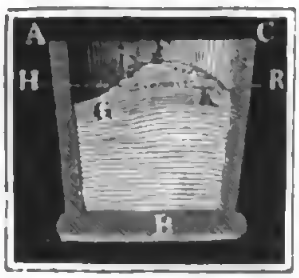
Beiſpiel. Wenn der Kolben AD einen Durchmeſſer von $1\frac{1}{2}$ Zoll und der Kolben BE einen ſolchen von 10 Zoll hat, und jener mit einer Kraft P von 36 Pf. auf das Waſſer gedrückt wird, ſo übt dieſer Kolben eine Kraft $P_1 = \frac{F_1}{F} P$ $= \frac{10^2}{1{,}5^2} \cdot 36 = \frac{400}{9} \cdot 36 = 1600$ Pf. aus. Wird der erſte Kolben um 6 Zoll fortgeſchoben, ſo geht der zweite nur um $s_1 = \frac{F}{F_1} s = \frac{9.6}{400} = {}^{27}/_{200} = 0{,}135$ Zoll zurück.

Anmerkung. Vielfache Anwendungen dieſes Geſetzes kommen in der Folge vor, bei der hydrauliſchen Preſſe, der Waſſerſäulenmaſchine, bei den Pumpen u. ſ. w.

Waſſerſpiegel.

§. 297. Die dem Waſſer inwohnende Schwerkraft macht, daß ſich alle Elemente deſſelben abwärts zu bewegen ſuchen und ſich auch wirklich ſo bewegen, wenn ſie nicht daran verhindert werden. Um eine zuſammenhängende Waſſermaſſe zu erhalten, iſt es deshalb nöthig, das Waſſer in Gefäßen einzuſchließen. Das in einem Gefäße ABC, Fig. 410, befindliche Waſſer iſt aber nur dann im Gleichgewichte, wenn die noch freie Oberfläche HR deſſelben rechtwinkelig auf der Richtung der Schwerkraft, alſo horizontal iſt, denn ſo lange dieſe Oberfläche noch krumm oder gegen den Horizont geneigt iſt, ſo lange giebt es auch noch höher liegende Waſſerelemente E, F u. ſ. w., welche wegen ihrer großen Beweglichkeit in Folge ihrer Schwere über den darunter befindlichen, wie auf einer ſchiefen Ebene GK, herabgleiten.

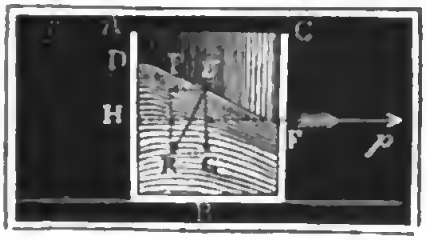
Fig. 410.



Da bei größeren Entfernungen die Schwerrichtungen nicht mehr als parallele Linien angeſehen werden können, ſo hat man die freie Oberfläche oder den Spiegel des Waſſers in einem großen Gefäße, wie z. B. in einem größeren See, nicht mehr als eine Ebene, ſondern als einen Kugeloberflächentheil zu betrachten.

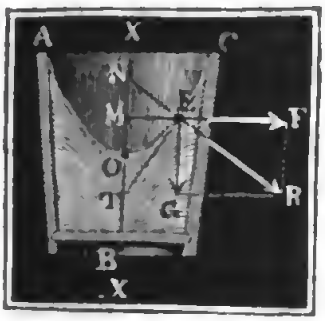
Wirkt außer der Schwere noch eine andere Kraft auf die Waſſerelemente, ſo ſteht im Gleichgewichtszuſtande die Oberfläche des Waſſers winkelrecht auf der Richtung der aus der Schwere und der hinzutretenden Kraft entſpringenden Mittelkraft.

Fig. 411.



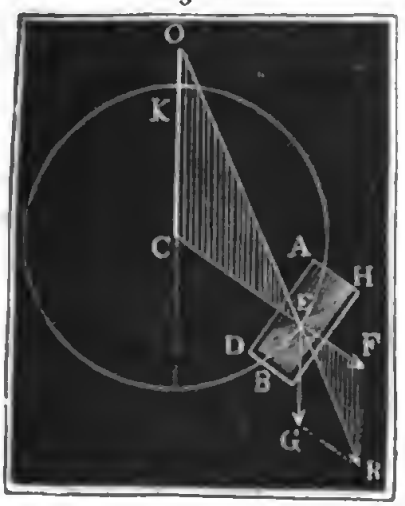
Wird ein Gefäß ABC, Fig. 411, mit der unveränderlichen Acceleration p horizontal fortbewegt, ſo bildet die freie Oberfläche des Waſſers in demſelben eine ſchiefe Ebene DF, denn da in dieſem Falle jedes Element E dieſer Oberfläche von ſeinem Gewichte G abwärts und von ſeiner Trägheit $P = \frac{p}{g} G$ horizontal getrieben wird, ſo entſpringt in jedem eine Mittelkraft R, welche von der Richtung der Schwere um einen unveränderlichen Winkel $REG = \alpha$ abweicht. Dieſer Winkel iſt auch zugleich der Winkel DFH, um welchen der auf R normal ſtehende Waſſerſpiegel von dem Horizonte abweicht. Er iſt beſtimmt durch $tang.\ \alpha = \frac{P}{G} = \frac{p}{g}$. Waſſerſpiegel

Fig. 412.



Wird dagegen ein Gefäß ABC, Figur 412, gleichförmig um ſeine vertikale Axe $X\overline{X}$ gedreht, ſo bildet der Spiegel des mit umlaufenden Waſſers in demſelben eine hohle Fläche AOC mit paraboliſchen Axendurchſchnitten. Iſt ω die Winkelgeſchwindigkeit des Gefäßes und des darin befindlichen Waſſers, G das Gewicht eines Waſſerelementes E und y der Abſtand ME deſſelben von der vertikalen Axe, ſo hat man für die Centrifugalkraft dieſes Elementes $F = \omega^2 \frac{Gy}{g}$ (§. 246), und daher für den Winkel $REG = TEM = \varphi$, welchen die Mittelkraft R mit der Vertikalen, oder die Tangente ET des Waſſerprofiles mit dem Horizonte einſchließt:

Fig. 413



$$tang.\ \varphi = \frac{F}{G} = \frac{\omega^2 y}{g}.$$

Hiernach iſt alſo die Tangente des Winkels, welchen die Berührungslinie mit der Ordinate einſchließt, der Ordinate proportional. Da dieſe Eigenſchaft der gemeinen Parabel zukommt (S. §. 144), ſo iſt auch der vertikale Durchſchnitt AOC des Waſſerſpiegels eine Parabel, deren Axe mit der Drehungsaxe $X\overline{X}$ zuſammenfällt.

Bewegt man ein Gefäß ABH, Fig. 413, in einem Vertikalkreiſe um eine Hori-

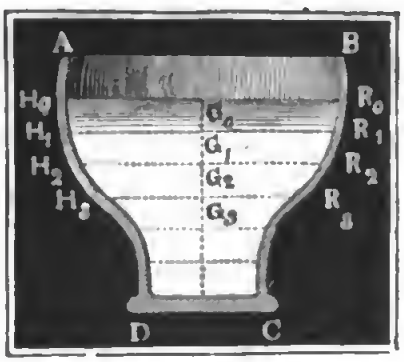
Waſſerſpiegel. zontalaxe C gleichförmig herum, ſo bildet die Oberfläche des Waſſers in demſelben eine cylindriſche Fläche mit kreisförmigem Querſchnitte DEH. Verlängern wir die Richtung der aus der Schwere G und der Centrifugalkraft F eines Elementes E entſtehenden Mittelkraft R bis zum Durchſchnitte O mit der Vertikalen CK durch den Drehpunkt, ſo erhalten wir die ähnlichen Dreiecke ECO und EFR, für welche gilt $\frac{CO}{EC} = \frac{FR}{EF} = \frac{G}{F}$; nun iſt aber, wenn man den Drehungshalbmeſſer $EC = y$ ſetzt, und die letzte Bezeichnung beibehält, $F = \frac{\omega^2 G y}{g}$, es folgt daher die Linie

$$CO = \frac{g}{\omega^2} = g\left(\frac{30}{\pi u}\right)^2 = \frac{2850}{u^2},$$

wenn u die Zahl der Umdrehungen pr. Min. bezeichnet. Da dieſer Werth von CO für alle Waſſerelemente einer und derſelbe iſt, ſo folgt, daß die Mittelkräfte aller den Durchſchnitt DEH bildenden Waſſerelemente nach O gerichtet ſind und daß daher der auf die Richtungen dieſer Kräfte rechtwinkelig ſtehende Durchſchnitt ein aus O beſchriebener Kreis iſt. Dieſem zufolge bilden die Waſſerſpiegel in den Zellen eines oberſchlägigen Waſſerrades lauter, einer und derſelben Horizontalaxe entſprechende cylindriſche Flächen.

Bodendruck.

Fig. 414.



§. 298. Der Druck des Waſſers in einem Gefäße $ABCD$, Fig. 414, iſt unmittelbar unter dem Waſſerſpiegel am kleinſten, wird mit der Tiefe immer größer und größer und iſt unmittelbar über dem Boden am größten. Um dies ganz allgemein zu beweiſen, nehmen wir an, daß der Waſſerſpiegel H_0R_0, deſſen Inhalt F_0 ſein möge, von einer Kraft P_0, z. B. durch die darüber ſtehende Atmoſphäre oder durch einen Kolben gleichförmig gedrückt werde, und denken uns die ganze Waſſermaſſe durch viele Horizontalebenen wie H_1R_1, H_2R_3 u. ſ. w. in lauter gleich dicke Waſſerſchichten zerlegt. Iſt F_1 der Inhalt des erſten Querſchnittes H_1R_1, λ die Dicke jeder Waſſerſchicht und γ die Dichtigkeit des Waſſers, ſo hat man das Gewicht der erſten Waſſerſchicht $G_1 = F_1\lambda\gamma$, und denjenigen Theil des Druckes in H_1R_1, welcher aus dem Drucke P_0 des Waſſerſpiegels H_0R_0 entſpringt, nach dem Principe in §. 296, $= \frac{P_0F_1}{F_0}$. Addirt man nun beide Kräfte, ſo erhält man den Druck im Horizontalſchnitte H_1R_1:

$$P_1 = \frac{P_0F_1}{F_0} + F_1\lambda\gamma.$$

Bodendruck

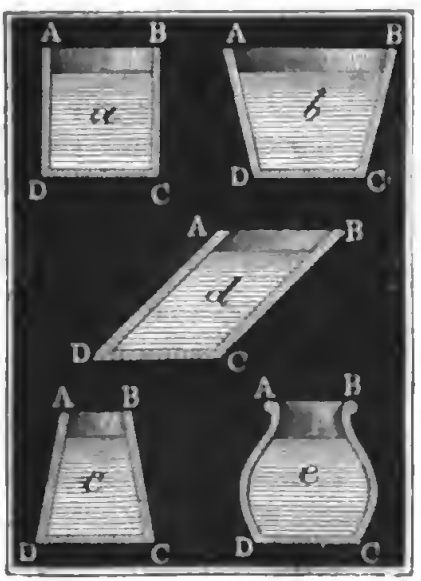
Dividirt man durch F_1, ſo erhält man die Gleichung $\frac{P_1}{F_1} = \frac{P_0}{F_0} + \lambda\gamma$, oder, da $\frac{P_0}{F_0}$ und $\frac{P_1}{F_1}$ die auf die Flächeneinheit bezogenen Drücke p_0 und p_1 in H_0R_0 und H_1R_1 bezeichnen, $p_1 = p_0 + \lambda\gamma$.

Der Druck in dem folgenden Horizontalſchnitte H_2R_2 beſtimmt ſich genau ſo wie der Druck in der Schicht H_1R_1, wenn man berückſichtigt, daß hier der anfängliche Druck auf die Einheit ſchon $p_1 = p_0 + \lambda\gamma$ iſt, während er dort nur p_0 war. Es folgt der Druck in der Horizontalſchicht H_2R_2: $p_2 = p_1 + \lambda\gamma = p_0 + \lambda\gamma + \lambda\gamma = p_0 + 2\lambda\gamma$; ebenſo der Druck in der dritten Schicht $H_3R_3 = p + 3\lambda\gamma$, in der vierten $= p_0 + 4\lambda\gamma$ und in der $n$ten $= p_0 + n\lambda\gamma$. Nun iſt aber $n\lambda$ die Tiefe $G_0G_n = h$ dieſer $n$ten Schicht unter dem Waſſerſpiegel, es läßt ſich daher der Druck auf jede Flächeneinheit in der $n$ten Horizontalſchicht ſetzen: $p = p_0 + h\gamma$.

Man nennt die Tiefe h eines Flächenelementes unter dem Waſſerſpiegel die Druckhöhe (franz. charge d'eau; engl. height of water) deſſelben, und findet hiernach den Druck des Waſſers auf irgend eine Flächeneinheit, wenn man den von außen wirkenden Druck um das Gewicht einer Waſſerſäule vermehrt, deren Baſis dieſe Einheit und deren Höhe die Druckhöhe iſt.

Bei einer horizontalen Fläche, wie z. B. beim Boden CD, iſt die Druckhöhe h an allen Stellen eine und dieſelbe, iſt daher der Inhalt derſelben $= F$, ſo folgt der Druck des Waſſers gegen dieſelbe: $P = (p_0 + h\gamma)F = Fp_0 + Fh\gamma = P_0 + Fh\gamma$, oder wenn man vom äußeren Drucke abſtrahirt: $P = Fh\gamma$. **Der Druck des Waſſers gegen eine horizontale Fläche iſt alſo gleich dem Gewichte der über ihr ſtehenden Waſſerſäule Fh.**

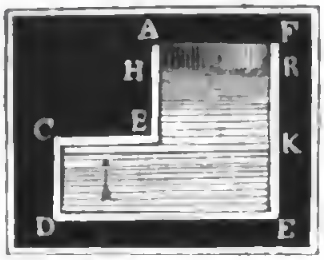
Fig. 415.



Dieſer Druck des Waſſers gegen eine horizontale Fläche, z. B. gegen den horizontalen Boden oder gegen einen horizontalen Theil der Seitenwand, iſt von der Form des Gefäßes unabhängig; ob alſo das Gefäß AC, Fig. 415, prismatiſch wie a, oder oben weiter als unten, wie b, oder unten weiter als oben, wie c, oder ſchief wie d, oder ob es bauchig wie e iſt u. ſ. w., immer bleibt der Druck gegen den Boden gleich dem Gewichte einer Waſſerſäule, deren Baſis der Boden und deren Höhe die Tiefe des Bodens unter dem Waſſerſpiegel iſt. Da ſich der Druck des Waſſers nach

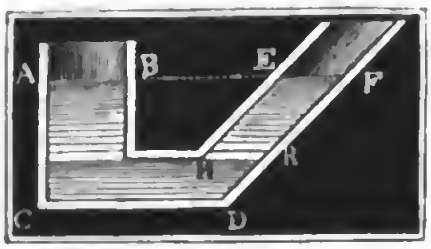
Vorgehende. allen Seiten fortpflanzt, ſo findet dieſes Geſetz auch dann noch ſeine Anwendung, wenn die Fläche, wie z. B. BC in Fig. 416, von unten nach oben gedrückt wird. Jede Flächeneinheit in der an BC anliegenden Waſſerſchicht CK wird durch eine Waſſerſäule von der Höhe $HB = RK = h$ gedrückt, es iſt folglich auch der Druck gegen $CB = Fh\gamma$, wenn F den Inhalt dieſer Fläche bezeichnet.

Fig. 416.



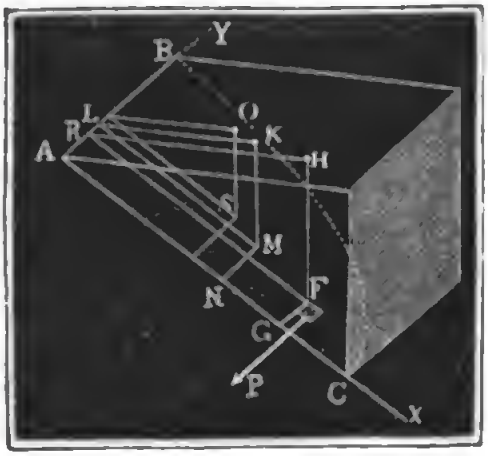
Es folgt auch hieraus noch, daß das Waſſer in communicirenden Röhren ABC und DEF, Fig. 417, im Zuſtande des Gleichgewichtes gleich hoch ſteht, oder daß die Spiegel AB und EF derſelben in eine und dieſelbe Horizontalebene fallen. Zur Erhaltung des Gleichgewichtes iſt es nöthig, daß die Waſſerſchicht HR durch die über ihr ſtehende Waſſerſäule ER ebenſo ſtark nach unten gedrückt wird, als durch die unter ihr befindliche Waſſermaſſe von unten nach oben. Da aber in beiden Fällen die gedrückte Fläche eine und dieſelbe iſt, ſo muß daher auch die Druckhöhe in beiden Fällen eine und dieſelbe ſein, es muß alſo der Waſſerſpiegel AB ebenſo hoch über HR ſtehen als der Waſſerſpiegel EF.

Fig. 417



Seitendruck. §. 299. Das ſoeben gefundene Geſetz von dem Waſſerdrucke gegen eine Horizontalfläche läßt ſich nicht unmittelbar auf eine gegen den Horizont geneigte ebene Fläche anwenden, da bei dieſer die Druckhöhen an verſchiedenen Stellen verſchieden ſind. Der Druck $p = h\gamma$ auf jede Flächeneinheit innerhalb der horizontalen Waſſerſchicht, welche um die Tiefe h unter dem Waſſerſpiegel ſteht, wirkt nach allen Richtungen (§. 296) und folglich auch rechtwinkelig gegen die feſten Seitenwände des Gefäßes, die (nach §. 128) denſelben vollkommen aufnehmen. Iſt nun F_1 der Inhalt eines Elementes von einer Seitenfläche ABC, Fig. 418, und h_1 deſſen Druckhöhe FH, ſo hat man den Normaldruck des Waſſers gegen dasſelbe: $P_1 = F_1 . h_1\gamma$; iſt ebenſo F_2 ein zweites Flächenelement, und h_2 deſſen Druckhöhe, ſo hat man den Normaldruck auf daſſelbe:

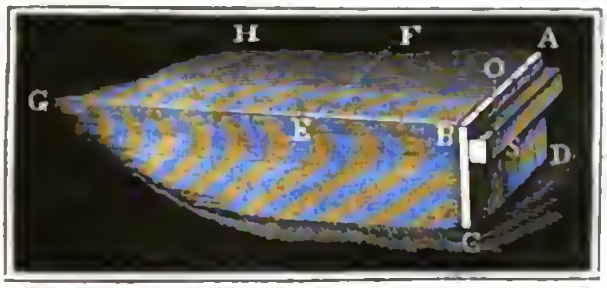
Fig. 418.



$P_2 = F_2 h_2 \gamma$; ebenſo für ein drittes Element $P_3 = F_3 h_3 \gamma$ u. ſ. w. Dieſe Normaldrücke bilden ein Syſtem von Parallelkräften, deren Mittelkraft P die Summe dieſer Drücke, alſo $P = (F_1 h_1 + F_2 h_2 + \ldots) \gamma$ iſt. Nun iſt aber noch $F_1 h_1 + F_2 h_2 + \ldots$, die Summe der ſtatiſchen Momente von F_1, F_2 u. ſ. w. hinſichtlich der Oberfläche OHR des Waſſers, und $= Fh$, wenn F der Inhalt der ganzen Fläche und h die Tiefe SO ihres Schwerpunktes unter dem Waſſerſpiegel bezeichnet, es folgt daher der geſammte Normaldruck gegen die ebene Fläche: $P = Fh\gamma$. Verſteht man hier unter Druckhöhe einer Fläche die Tiefe SO ihres Schwerpunktes S unter dem Waſſerſpiegel, ſo gilt alſo allgemein die Regel: der Druck des Waſſers gegen eine ebene Fläche iſt gleich dem Gewichte einer Waſſerſäule, deren Baſis die Fläche und deren Höhe die Druckhöhe der Fläche iſt. Seitendruck.

Uebrigens iſt noch hervorzuheben, daß dieſer Waſſerdruck nicht von der Waſſermenge, welche über oder vor der gedrückten Fläche ſteht, abhängt, daß alſo z. B. unter übrigens gleichen Umſtänden eine Spundwand AC, Fig. 419, denſelben Druck auszuhalten hat, ſie mag das Waſſer einer ſchmalen Schleuſe $ACEF$, oder das eines größeren Teiches $ACGH$, oder das eines großen See's abdämmen. Aus der Breite $AB = CD = b$ und Höhe $AD = BC = a$ einer rectangulären Spundwand folgt die Fläche derſelben: $F = ab$ und die Druckhöhe $SO = \frac{a}{2}$, daher der Waſſerdruck $P = ab \cdot \frac{a}{2}\gamma = \frac{1}{2}a^2 b\gamma$. Es wächſt alſo der Druck wie die Breite und wie das Quadrat der Höhe der gedrückten Fläche.

Fig. 419.



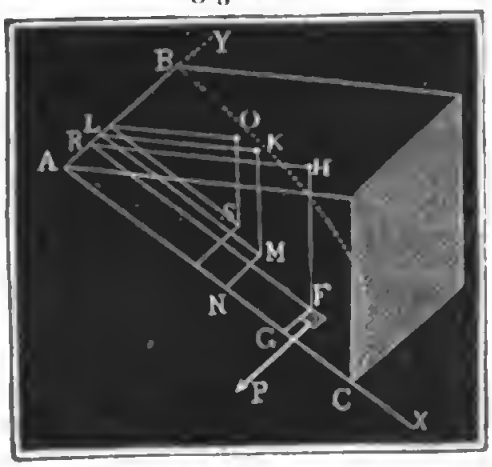
Beiſpiel. Wenn vor einem 4 Fuß breiten, 5 Fuß hohen und $2\frac{1}{2}$ Zoll dicken Schutzbrette aus Eichenholz das Waſſer $3\frac{1}{2}$ Fuß hoch ſteht, wie groß iſt die Kraft zum Aufziehen deſſelben? Das Volumen des Brettes iſt $4 \cdot 5 \cdot \frac{5}{24} = \frac{5}{6}$ Cubikfuß. Nimmt man nun die Dichtigkeit des mit Waſſer geſchwängerten Eichenholzes nach §. 58 zu $66.1{,}11 = 73{,}26$ Pf. an, ſo folgt das Gewicht dieſes Brettes: $G = \frac{5}{6} \cdot 73{,}26 = 25 \cdot 12{,}21 = 305{,}25$ Pf. Der Druck des Waſſers gegen das Schutzbrett und auch der Druck deſſelben gegen ſeine Führung iſt $P = \frac{1}{2} \cdot (\frac{7}{2})^2 \cdot 4 \cdot 66 = 49 \cdot 33 = 1617$ Pf; nimmt man nun den Coefficienten der Reibung für naſſes Holz nach § 161, $\sigma = 0{,}68$ an, ſo folgt

die Reibung dieſes Brettes in ſeiner Leitung $F = \varphi P = 0{,}68 . 1617 = 1099{,}56$ Pf. Addirt man hierzu das Gewicht des Brettes, ſo erhält man die Kraft zum Aufziehen deſſelben $= 1099{,}56 + 305{,}25 = 1404{,}8$ Pf.

Mittelpunkt des Druckes.

§. 300. Die Mittelkraft $P = Fh\gamma$ aus ſämmtlichen Elementarpreſſungen $F_1h_1\gamma$, $F_2h_2\gamma$ u. ſ. w. hat, wie jede andere Mittelkraft eines Syſtemes von Parallelkräften, einen beſtimmten Angriffspunkt, den man den Mittelpunkt des Druckes nennt. Durch Unterſtützung dieſes Punktes wird dem ganzen Waſſerdrucke einer Fläche das Gleichgewicht gehalten. Die ſtatiſchen Momente der Elementarpreſſungen $F_1h_1\gamma$, $F_2h_2\gamma$ u. ſ. w. hinſichtlich der Ebene des Waſſerſpiegels OHR, Fig. 420, ſind $F_1h_1\gamma . h_1 = F_1h_1^2\gamma$, $F_2h_2^2\gamma$ u. ſ. w.; es iſt alſo das ſtatiſche Moment des ganzen Waſſerdruckes in Hinſicht auf dieſe Ebene: $(F_1h_1^2 + F_2h_2^2 + \ldots)\gamma$. Setzt man nun den Abſtand KM des Mittelpunktes M dieſes Druckes vom Waſſerſpiegel $= z$, ſo hat man das Moment des Waſſerdruckes auch $= Pz = (F_1h_1 + F_2h_2 + ..)z\gamma$. und es folgt nun durch Gleichſetzen beider Momente die in Frage ſtehende Tiefe des Mittelpunktes M unter dem Waſſerſpiegel:

Fig. 420.



$$1)\quad z = \frac{F_1h_1^2 + F_2h_2^2 + ..}{F_1h_1 + F_2h_2 + ..} \text{ oder } = \frac{F_1h_1^2 + F_2h_2^2 + ..}{Fh},$$

wenn, wie oben, F den Inhalt der ganzen Fläche und h die Tiefe ihres Schwerpunktes unter dem Waſſerſpiegel bezeichnet. Um dieſen Druckpunkt vollſtändig zu beſtimmen, hat man noch deſſen Abſtand von einer andern Ebene oder Linie anzugeben. Setzt man die Abſtände F_1G_1, F_2G_2 u. ſ. w. der Flächenelemente F_1, F_2 u. ſ. w. von der den Neigungswinkel der Ebene beſtimmenden Fallinie AC, $= y_1$, y_2 u. ſ. w., ſo hat man die Momente der Elementardrücke in Hinſicht auf die Fallinie, $= F_1h_1y_1\gamma$, $F_2h_2y_2\gamma$ u. ſ. w., alſo das Moment der ganzen Fläche $= (F_1h_1y_1 + F_2h_2y_2 + ..)\gamma$; und bezeichnet man den Abſtand MN des Mittelpunktes M von eben dieſer Linie durch v, ſo hat man dieſes Moment auch $= (F_1h_1 + F_2h_2 + ..)v\gamma$; ſetzt man endlich beide Momente gleich, ſo erhält man die zweite Ordinate

$$2)\quad v = \frac{F_1h_1y_1 + F_2h_2y_2 + ..}{F_1h_1 + F_2h_2 + ..} \text{ oder } = \frac{F_1h_1y_1 + F_2h_2y_2 + ..}{Fh}.$$

Mittelpunkt des Druckes.

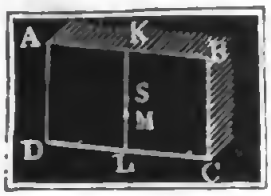
Iſt α der Neigungswinkel der Ebene ABC gegen den Horizont, und ſind x_1, x_2 u. ſ. w. die Entfernungen F_1R_1, F_2R_2 u. ſ. w. der Elemente F_1, F_2 u. ſ. w., ſowie u der Abſtand des Druckmittelpunktes M von der Durchſchnittslinie AB der Ebene mit dem Waſſerſpiegel, ſo hat man $h_1 = x_1 \sin. \alpha$, $h_2 = x_2 \sin. \alpha$ u. ſ. w., ſowie $z = u \sin. \alpha$; und führt man dieſe Werthe in den Ausdrücken für z und v ein, ſo erhält man

$$u = \frac{F_1x_1^2 + F_2x_2^2 + ..}{F_1x_1 + F_2x_2 + ..} = \frac{\text{Trägheitsmomt}}{\text{Stat. Moment}}, \text{ und}$$

$$v = \frac{F_1x_1y_1 + F_2x_2y_2 + ..}{F_1x_1 + F_2x_2 + ..} = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{Stat. Moment}}.$$

Man findet alſo die Abſtände u und v des Druckmittelpunktes von der horizontalen Axe AY und von der durch die Fallinie gebildeten Axe AX, wenn man das ſtatiſche Moment der Fläche in Hinſicht auf die erſte Axe einmal in das Trägheitsmoment derſelben in Hinſicht auf dieſelbe Axe und ein zweites Mal in das Centrifugalmoment derſelben in Hinſicht auf beide Axen dividirt. Auch iſt der erſte Abſtand zugleich die Entfernung des Schwingungspunktes von der Durchſchnittslinie mit dem Waſſerſpiegel (§. 267). Uebrigens iſt leicht zu ermeſſen, daß der Mittelpunkt des Waſſerdruckes mit dem in §. 285 beſtimmten Mittelpunkte des Stoßes vollkommen zuſammenfällt, wenn die Durchſchnittslinie AY der Fläche mit dem Waſſerſpiegel als Drehaxe angeſehen wird.

Fig. 421.



§. 301. Iſt die gedrückte Fläche ein Rechteck AC, Fig. 421, mit horizontaler Grundlinie CD, ſo befindet ſich der Mittelpunkt M des Druckes in der die Grundlinien halbirenden Fallinie LK und ſteht um $^2/_3$ dieſer Linie von der Seite AB im Waſſerſpiegel ab. Reicht dieſes Rechteck nicht bis zum Waſſerſpiegel, wie in Fig. 422, iſt vielmehr der Abſtand KL der unteren Baſis CD vom Waſſerſpiegel, $= l_1$ und der Abſtand der oberen Baſis AB, $= l_2$, ſo hat man den Abſtand KM des Druckmittelpunktes vom Waſſerſpiegel: $u = {}^2/_3 \cdot \frac{l_1^3 - l_2^3}{l_1^2 - l_2^2}$.

Fig. 422.

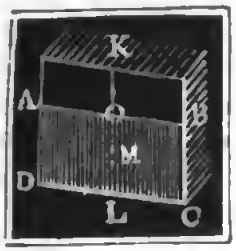
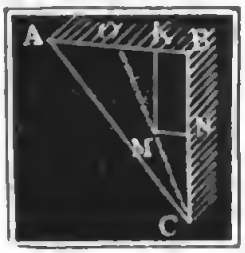


Fig. 423.

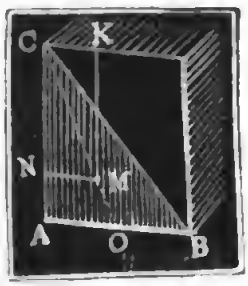


Für ein rechtwinkeliges Dreieck ABC, Fig. 423, deſſen eine Kathete AB im Waſſerſpiegel liegt, iſt der Abſtand KM des Druckmittelpunktes M von AB (§. 197), $u = \frac{{}^1/_6 F.l^2}{{}^1/_3 F.l} = {}^1/_2 l$, wenn l die Höhe BC des Dreieckes bezeichnet, und der Abſtand des-

Mittelpunkt des Druckes.

ſelben Punktes von der andern Kathete, da dieſer Punkt jedenfalls in der das Dreieck halbirenden Linie CO liegt, welche von der Spitze O nach dem Mittelpunkte der Grundlinie geht; $NM = v = \frac{1}{4}b$, wo b die Grundlinie AB bezeichnet.

Fig. 424.

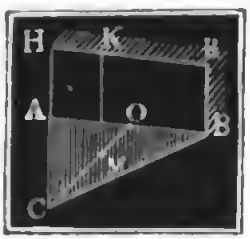


Liegt die Spitze C im Waſſerſpiegel, wie Fig. 424 angiebt, befindet ſich alſo die Kathete AB unter der Spitze, ſo hat man $KM = u = \frac{\frac{1}{2}Fl^2}{\frac{2}{3}Fl} = \frac{3}{4}l$ und

$$NM = v = \frac{3}{4} \cdot \frac{b}{2} = \frac{3}{8}b.$$

Befindet ſich das ganze Dreieck ABC, Fig. 425, unter Waſſer, ſteht die Grundlinie AB um $AH = l_2$ und die Spitze C um $CH = l_1$ vom Waſſerſpiegel HR ab, ſo hat man den Abſtand MK des Druckmittelpunktes M vom Waſſerſpiegel HR:

Fig. 425.



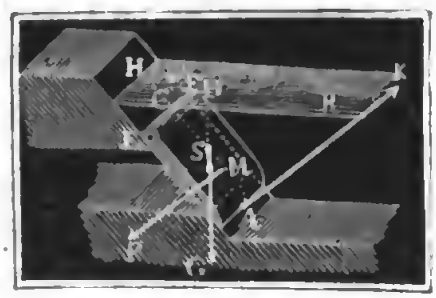
$$u = \frac{\frac{1}{18}F(l_1 - l_2)^2 + F\left(l_2 + \frac{l_1 - l_2}{3}\right)^2}{F\left(l_2 + \frac{l_1 - l_2}{3}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{18}(l_1 - l_2)^2 + \frac{1}{9}(2l_2 + l_1)^2}{\frac{1}{3}(2l_2 + l_1)}$$

$$= \frac{l_1^2 + 2l_1 l_2 + 3l_2^2}{2(l_1 + 2l_2)}.$$

Auf ähnliche Weiſe laſſen ſich die Druckmittelpunkte von anderen ebenen Figuren beſtimmen.

Fig. 426.



Beiſpiel. Welche Kraft K iſt aufzuwenden, um die um eine horizontale Axe EF drehbare Klappe AC, Fig. 426, aufzuziehen? Es ſei die Länge CA dieſer Klappe $= 1\frac{1}{4}$ Fuß, die Breite $EF = 1\frac{1}{2}$ Fuß, das Gewicht derſelben $= 35$ Pf.; ferner der Abſtand CH der Drehare C von dem Waſſerſpiegel HR in der Ebene der Klappe gemeſſen, $= 1$ Fuß und der Neigungswinkel dieſer Ebene gegen den Horizont $= 68°$. Die gedrückte Fläche iſt

$F = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$ Quadratfuß, und die Druckhöhe oder die Tiefe ihres Schwerpunktes unter dem Waſſerſpiegel, $h = HS \sin. \alpha = (HC + CS) \sin. \alpha$

$= (HC + \frac{1}{2}AC) \sin. \alpha = \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4}\right) \sin 68° = \frac{13}{8} \sin. 68° = \frac{13 \cdot 0{,}92718}{8}$

$= 1{,}5067$ Fß.; daher der Druck des Waſſers auf die Fläche: $P = Fhy = \frac{15}{8} \cdot 1{,}5067 \cdot 66$

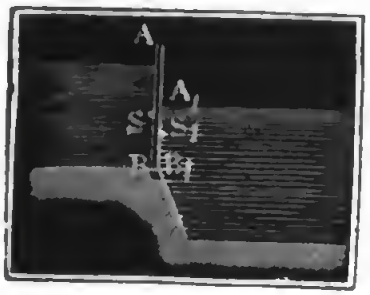
$= 186{,}45$ Pf. Der Hebelarm dieſer Kraft in Hinſicht auf die Drehare C iſt der Abſtand CM des Druckmittelpunktes M von derſelben, alſo $= HM - HC$ Mittelpunkt des Druckes.

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{l_1^3 - l_2^3}{l_1^2 - l_2^2} - l_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\left(\frac{9}{4}\right)^3 - \left(\frac{4}{4}\right)^3}{\left(\frac{9}{4}\right)^2 - \left(\frac{4}{4}\right)^2} - 1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{729 - 64}{81 - 16} - 1$$

$= 0{,}705$ Fuß; daher das ſtatiſche Moment des Waſſerdruckes $= 186{,}45 \,.\, 0{,}705$ $= 131{,}46$ Fßpf. Steht der Schwerpunkt S der Klappe um die halbe Länge CS $= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{8}$ Fuß von der Drehare ab, ſo iſt der Hebelarm des Gewichtes der Drehklappe $= CS \cos. \alpha = \frac{5}{8} \,.\, \cos. 68° = \frac{5}{8} \,.\, 0{,}3746 = 0{,}2341$ Fuß, und daher das ſtatiſche Moment dieſes Gewichtes $= 35 \,.\, 0{,}2341 = 8{,}19$ Fßpf. Durch Addition beider Momente bekommt man das ganze Moment zum Aufziehen der Klappe $= 131{,}46 + 8{,}19 = 139{,}65$ Fßpf., und wirkt nun die Kraft K zum Aufziehen an dem Hebelarme $CA = 1{,}25$ Fuß, ſo folgt ihre Größe

$$\frac{139{,}65}{1{,}25} = 112 \text{ Pf.}$$

Fig. 427.



§. 302. Wird eine ebene Fläche AB, Fig. 427, zu beiden Seiten vom Waſſer gedrückt, ſo reſultirt aus den beiden Seiten entſprechenden Mittelkräften eine neue Mittelkraft, die ſich durch Subtraction der erſteren ergiebt, weil beide einander entgegen wirken.

Iſt F der Inhalt des gedrückten Theiles auf der einen Seite der Fläche AB und h die Tiefe AS ſeines Schwerpunktes unter dem Waſſerſpiegel, ferner F_1 der Inhalt des Theiles $A_1 B_1$ auf der andern Seite der Fläche und h_1 die Tiefe $A_1 S_1$ ſeines Schwerpunktes unter dem entſprechenden Waſſerſpiegel, ſo hat man die geſuchte Mittelkraft $P = Fh\gamma - F_1 h_1 \gamma = (Fh - F_1 h_1)\,\gamma$.

Iſt das Trägheitsmoment des erſten Flächentheiles in Hinſicht auf die Linie, in welcher die Ebene der Fläche den erſten Waſſerſpiegel ſchneidet, $= Fr^2$, ſo hat man das ſtatiſche Moment des Waſſerdruckes von der einen Seite $= Fr^2 \,.\, \gamma$; iſt ferner das Trägheitsmoment des zweiten Flächentheiles in Hinſicht auf die Durchſchnittslinie mit dem zweiten Waſſerſpiegel $= F_1 r_1^2$, ſo hat man ebenſo das ſtatiſche Moment des Waſſerdruckes von der andern Seite in Hinſicht auf die Axe im zweiten Waſſerſpiegel $= F_1 r_1^2 \gamma$. Setzen wir ferner die Entfernung AA_1 der Axen $= a$, ſo erhalten wir die Vergrößerung des letzten Momentes beim Uebergange von der Axe A_1 auf die Axe A, $= F_1 h_1 a\gamma$, und daher das ſtatiſche Moment des Waſſerdruckes $F_1 h_1 \gamma$ in Hinſicht auf die Axe im erſten Waſſerſpiegel

$$= F_1 r_1^2 \gamma + F_1 h_1 \,.\, a \,.\, \gamma = (F_1 r_1^2 + F_1 a h_1)\,\gamma.$$

Mittelpunkt des Druckes.

Hiernach folgt dann das ſtatiſche Moment der Differenz beider Mitteldrücke $= (F r^2 - F_1 r_1^2 - a F_1 h_1)\gamma$, und der Hebelarm dieſer letzten Kraft, oder der Abſtand des Druckmittelpunktes von der Axe im erſten Waſſerſpiegel: $u = \frac{F r^2 - F_1 r_1^2 - a F_1 h_1}{F h - F_1 h_1}$. Sind die gedrückten Flächentheile einander gleich, welcher Fall eintritt, wenn, wie Fig. 428 repräſentirt, die ganze Fläche AB unter Waſſer iſt, ſo hat man einfacher $P = F(h - h_1)\gamma$ und $u = h$, Letzteres, weil $h - h_1 = a$ und $r_1^2 = r^2 - 2ah + a^2$ (§. 231) iſt. In dem letzten Falle iſt alſo der Druck gleich dem Gewichte einer Waſſerſäule, deren Grundfläche die gedrückte Fläche und deren Höhe der Höhenabſtand $R H_1$ beider Waſſerſpiegel iſt, und es fällt der Mittelpunkt des Druckes mit dem Schwerpunkte S der Fläche zuſammen. Dieſes Geſetz iſt auch noch dann richtig, wenn beide Waſſerſpiegel außerdem noch durch gleiche Kräfte, z. B. durch Kolben, oder durch die Atmoſphäre gedrückt werden. Denn iſt dieſer Druck auf jede Flächeneinheit $= p$, und alſo die entſprechende Waſſerſäulenhöhe $k = \frac{p}{\gamma}$ (§. 298), ſo hat man ſtatt h, $h+k$ und ſtatt h_1, h_1+k zu ſetzen, und es läßt die Subtraction die Kraft $P = (h+k-[h_1+k])F\gamma = (h-h_1)F\gamma$ übrig. Aus dieſem Grunde läßt man denn auch in der Regel bei hydroſtatiſchen Unterſuchungen den Atmoſphärendruck außer Acht.

Fig 428.

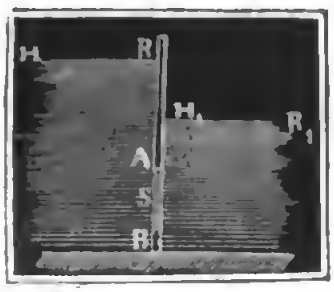
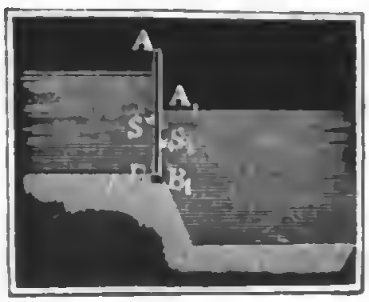


Fig. 429.

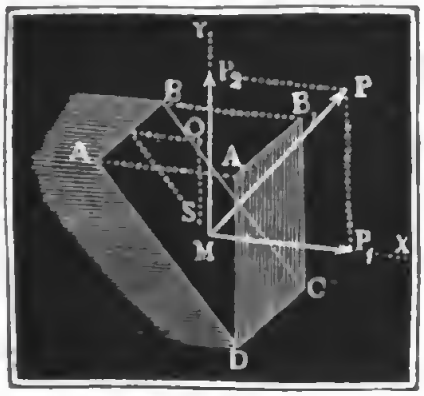


Beiſpiel. Die Höhe AB des Oberwaſſers bei einer Schiffahrtsſchleuſe, Fig. 429, beträgt 7 Fuß, das Waſſer in der Kammer ſteht am Schleuſenthore 4 Fuß hoch, und die Breite des Kanals und der Kammer mißt 7,5 Fuß, welchen Mitteldruck hat das Schleuſenthor auszuhalten? Es iſt $F = 7.7{,}5 = 52{,}5$ und $F_1 = 4.7{,}5 = 30$ Quadratfuß, ferner $h = \frac{1}{2}.7 = \frac{7}{2}$ und $h_1 = \frac{4}{2} = 2$ Fuß, $a = 7 - 4 = 3$ Fuß, $r^2 = \frac{1}{3}.7^2 = \frac{49}{3}$ und $r_1^2 = \frac{1}{3}.4^2 = \frac{16}{3}$, daher folgt der geſuchte Mitteldruck $P = (Fh - F_1 h_1)\gamma = (52{,}5.\frac{7}{2} - 30.2).66 = 123{,}75.66 = 8167{,}5$ Pf., und die Tiefe ſeines Angriffspunktes unter dem Waſſerſpiegel:

$$u = \frac{52{,}5.\frac{49}{3} - 30.\frac{16}{3} - 3.60}{52{,}5.\frac{7}{2} - 60} = \frac{517{,}5}{123{,}75} = 4{,}182 \text{ Fuß}.$$

§. 303. In vielen Fällen iſt es wichtig, nur einen, nach einer beſtimmten Richtung wirkenden Theil des Waſſerdruckes auf eine Fläche zu kennen. Druck nach einer beſtimmten Richtung. Um einen ſolchen Componenten zu finden, zerlegen wir den normalen Waſſerdruck $MP = P$ der Fläche $AC = F$, Fig. 430, nach der gegebenen Richtung MX und nach der Richtung MY winkelrecht darauf in zwei Seitenkräfte $MP_1 = P_1$ und $MP_2 = P_2$. Iſt nun α der Winkel PMX, um welchen die Normalkraft von der gegebenen Richtung MX der Seitenkraft abweicht, ſo erhält man für die Componenten: $P_1 = P \cos.\alpha$ und $P_2 = P \sin.\alpha$. Entwirft man von der Fläche AB in einer winkelrecht auf der gegebenen Richtung MX ſtehenden Ebene eine Projection $A_1 B_1 C D$, ſo hat man für deren Inhalt F_1 die Formel $F_1 = F.\cos. ADA_1$, oder, da der Neigungswinkel ADA_1 der Fläche zu ihrer Projection gleich iſt dem Winkel $PMX = \alpha$ zwiſchen der Normalkraft P und ihrem Componenten P_1, ſo hat man $F_1 = F \cos \alpha$, oder umgekehrt, $\cos.\alpha = \frac{F_1}{F}$ und daher die geſuchte Seitenkraft $P_1 = P . \frac{F_1}{F}$. Da noch der Normaldruck $P = Fh\gamma$ iſt, ſo folgt endlich $P_1 = F_1 h\gamma$, d. h. der Druck, womit das Waſſer auf eine Fläche nach irgend einer Richtung drückt, iſt gleich dem Gewichte einer Waſſerſäule, die zur Baſis die Projection der Fläche winkelrecht zur gegebenen Richtung und zur Höhe die Tiefe des Schwerpunktes der Fläche unter dem Waſſerſpiegel hat.

Fig. 430.

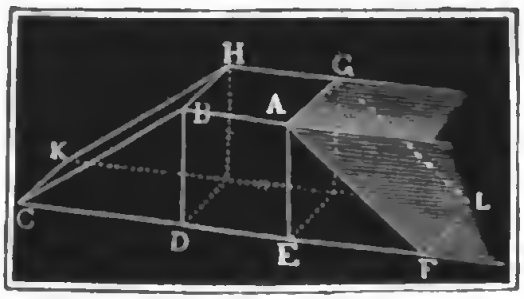


In den meiſten Fällen der Anwendung iſt es wichtig, nur den vertikalen oder einen horizontalen Componenten vom Drucke des Waſſers gegen eine Fläche angeben zu können. Da die Projection winkelrecht zur Vertikalrichtung, die Horizontal- und die Projection winkelrecht zu einer Horizontalrichtung eine Vertikalprojection iſt, ſo findet man den Vertikaldruck des Waſſers gegen eine Fläche, wenn man die Horizontalprojection oder den Grundriß derſelben als gedrückte Fläche, und dagegen den Horizontaldruck des Waſſers nach irgend einer Richtung, wenn man die Vertikalprojection oder den Aufriß der Fläche winkelrecht gegen die gegebene Richtung als gedrückte Fläche behandelt, in beiden Fällen aber die Tiefe des Schwerpunktes der Fläche unter dem Waſſerſpiegel als Druckhöhe anſieht.

Druck nach einer beſtimmten Richtung.

Bei einem prismatiſchen Teichdamm ACH, Fig. 431, iſt hiernach für die Horizontalgewalt des Waſſers das vertikale Längenprofil EG und für die Vertikalkraft die Horizontalprojection EL der Waſſerfläche AL als gedrückte Fläche anzuſehen. Iſt daher die Länge AG des Dammes $= l$, die Höhe $AE = h$ und die vordere Böſchung $EF = a$,

Fig. 431.



ſo hat man die Horizontalkraft des Waſſers $= lh \cdot \frac{h}{2}\gamma = \frac{1}{2}h^2 l\gamma$,

und den Vertikaldruck deſſelben $= al \cdot \frac{h}{2}\gamma = \frac{1}{2}alh\gamma$. Iſt nun noch die obere oder Dammkappenbreite $= b$, die hintere Böſchung $CD = a_1$, und die Dichtigkeit der Dammmaſſe $= \gamma_1$, ſo hat man das Gewicht des Dammes $= \left(b + \frac{a+a_1}{2}\right) hl\gamma_1$, und den ganzen Vertikaldruck des Dammes gegen den horizontalen Boden

$$= \tfrac{1}{2}alh\gamma + \left(b + \frac{a+a_1}{2}\right)hl\gamma_1 = \left[\tfrac{1}{2}a\gamma + \left(b + \frac{a+a_1}{2}\right)\gamma_1\right]hl.$$

Setzt man den Reibungscoefficienten $= \varphi$, ſo folgt die Reibung oder Kraft zum Fortſchieben des Dammes, $F = \left[\tfrac{1}{2}a\gamma + \left(b + \frac{a+a_1}{2}\right)\gamma_1\right]\varphi hl$.

In dem Falle, wenn der Horizontaldruck des Waſſers dieſes Fortſchieben bewirken ſoll, hat man $\frac{1}{2}h^2 l\gamma = \left[\frac{1}{2}\gamma a + \left(b + \frac{a+a_1}{2}\right)\gamma_1\right].\varphi hl$,

oder einfacher $h = \varphi\left(a + (2b + a + a_1)\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)$.

Damit alſo der Damm vom Waſſer nicht fortgeſchoben werde, muß ſein

$$h < \varphi\left(a + (2b + a + a_1)\frac{\gamma_1}{\gamma}\right) \text{ oder}$$

$$b > \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{h}{\varphi} - a\right)\frac{\gamma}{\gamma_1} - (a + a_1)\right].$$

Der Sicherheit wegen nimmt man wohl an, daß der Grund des Dammes ganz durchwaſchen ſei, weshalb noch ein Gegendruck von unten nach oben $= (b + a + a_1)lh\gamma$ in Abzug zu bringen und

$$h < \varphi\left[(2b + a + a_1)\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1\right) - a_1\right] \text{ zu ſetzen iſt.}$$

Beiſpiel. Die Dichtigkeit der Lehmdammmaſſe iſt nahe doppelt ſo groß, als die des Waſſers, alſo $\frac{\gamma_1}{\gamma} = 2$ und $\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1 = 1$; es läßt ſich daher für einen ſolchen Damm einfach $h < \varphi(2b+a)$ ſetzen. Erfahrungen zufolge widerſteht ein Damm hinlänglich, wenn ſeine Höhe, Böſchung und Kappenbreite einander gleich ſind; ſetzt man hiernach in der letzten Formel $h = b = a$, ſo ergiebt ſich $\varphi = 1/3$, weshalb man in anderen Fällen

$$h = 1/3 \left[(2b+a+a_1)\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1\right) - a_1\right],$$

und insbeſondere bei Lehmdämmen

$h = 1/3 (2b+a)$, und umgekehrt, $b = \frac{3h-a}{2}$ zu ſetzen hat.

Iſt die Dammhöhe 20 Fuß und der Böſchungswinkel $\alpha = 36°$, ſo hat man die Böſchung $a = h \cot g.\, \alpha = 20 . \cot g. 36° = 20 . 1{,}3764 = 27{,}53$ Fuß und daher die obere Damm- oder Kappenbreite $b = \frac{60 - 27{,}53}{2} = 16{,}24$ Fuß.

§. 304. Das im letzten Paragraphen gefundene Geſetz über den Druck des Waſſers nach einer beſtimmten Richtung gilt nur für ebene Flächen und für die einzelnen Elemente krummer Flächen, nicht aber für krumme Flächen überhaupt. Die Normaldrücke auf die einzelnen Elemente einer krummen Fläche laſſen ſich in Seitenkräfte parallel zu einer gegebenen Richtung und in andere, in Normalebenen hierzu wirkend, zerlegen. Jene Seitendrücke bilden ein Syſtem von Parallelkräften, deren Mittelkraft den Druck in der gegebenen Richtung angiebt, und dieſe Seitenkräfte laſſen ſich ebenfalls auf eine Mittelkraft zurückführen, beide Mittelkräfte geſtatten aber keine weitere Vereinigung, wenn ihre Richtungen nicht zum Durchſchnitte gelangen (§. 92). Im Allgemeinen iſt es nicht möglich, die ſämmtlichen Waſſerdrücke gegen die Elemente einer krummen Fläche auf eine einzige Kraft zurückzuführen, doch kommen einzelne Fälle vor, wo dieſe Vereinigung möglich iſt. Druck auf krumme Flächen.

Sind G_1, G_2, G_3, u. ſ. w. die Projectionen und h_1, h_2, h_3, u. ſ. w. die Druckhöhen von den Elementen F_1, F_2, F_3 u. ſ. w. einer krummen Fläche, ſo hat man den Druck des Waſſers nach der Richtung winkelrecht zur Projectionsebene: $P = (G_1 h_1 + G_2 h_2 + G_3 h_3 + \ldots)\gamma$, und das Moment deſſelben in Hinſicht auf die Ebene des Waſſerſpiegels: $Pu = (G_1 h_1^2 + G_2 h_2^2 + G_3 h_3^2 + \ldots)\gamma$.

Kann man die gedrückte krumme Fläche in Elemente zerlegen, die zu ihren Projectionen ein unveränderliches Verhältniß haben, läßt ſich alſo

$$\frac{F_1}{G_1} = \frac{F_2}{G_2} = \frac{F_3}{G_3} \text{ u. ſ. w.} = n \text{ ſetzen, ſo hat man}$$

$$P = \left(\frac{F_1 h_1}{n} + \frac{F_2 h_2}{n} + \ldots\right)\gamma = \left(\frac{F_1 h_1 + F_2 h_2 + \ldots}{n}\right)\gamma,$$

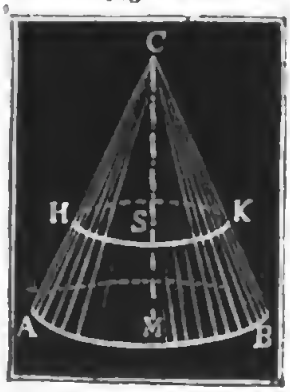
oder, da dann auch das Verhältniß der ganzen krummen Fläche F zu ihrer

Digitized by Google

Druck auf krumme Flächen.

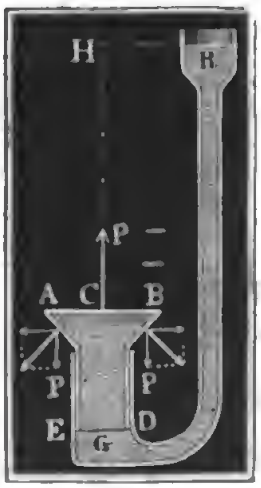
Projection G, d. i. $\frac{F}{G} = n$ iſt, $P = \frac{Fh}{n}\gamma = Ghγ$; in dieſem Falle hat man, wie bei jeder ebenen Fläche, den Druck nach einer Richtung gleich dem Gewichte eines Waſſerprisma's, deſſen Grundfläche der Projection der krummen Fläche winkelrecht gegen die gegebene Richtung und deſſen Höhe der Tiefe des Schwerpunktes der krummen Fläche unter dem Waſſerſpiegel gleich iſt.

Fig. 432.



So iſt z. B. der Vertikaldruck des Waſſers gegen den Mantel eines mit Waſſer gefüllten kegelförmigen Gefäßes ACB, Fig. 432, gleich dem Gewichte einer Waſſerſäule, welche die Bodenfläche zur Baſis und zwei Drittel der Axenlänge CM zur Höhe hat, weil ſich die von der Bodenfläche gebildete Horizontalprojection des geraden Kegelmantels ebenſo wie der Mantel in lauter gleiche triangulare Elemente zerlegen läßt, und weil der Schwerpunkt S des Kegelmantels zwei Drittel der Höhe des Kegels von der Spitze abſteht (§. 110). Iſt r der Halbmeſſer der Baſis und h die Höhe des Kegels, ſo hat man den Druck gegen den Boden $= \pi r^2 h\gamma$ und den Vertikaldruck gegen den Mantel $= \frac{2}{3}\pi r^2 h\gamma$; da aber der Boden mit der Seitenwand feſt verbunden iſt, und beide Drücke einander entgegen wirken, ſo folgt die Kraft, mit welcher das Gefäß durch das Waſſer abwärts gedrückt wird, $= (1-\frac{2}{3})\pi r^2 h\gamma = \frac{1}{3}\pi r^2 h\gamma$ = dem Gewichte der ganzen Waſſermaſſe. Hätte man den Boden durch einen feinen Schnitt vom Mantel getrennt, ſo würde derſelbe mit ſeiner vollen Kraft $\pi r^2 h\gamma$ nach unten, oder auf ſeine Unterlage drücken, dagegen wäre aber auch noch der Mantel mit einer Kraft $\frac{2}{3}\pi r^2 h\gamma$ niederzuhalten, um das Abheben deſſelben zu verhindern.

Fig. 433.



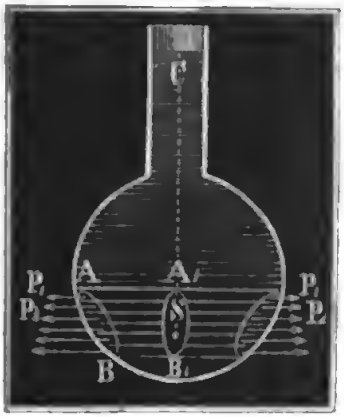
Anmerkung. Es iſt hiernach die Kraft, welche der Dampf einer Dampfmaſchine oder das Waſſer einer Waſſerſäulenmaſchine auf den Kolben ausübt, unabhängig von der Form des Kolbens. Wie auch die Druckfläche durch Aushöhlung oder Abrundung vergrößert ſein möge, immer bleibt der Druck, mit welchem der Dampf oder das Waſſer den Kolben fortſchiebt, gleich dem Producte aus dem Querſchnitte oder der Horizontalprojection des Kolbens und aus dem Drucke auf die Flächeneinheit. Bei dem trichterförmigen Kolben AB, Fig 433, deſſen größerer Halbmeſſer $CA = CB = r$ und kleinerer Halbmeſſer $GD = GE = r_1$ iſt, iſt der Druck auf die Grundfläche $= \pi r^2 p$ und die Reaction auf den Mantel

$= \pi (r^2 - r_1^2) p$; daher der übrigbleibende wirkſame Druck

$P = \pi r^2 p - \pi (r^2 - r_1^2) p = \pi r_1^2 p$

= Querſchnitt des Cylinders mal Druck auf die Flächeneinheit.

Fig. 434.



§. 305. Wie auch eine krumme Fläche AB, Fig 434, geformt ſein möge, immer iſt der Horizontaldruck des Waſſers gegen dieſelbe gleich dem Gewichte einer Waſſerſäule, welche zur Baſis die Vertikalprojection $A_1 B_1$ der Fläche winkelrecht gegen die gegebene Druckrichtung und zur Druckhöhe die Tiefe CS des Schwerpunktes S der Projection unter dem Waſſerſpiegel hat. Die Richtigkeit dieſer Behauptung folgt aus der Formel $P = (G_1 h_1 + G_2 h_2 + \ldots)\gamma$ ſogleich, wenn man berückſichtigt, daß die Druckhöhen h_1, h_2 u. ſ. w. der Flächenelemente auch zugleich die Druckhöhen ihrer Projectionen ſind, daß alſo $G_1 h_1 + G_2 h_2 + \ldots$ das ſtatiſche Moment der ganzen Projection, d. i. das Product Gh aus der Vertikalprojection G und der Tiefe h ihres Schwerpunktes unter dem Waſſerſpiegel iſt. Mat hat alſo hier wieder $P = Gh\gamma$ zu ſetzen, aber nicht außer Acht zu laſſen, daß h die Druckhöhe der Vertikalprojection iſt. Horizontal- und Vertikaldruck.

Der Vertikalſchnitt, wodurch man ein Gefäß mit dem darin befindlichen Waſſer in zwei gleiche oder ungleiche Theile theilt, iſt zugleich die Vertikalprojection von beiden Theilen, der Horizontaldruck auf einen Theil der Gefäßwand iſt aber dem Producte aus der Vertikalprojection deſſelben und der Tiefe ihres Schwerpunktes unter dem Waſſerſpiegel proportional; es iſt folglich auch der Horizontaldruck des Waſſers auf einen Theil der Gefäßwand genau ſo groß, als der entgegengeſetzt wirkende Horizontaldruck auf den gegenüber liegenden Theil derſelben, und es heben ſich folglich beide Kräfte im Gefäße auf. Das ganze Gefäß wird alſo von dem eingeſchloſſenen Waſſer nach allen horizontalen Richtungen gleich ſtark gepreßt.

Fig. 435.

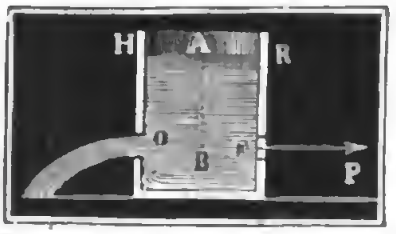
Der Vertikaldruck $P_1 = G_1 h_1 \gamma$ des Waſſers gegen ein Element F_1, Fig. 435, der Gefäßwand iſt, da die Horizontalprojection G_1 des Elementes als Querſchnitt und die Druckhöhe h_1 als Höhe und alſo $G_1 h_1$ als das Volumen eines Prisma's angeſehen werden kann, gleich dem Gewichte einer über dem Elemente ſtehenden und bis zum Waſſerſpiegel reichenden Waſ-

Horizontal- und Vertikaldruck.

ſerſäule HF_1. Die einen endlichen Theil AB des Bodens oder der Gefäßwand ausmachenden Flächenelemente erleiden daher auch einen Vertikaldruck, welcher dem Gewichte ſämmtlicher darüberſtehenden Waſſerſäulen, d. i. dem Gewichte der über dem ganzen Stücke ſtehenden Waſſerſäule gleich iſt. Setzen wir dieſes Volumen V_1, ſo erhalten wir hiernach für den vertikalen Waſſerdruck $P = V_1\gamma$. Für einen andern Theil A_1B_1 der Gefäßwand, welcher ſenkrecht über dem vorigen liegt, hat man den entgegengeſetzten Vertikaldruck $Q = V_2\gamma$; ſind aber beide Theile feſt mit einander verbunden, ſo reſultirt aus beiden Kräften die vertikal abwärts wirkende Kraft $R = (V_1 - V_2)\gamma = V\gamma =$ dem Gewichte der zwiſchen beiden Flächentheilen enthaltenen Waſſerſäule. Wendet man endlich dieſes Geſetz auf das ganze Gefäß an, ſo folgt, daß der geſammte Vertikaldruck des Waſſers gegen das Gefäß gleich iſt dem Gewichte der eingeſchloſſenen Waſſermaſſe.

Anmerkung. Macht man eine Oeffnung O in die Seitenwand eines Gefäßes HBR, Fig. 436, ſo fällt der Theil des Druckes, welcher dem Querſchnitte dieſer Oeffnung entſpricht, weg, und es bleibt daher der Druck auf das gegenüber liegende Flächenſtück F übrig. Während alſo das Waſſer durch eine Seitenöffnung ausfließt, findet eine gleichmäßige Vertheilung des Horizontaldruckes am ganzen Umfange nicht mehr ſtatt. In Folge der Reaction des ausfließenden Waſſers ſteigert ſich dieſer Druck P von $Fh\gamma$ auf $2Fh\gamma$, wie in der Folge gezeigt werden wird.

Fig. 436.

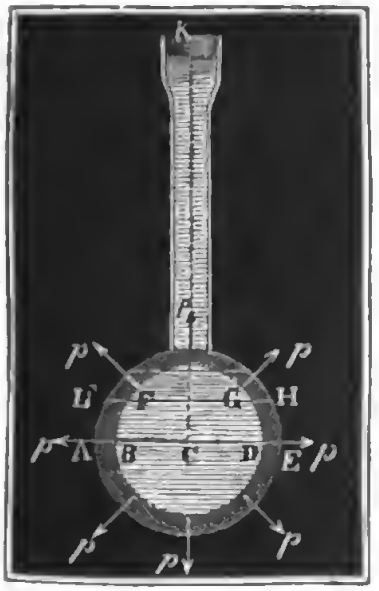


Röhrenſtärke.

§. 306. Von beſonderer Wichtigkeit iſt die Anwendung der Lehre vom Waſſerdrucke auf Röhren, Keſſel u. ſ. w. Damit dieſe Gefäße dem Waſſerdrucke hinreichend widerſtehen und durch denſelben nicht zerſprengt werden, hat man ihnen eine gewiſſe, der Druckhöhe und der inneren Weite entſprechende Wandſtärke zu geben. Das Zerſprengen einer Röhre kann auf mancherlei Weiſe vor ſich gehen, namentlich in Quer- oder in Längenriſſen. Die letzteren entſtehen aber leichter als die erſteren, wie aus Folgendem erhellen wird.

Iſt die Röhrenweite $BD = 2r$, Fig. 437 (ſ. folg. S.), und die Druckhöhe $CK = h$, alſo der Druck auf die Flächeneinheit $p = h\gamma$, ſo hat man den Geſammtdruck in der Axenrichtung der Röhre $= \pi r^2 p = \pi r^2 h\gamma$; iſt nun noch die Wanddicke $AB = DE = e$, ſo hat man den Querſchnitt der Röhrenmaſſe $= \pi(r + e)^2 - \pi r^2 = 2\pi re + \pi e^2$

Fig. 437.



$= 2\pi re\left(1+\frac{e}{2r}\right)$, und ſetzt man endlich den Feſtigkeitsmodul $= K$, ſo hat man die Kraft zum Zerreißen über den ganzen Röhrenquerſchnitt $= 2\pi re\left(1+\frac{e}{2r}\right)K$, weshalb nun zu ſetzen iſt: $2\pi re\left(1+\frac{e}{2r}\right)K = \pi r^2 p$, oder annähernd und einfacher $2eK = rp$, und daher die Röhrenſtärke $e = \frac{rp}{2K} = \frac{ph\gamma}{2K}$. Um alſo keinen Querriß in der Röhre oder im Keſſel zu erhalten, iſt die Wandſtärke deſſelben $e > \frac{rp}{2K}$ zu machen. Röhrenſtärke.

Unter allen Längenriſſen AE, LH u. ſ. w. entſtehen die diametral gehenden, wie AE, am leichteſten, weil dieſelben den kleinſten Inhalt haben; es iſt daher auch nur auf dieſe Rückſicht zu nehmen. Ziehen wir nun ein Röhrenſtück von der Länge l in Betracht, und nehmen wir ebenſo nur auf die Entſtehung eines Riſſes von der Länge l Rückſicht, ſo erhalten wir den Querſchnitt einer Trennungsfläche $= le$, und daher die Kraft zum Zerreißen in dieſer Fläche leK. Für zwei gegenüberliegende Riſſe iſt dieſe Kraft $= 2leK$, während der Waſſerdruck für jede Röhrenhälfte dem Querſchnitte $2rl$ proportional, und daher $= 2rlp$ ausfällt. Durch Gleichſetzen beider Ausdrücke folgt nun $2leK = 2rlp$, d. i. $eK = rp$, alſo die Dicke: $e = \frac{rp}{K}$. Wegen der Entſtehung von Längenriſſen iſt hiernach die Wandſtärke noch einmal ſo groß zu machen, als wegen der Entſtehung von einem Querriſſe.

Aus der gefundenen Formel $e = \frac{rp}{K} = \frac{rh\gamma}{K}$ folgt, daß ſich die Stärken gleichartiger Röhren wie die Weiten und wie die Druckhöhen oder Drücke auf die Flächeneinheit verhalten. Eine Röhre, welche dreimal ſo weit iſt, als eine andere, und einen fünfmal ſo großen Druck auf jede Flächeneinheit auszuhalten hat, als dieſe, muß eine fünfzehnmal ſo ſtarke Wand erhalten.

Hohlen Kugeln, welche von innen einen Druck p auf jede Flächeneinheit auszuhalten haben, hat man die Stärke $e = \frac{rp}{2K}$ zu geben, weil hier die Projection der Druckfläche der größte Kreis πr^2, und die Trennungsfläche der Ring $2\pi re\left(1+\frac{e}{2r}\right)$, oder annähernd, bei kleinerer Dicke, $= 2\pi re$ iſt.

Röhrenſtärke. Die gefundenen Formeln geben für $p = o$ auch $e = o$, deshalb müßten alſo Röhren, welche keinen innern Druck auszuhalten haben, unendlich dünn gemacht werden; da aber jede Röhre ſchon wegen ihres eigenen Gewichtes einen gewiſſen Druck aushalten muß, ſo hat man noch eine gewiſſe Dicke e_1 hinzuzufügen, um die Stärke einer unter allen Umſtänden widerſtehenden Röhre zu erhalten. Es iſt ſolchemnach für cylindriſche Röhren oder Keſſel zu ſetzen: $e = e_1 + \frac{rh\gamma}{K}$, oder einfacher, wenn d die ganze innere Röhrenweite, n den Druck in Atmoſphären, jede einer 33 Fuß hohen Waſſerſäule entſprechend, und μ eine Erfahrungszahl bezeichnet, $e = e_1 + \mu n d$.

Gemachten Erfahrungen zu Folge iſt anzunehmen für Röhren von

Eiſenblech	$e =$	0,00086 nd	+ 0,12	Zoll.
Gußeiſen	$e =$	0,00238 nd	+ 0,33	»
Kupfer	$e =$	0,00148 nd	+ 0,16	»
Blei	$e =$	0,00242 nd	+ 0,20	»
Zink	$e =$	0,00507 nd	+ 0,16	»
Holz	$e =$	0,0323 nd	+ 1,04	»
natürlichen Steinen	$e =$	0,0369 nd	+ 1,15	»
künſtlichen Steinen	$e =$	0,0538 nd	+ 1,53	»

Beiſpiel. Wenn eine Waſſerſäulenmaſchine ſenkrecht ſtehende, im Innern 10 Zoll weite Einfallröhren aus Gußeiſen hat, wie ſtark müſſen dieſelben bei 100, 200 und 300 Fuß Tiefe ſein? Nach der Formel iſt bei 100 Fuß Druck dieſe Stärke $= 0{,}00238 . {}^{100}/_{33} . 10 + 0.33 = 0{,}07 + 0{,}33 = 0{,}40$ Zoll; bei 200 Fuß $= 0{,}14 + 0{,}33 = 0{,}47$ Zoll, und bei 300 Fuß Druck $= 0{,}22 + 0{,}33 = 0{,}55$ Zoll. Gewöhnlich prüft man gußeiſerne Leitungsröhren auf 10 Atmoſphären, weshalb hiernach $e = 0{,}0238 . d + 0{,}33$ Zoll, alſo für Röhren von 10 Zoll Weite die Stärke $e = 0{,}24 + 0{,}33 = 0{,}57$ Zoll anzuwenden iſt.

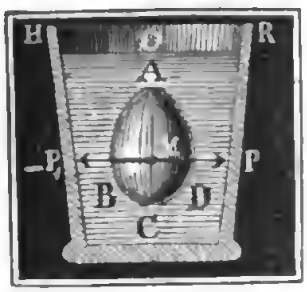
Anmerkungen. Von den Stärken der Dampfkeſſelwände wird im zweiten Theile gehandelt. Ueber die Theorie der Röhrenſtärke iſt eine Abhandlung von Herrn Brix in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen, Jahrgang 1834, nachzuleſen. Von den techniſchen Verhältniſſen und von den Prüfungen der Röhren wird gehandelt in Hagen's Handbuch der Waſſerbaukunſt, Theil I, und in Genieys Essai sur les moyens de conduire etc. les eaux.

Zweites Kapitel.

Vom Gleichgewichte des Waſſers mit anderen Körpern.

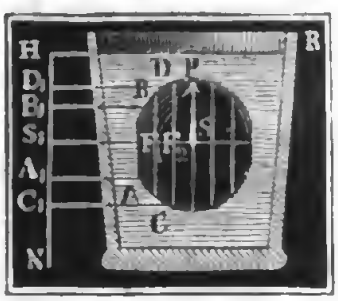
§. 307. Ein unter das Waſſer getauchter Körper wird durch das Waſſer von allen Seiten her gedrückt, und es entſteht nun die Frage nach der Größe, Richtung und dem Angriffspunkte der Mittelkraft aus allen dieſen Preſſungen. Denken wir uns dieſe Mittelkraft aus einem vertikalen und zwei horizontalen Componenten beſtehend, und beſtimmen wir dieſe Kräfte nach den Regeln des §. 305. Der Horizontaldruck des Waſſers gegen eine Fläche iſt gleich dem Horizontaldrucke gegen ihre Vertikalprojection, nun iſt aber jede Projection eines Körpers *AC*, Fig. 438, Projection vom Hintertheil *ADC* und Vordertheil *ABC* ſeiner Oberfläche zugleich, es iſt daher auch der horizontale Waſſerdruck *P* gegen den Hintertheil der Oberfläche eines Körpers ebenſo groß als gegen den Vordertheil, und, da beide Drücke genau entgegengeſetzt wirken, die Mittelkraft derſelben gleich Null. Da dieſes Verhältniß bei jeder beliebigen Horizontalrichtung und dieſer entſprechenden Vertikalprojection ſtattfindet, ſo folgt, daß die Reſultirende aus allen Horizontalpreſſungen Null iſt, daß alſo der unter dem Waſſer befindliche Körper *AC* nach allen horizontalen Richtungen gleich ſtark gedrückt wird und deshalb kein Beſtreben hat, ſich in einer Horizontalrichtung fortzubewegen. Aufgabe.

Fig. 438.



Um den Vertikaldruck des Waſſers gegen den Körper *BCS*, Fig. 439, zu finden, denken wir uns denſelben in vertikale Elementarprismen *AB*, *CD* u. ſ. w. zerlegt, und beſtimmen die Vertikaldrücke auf die Endflächen *A* und *B*, *C* und *D* derſelben. Sind die Längen dieſer Säulen l_1, l_2 u. ſ. w., die Tiefen ihrer oberen Enden *B*, *D* u. ſ. w. unter dem Waſſerſpiegel *HR*: h_1, h_2 u. ſ. w. und die horizontalen Querſchnitte F_1, F_2 u. ſ. w., ſo hat man die von oben nach unten wirkenden Vertikaldrücke gegen die Enden *B*, *D* u. ſ. w. $= F_1 h_1 \gamma$, $F_2 h_2 \gamma$ u. ſ. w., und dagegen die von unten nach oben und gegen die Enden *A*, *C* u. ſ. w. wirkenden Drücke $= F_1 (h_1 + l_1) \gamma$, $F_2 (h_2 + l_2) \gamma$ u. ſ. w.;

Fig. 439.



Auftrieb. und es folgt nun durch Vereinigung dieſer Parallelkräfte die Mittelkraft $P = F_1 (h_1 + l_1) \gamma + F_2 (h_2 + l_2) \gamma + \ldots - F_1 h_1 \gamma - F_2 h_2 \gamma - \ldots = (F_1 l_1 + F_2 l_2 + \ldots) \gamma = V\gamma$, wenn V das Volumen des eingetauchten Körpers oder des verdrängten Waſſers bezeichnet.

Hiernach iſt alſo der Auftrieb, oder die Kraft, mit welcher das Waſſer einen in ihm eingetauchten Körper von unten nach oben emporzutreiben ſucht, gleich dem Gewichte des verdrängten Waſſers oder einer Waſſermenge, welche mit dem untergetauchten Körper einerlei Volumen hat.

Um endlich noch den Angriffspunkt dieſer Mittelkraft zu finden, ſetzen wir die Abſtände AA_1, CC_1 u. ſ. w. der Elementarſäulen AB, CD u. ſ. w. von einer Vertikalebene HN: a_1, a_2 u. ſ. w. und beſtimmen die Momente der Kräfte in Hinſicht auf dieſe Ebene. Iſt nun S der Angriffspunkt des Auftriebes und $SS_1 = x$ ſein Abſtand von jener Grundebene, ſo hat man

$$V\gamma \,.\, x = F_1 l_1 \gamma \,.\, a_1 + F_2 l_2 \gamma \,.\, a_2 + \ldots,$$ und daher

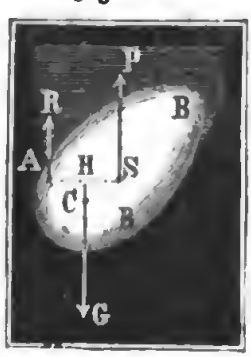
$$x = \frac{F_1 l_1 a_1 + F_2 l_2 a_2 + \ldots}{F_1 l_1 + F_2 l_2 + \ldots} = \frac{V_1 a_1 + V_2 a_2 + \ldots}{V_1 + V_2 + \ldots},$$ wenn

V_1, V_2 u. ſ. w. die Inhalte der ſäulenförmigen Elemente bezeichnen. Da ſich (nach §. 100.) der Schwerpunkt des Körpers genau nach derſelben Formel beſtimmt, ſo folgt, daß der Angriffspunkt S des Auftriebes mit dem Schwerpunkte des verdrängten Waſſers zuſammenfällt.

§. 308. Zu dem Auftriebe eines in oder unter Waſſer getauchten Körpers geſellt ſich noch das in entgegengeſetzter Richtung wirkende Gewicht G des Körpers, und es ergiebt ſich nun aus beiden eine Mittelkraft $R = G - V\gamma$ oder $= (\varepsilon - 1) V\gamma$, wenn ε das ſpecifiſche Gewicht des Körpers bezeichnet.

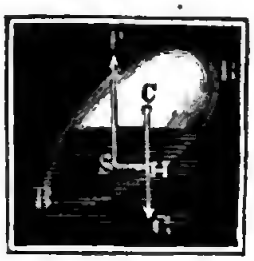
Iſt die Körpermaſſe homogen, ſo fällt der Schwerpunkt des verdrängten Waſſers mit dem des Körpers zuſammen, und es iſt daher dieſer Punkt zugleich der Angriffspunkt von der Mittelkraft R; findet aber eine Homogenität nicht ſtatt, ſo fallen dieſe Schwerpunkte nicht zuſammen und es weicht deshalb auch der Angriffspunkt der Mittelkraft R von beiden Schwerpunkten ab. Setzen wir den Horizontalabſtand SH, Fig. 440, beider Schwerpunkte von einander $= b$ und den Horizontalabſtand SA des geſuchten Angriffspunktes A von dem Schwerpunkte S des verdrängten Waſſers $= a$, ſo haben wir die Gleichung $Gb = Ra$, woraus ſich $a = \frac{Gb}{R} = \frac{Gb}{G - P}$ ergiebt.

Fig 440.



Wird der eingetauchte Körper ſeiner eigenen Schwere überlaſſen, ſo können folgende drei Fälle eintreten. Entweder iſt das ſpecifiſche Gewicht des Körpers gleich dem des Waſſers, oder es iſt größer, oder es iſt kleiner als das ſpecifiſche Gewicht des Waſſers. Im erſten Falle iſt der Auftrieb gleich dem Gewichte, im zweiten iſt er kleiner und im dritten iſt er größer als das Gewicht des Körpers. Während im erſten Falle Gleichgewicht zwiſchen dem Gewichte und dem Auftriebe eintritt, muß der Körper im zweiten Falle mit der Kraft $G - V\gamma = (\varepsilon - 1)\, V\gamma$ ſinken und im dritten Falle mit der Kraft $V\gamma - G = (1 - \varepsilon)\, V\gamma$ ſteigen. Das Steigen hat aber nur ſo lange ſeinen Fortgang, bis die von der Ebene des Waſſerſpiegels abgeſchnittene und von dem Körper verdrängte Waſſermaſſe V_1 mit dem ganzen Körper einerlei Gewicht hat. Das Gewicht $G = V\varepsilon\gamma$ des Körpers BB_1, Fig. 441, und der Auftrieb $P = V_1\gamma$ bilden nun ein Kräftepaar, durch welches der Körper noch ſo weit umgedreht wird, bis die Richtungen beider zuſammenfallen, oder bis der Schwerpunkt des Körpers mit dem Schwerpunkte des verdrängten Waſſers in eine und dieſelbe Vertikallinie fällt. Auftrieb.

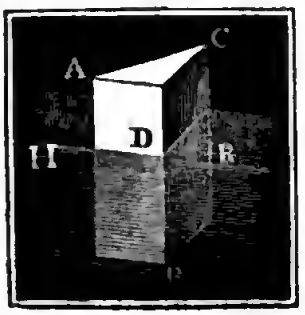
Fig. 441.



Man nennt die Linie durch den Schwerpunkt des ſchwimmenden Körpers und durch den des verdrängten Waſſers die Schwimmaxe (franz. axe de flottaison; engl. axis of floating) und dagegen den durch die Ebene des Waſſerſpiegels gebildeten Schnitt des Körpers die Schwimmebene (franz. plan de fl.; engl. plan of fl.). Jede Ebene, welche einen Körper ſo theilt, daß ſich der eine Theil zum Ganzen wie das ſpecifiſche Gewicht des Körpers zu dem der Flüſſigkeit verhält, und daß die Schwerpunkte beider Theile in einer Normallinie zu dieſer Ebene liegen, kann Schwimmebene des Körpers ſein.

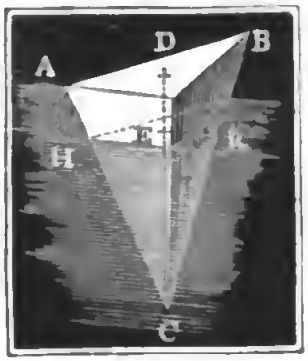
§. 309. Kennt man die Geſtalt und das Gewicht eines ſchwimmenden Körpers, ſo läßt ſich mit Hülfe der vorſtehenden Regel die Tiefe des Eintauchens im Voraus berechnen. Iſt G das Gewicht des Körpers, ſo ſetze man das Volumen des verdrängten Waſſers: $V = \frac{G}{\gamma}$; verbindet man hiermit die ſtereometriſche Formel für das Volumen V, ſo bekommt man die geſuchte Beſtimmungsgleichung. Für ein Prisma ABC, Fig. 442, mit vertikaler Axe iſt z. B. $V = Fy$, wenn F der Querſchnitt und y die Tiefe BD des Eintauchens bezeichnet, es folgt daher $Fy = \frac{G}{\gamma}$ und $y = \frac{G}{F\gamma}$. Für eine Schwimmtiefe.

Fig. 442.



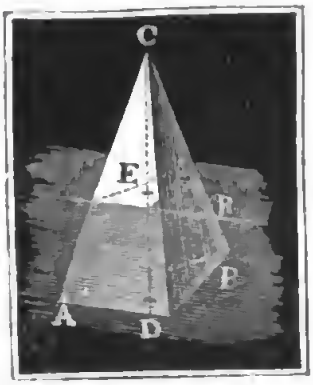
Schwimmtiefe.

Fig. 443.



mit der Spitze unter Waſſer ſchwimmende Pyramide ABC, Fig. 443, iſt $V = \frac{1}{3}\varphi y^3$, wenn φ den von der Spitze um die Einheit abſtehenden Querſchnitt bezeichnet, es folgt daher für ſie $\frac{1}{3}\varphi y^3 = \frac{G}{\gamma}$, und daher die Tiefe $CE = y = \sqrt[3]{\frac{3G}{\varphi\gamma}}$. Für eine mit der Baſis unter Waſſer ſchwimmende Pyramide ABC, Fig. 444, ergiebt ſich hingegen der Abſtand $CE = y_1$ der Spitze vom Waſſerſpiegel, aus der Höhe h der ganzen Pyramide, indem man ſetzt:

Fig. 444

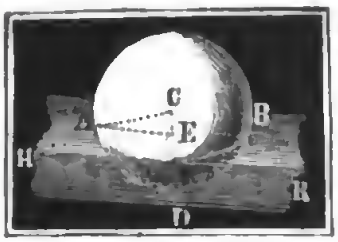


$$V = \tfrac{1}{3}\varphi\,(h^3 - y_1^3),$$

$$y_1 = \sqrt{h^3 - \frac{3G}{\varphi\gamma}}.$$

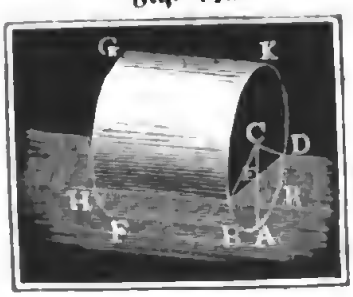
Für eine Kugel AB, Fig. 445, mit dem Halbmeſſer $CA = r$ iſt $V = \pi y^2\left(r - \frac{y}{3}\right)$, daher hat man es mit der Auflöſung der cubiſchen Gleichung $y^3 - 3ry^2 + \frac{3G}{\pi\gamma} = 0$ zu thun, um die Tiefe $DE = y$ der Eintauchung der Kugel zu finden.

Fig. 445.



Für einen mit horizontaler Axe ſchwimmenden Cylinder AG, Fig. 446, vom Halbmeſſer $BC = DC = r$ iſt, wenn α^0 den Centriwinkel BCD des eingetauchten Bogens bezeichnet, die Tiefe AE der Eintauchung $y = r\,(1 - cos.\,\frac{1}{2}\,\alpha)$, um aber den Waſſerbogen α zu finden, ſetzen wir das Volumen des verdrängten Waſſers = Ausſchnitt $\frac{r^2\alpha}{2}$ minus Dreieck $\frac{r^2 sin.\,\alpha}{2}$, multiplicirt durch die Länge $GK = l$ des Cylinders, alſo $(\alpha - sin.\,\alpha)\,\frac{lr^2}{2} = \frac{G}{\gamma}$, und löſen die Gleichung $\alpha - sin.\,\alpha = \frac{2\,G}{l\,r^2\,\gamma}$ auf dem Wege der Näherung in Beziehung auf α auf.

Fig. 446



Beiſpiele. 1) Wenn eine ſchwimmende Holzkugel von 10 Zoll Durchmeſſer 4½ Zoll tief ſchwimmt, ſo iſt das Volumen des von ihr verdrängten Waſſers: Schwimmtief.

$$V = \pi\,(^5/_2)^2\,(5 - {}^5/_2) = \frac{\pi . 81 . 7}{8} = \frac{567 . \pi}{8} = 222{,}66 \text{ Cub.-Zoll},$$ während die Kugel ſelbſt den Inhalt $\frac{\pi d^3}{6} = \frac{\pi . 10^3}{6} = 523{,}6$ Cub.-Zoll hat. Es wiegen hiernach 523,6 Cub.-Zoll Kugelmaſſe ebenſoviel, wie 222,66 Cub.-Zoll Waſſer, und es folgt das ſpecifiſche Gewicht der erſteren: $\varepsilon = \frac{222{,}66}{523{,}6} = 0{,}425$.

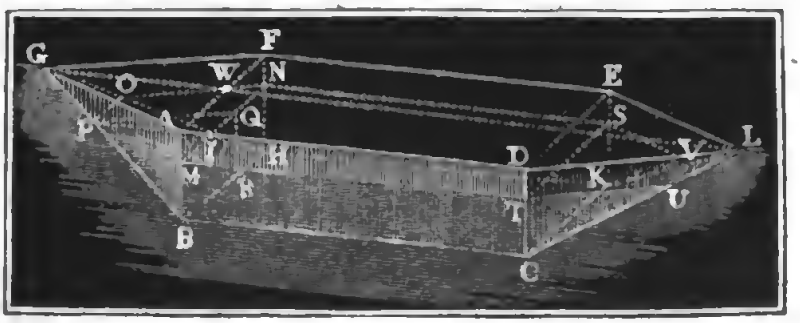
2) Wie tief ſchwimmt ein Holzcylinder von 10 Zoll Durchmeſſer bei einem ſpecifiſchen Gewichte $\varepsilon = 0{,}425$? Es iſt $\frac{\alpha - \sin.\alpha}{2} = \frac{\pi r^2 l . \varepsilon\gamma}{l r^2 \gamma} = \pi\varepsilon$ $= 0{,}425 . \pi = 1{,}3352$; nun giebt die Segmententafel im »Ingenieur, S. 218,« für den Inhalt $\frac{\alpha - \sin.\alpha}{2} = 1{,}32766$ eines Kreisſegmentes den Centriwinkel $\alpha^0 = 166^0$, und für $\frac{\alpha - \sin.\alpha}{2} = 1{,}34487$ denſelben $= 167^0$, es läßt ſich daher einfach der dem Abſchnitte 1,3352 entſprechende Centriwinkel

$$\alpha^0 = 166^0 + \frac{1{,}3352 - 1{,}32766}{1{,}34487 - 1{,}32766} \cdot 1^0 = 166^0 + \frac{754^0}{1721} = 166^0,\ 26';$$ alſo die Tiefe der Eintauchung: $y = r\,(1 - \cos.\ ^1/_2\,\alpha) = 5\,(1 - \cos.\ 83^0, 13')$ $= 5 . 0{,}8819 = 4{,}41$ Zoll ſetzen.

§. 310. Die Beſtimmung der Eintauchungstiefe kommt vorzüglich bei Kähnen und Schiffen vor. Haben dieſe Fahrzeuge eine geſetzmäßige Form, ſo läßt ſich dieſe Tiefe mittels geometriſcher Formeln berechnen, fehlt aber die geſetzmäßige Form oder iſt das Geſetz der Geſtaltung nicht bekannt, oder iſt die Form ſehr zuſammengeſetzt, ſo muß man die Tiefe des Eintauchens durch Experimentiren oder durch Probiren beſtimmen.

Ein Beiſpiel für den erſten Fall gewährt der in Fig. 447 abgebildete,

Fig. 447.



von ebenen Flächen begränzte Kahn *ACLEG*. Derſelbe beſteht aus einem Parallelepipede *ACE*, und aus zwei, den Vorder- und Hintertheil bildenden vierſeitigen Pyramiden *BFG* und *CEL*, und ſeine Schwimmebene iſt aus einem Parallelogramme *MS* und aus zwei Trapezen *MO* und *SU* zuſammengeſetzt, und ſchneidet einen Waſſerraum ab, der ſich in ein Parallelepiped *MCS*, in zwei dreiſeitige Prismen, wie z. B *PNR*,

Schwimmtiefe. und in zwei vierſeitige Pyramiden wie z. B. BQP zerlegen läßt. Setzen wir die Länge AD des Mittelſtückes $= l$, die Breite $AF = b$ und die Höhe $AB = h$, ferner die Länge GW von jedem der beiden Schnäbel $= c$ und die Tiefe der Einſenkung unter Waſſer, d. i. $BM = CT = y$. Es folgt zunächſt der eingetauchte Theil MCS des Mittelſtückes: $= \bar{M}N \times \bar{M}T \times \bar{M}B = l\,b\,y$. Die Baſis der vierſeitigen Pyramide BQP iſt $B\bar{M}.B\bar{R}$ und die Höhe PJ, daher der Inhalt dieſer Pyramide $= \frac{1}{3}\, B\bar{M}.B\bar{R}.P\bar{J}$. Nun iſt aber $BM = y$, $BR = \frac{BP}{BG} \cdot BH$ $= \frac{BM}{BA} \cdot BH = \frac{y}{h} \cdot b = \frac{by}{h}$, und ebenſo $PJ = \frac{BM}{BA} \cdot GW = \frac{y}{h}\, c$ $= \frac{cy}{h}$, daher folgt der Inhalt der beiden Pyramiden $= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot y \cdot \frac{by}{h} \cdot \frac{cy}{h} = \frac{2}{3} \frac{bcy^3}{h^2}$. Der Querſchnitt des dreiſeitigen Prisma's RNO iſt $= \frac{1}{2}\, \overline{RQ}.\bar{P}J = \frac{1}{2}\, y \cdot \frac{cy}{h} = \frac{cy^2}{2h}$, und die Seite $RH = QN = b - \frac{by}{h} = b\left(1 - \frac{y}{h}\right)$, daher folgt der Inhalt der beiden Prismen $= 2 \cdot \frac{cy^2}{2h} \cdot b\left(1 - \frac{y}{h}\right) = \frac{bcy^2}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right)$. Durch Addition der gefundenen drei Volumen ergiebt ſich nun das Volumen des verdrängten Waſſers:

$$V = bly + \tfrac{2}{3} \frac{bcy^3}{h^2} + \frac{bcy^2}{h} - \frac{bcy^3}{h^2} = \left(l + \frac{cy}{h} - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{cy^2}{h^2}\right) by.$$

Iſt nun das Bruttogewicht des Schiffes $= G$, ſo hat man zu ſetzen:

$$\left(l + \frac{cy}{h} - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{cy^2}{h^2}\right) by\gamma = G, \text{ oder}$$

$$y^3 - 3hy^2 - \frac{3lh^2}{c} \cdot y + \frac{9h^2G}{bc\gamma} = 0.$$

Durch die Auflöſung der letzten cubiſchen Gleichung beſtimmt ſich aus der Ladung die Tiefe y der Einſenkung.

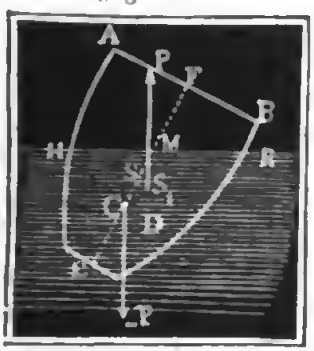
Beiſpiele. 1) Wenn bei einem Schiffe die Länge des Mittelſtückes $l = 50$ Fuß, die Länge eines jeden Schnabels $c = 15$ Fuß, die Breite $b = 12$ Fuß und die Tiefe $h = 4$ Fuß beträgt, ſo kann bei einer Einſenkungstiefe $y = 2$ Fuß die ganze Belaſtung betragen: $G = [50 + 15 \cdot \frac{2}{4} - \frac{1}{3} \cdot 15 \cdot (\frac{2}{4})^2] \cdot 12 \cdot 2 \cdot 66$ $= (50 + 7{,}5 - 1{,}25) \cdot 24 \cdot 66 = 89100$ Pf. 2) Wenn bei dem vorigen Schiffe das Bruttogewicht 50000 Pf. ausmacht, ſo hat man für die Senkungstiefe: $y^3 - 12y^2 - 160y + 202{,}02 = 0$. Durch einiges Probiren findet man leicht, daß dieſer Gleichung ziemlich genau durch $y = 1{,}17$ entſprochen wird, weshalb die geſuchte Einſenkungstiefe ebenſo groß anzunehmen iſt.

Anmerkung. Um das Gewicht der Ladungen eines Schiffes anzugeben, ver-

ſieht man dieſes zu beiden Seiten mit einer Skala, der ſogenannten Schiffsaiche. Die Eintheilung einer ſolchen Aiche wird in der Regel empiriſch gefunden, indem man unterſucht, welche Einſenkungen beſtimmten Belaſtungen entſprechen.

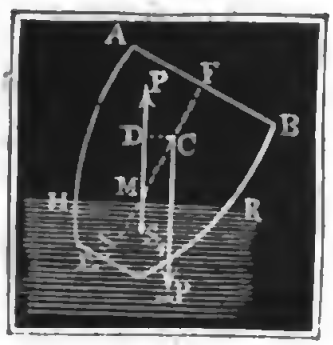
§. 311. Das Schwimmen der Körper erfolgt entweder in aufrechter oder in ſchiefer Stellung, ferner mit oder ohne Stabilität. Aufrecht ſchwimmt ein Körper, z. B. ein Schiff, wenn wenigſtens eine Ebene durch die Schwimmaxe Symmetrieebene des Körpers iſt, ſchief ſchwimmt er, wenn er durch keine der Ebenen, welche ſich durch die Schwimmaxe legen laſſen, in zwei congruente Theile getheilt wird. Ein Körper ſchwimmt mit Stabilität, wenn er ſeinen Gleichgewichtszuſtand zu behaupten ſucht (vgl. §. 130), wenn alſo mechaniſche Arbeit aufzuwenden iſt, um ihn aus dieſer Lage zu bringen, oder wenn er von ſelbſt in die Gleichgewichtslage zurückkehrt, nachdem man ihn daraus gebracht hat. Ohne Stabilität ſchwimmt dagegen der Körper, wenn er in eine neue Gleichgewichtslage übergeht, nachdem er, etwa durch Erſchütterung oder durch einen Stoß u. ſ. w., aus der erſten gebracht worden iſt. Stabilität.

Fig. 448.



Wird ein vorher aufrecht ſchwimmender Körper ABC, Fig. 448, in eine ſchiefe Lage gebracht, ſo tritt der Schwerpunkt S des verdrängten Waſſers aus der Symmetrieebene EF heraus und nimmt eine Stelle S_1 auf der mehr eingetauchten Hälfte des Schiffsraumes ein. Der in S_1 angreifende Auftrieb $P = V\gamma$ und das im Schwerpunkte C des Schiffes angreifende Gewicht $G = -P$ des Schiffes bilden nun ein Kräftepaar, durch welches (ſ. §. 90) ſtets eine Drehung hervorgebracht wird. Um welchen Punkt auch dieſe Drehung vor ſich gehe, immer wird doch C dem Gewichte G nachgebend, niedergehen, und S_1 oder ein anderer Punkt M der Vertikalen S_1P, der Kraft P folgend, aufſteigen, es wird alſo die Symmetrie- oder Axenebene EF des Schiffes in C nach unten und in M nach oben gezogen, und daher dieſelbe ſich aufrecht ſtellen, wenn M, wie in Fig. 448 über C liegt und ſich noch mehr neigen, wie in Fig. 449, wenn M ſich unter C befindet. Hiernach hängt denn die Stabilität eines ſchwimmenden Körpers oder Schiffes von dem Punkte M ab, in welchem die Vertikale durch den Schwerpunkt S_1 des verdrängten Waſſers die Symmetrieebene ſchneidet. Man nennt dieſen Punkt das Me-

Fig. 449.

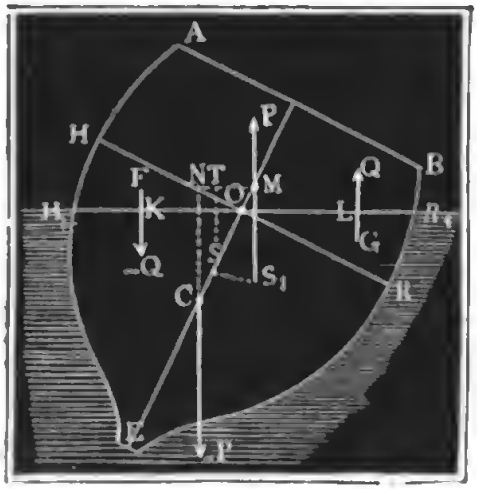


Stabilität. tacentrum (franz. métacentre; engl. metacentrum). Ein Schiff oder ein anderer Körper ſchwimmt alſo hiernach mit Stabilität, wenn ſein Metacentrum über dem Schwerpunkte des Schiffes liegt, und ohne ſolche, wenn es darunter liegt; er iſt endlich im indifferenten Gleichgewichte, wenn beide Punkte zuſammenfallen.

Der Horizontalabſtand CD des Metacenter M von dem Schwerpunkte C des Schiffes iſt der Hebelarm des von P und $G = -P$ gebildeten Kräftepaares, und daher das Moment des letzteren oder das Maaß der Stabilität $= P \,.\, \overline{CD}$. Bezeichnen wir die Entfernung CM durch c, und den Drehungswinkel SMS_1 des Schiffes oder ſeiner Axenebene durch φ^0, ſo erhalten wir für das Maaß der Stabilität des Schiffes $S = Pc\sin.\varphi$; und es iſt alſo hiernach dieſes um ſo größer, je größer das Gewicht, je größer die Entfernung des Metacenter von dem Schwerpunkte des Schiffes und je größer der Neigungswinkel des letzteren iſt.

§. 312. In der letzten Formel $S = Pc\sin.\varphi$ hängt die Stabilität des Schiffes vorzüglich von der Entfernung des Metacenter vom Schwerpunkte des Schiffes ab, es iſt daher von Wichtigkeit, ſich eine Formel zur Beſtimmung dieſer Entfernung zu verſchaffen. Durch den Uebergang des Schiffes ABE, Fig. 450, aus der aufrechten Lage in die ſchiefe Lage rückt der Schwerpunkt S nach S_1, es geht der keilförmige Raum HOH_1 aus dem Waſſer hervor und zieht ſich der keilförmige Raum ROR_1 unter das Waſſer hinab, und es wird dadurch der Auftrieb auf der einen Seite um eine im Schwerpunkte F des Raumes HOH_1 angreifende Kraft Q vermindert und auf der andern Seite um eine im Schwerpunkte G des Raumes ROR_1 angreifende gleiche Kraft Q vergrößert. Es erſetzt alſo hiernach der in S_1 angreifende Auftrieb P den anfänglich in S angreifenden Auftrieb und das Kräftepaar $(Q, -Q)$, oder, was auf Eins hinauskommt, eine in S_1 angreifende Gegenkraft $-P$ hält der in S angreifenden Kraft P ſammt Kräftepaar $(Q, -Q)$ das Gleichgewicht, oder einfacher, das Kräftepaar $(P, -P)$ iſt mit dem Kräftepaar $(Q, -Q)$ im Gleichgewichte. Iſt nun das Querprofil $HER = H_1ER_1$ des im Waſſer befindlichen Schiffstheiles $= F$, und das Querprofil $HOH_1 = ROR_1$ des Raumes, um welchen ſich das Schiff auf der einen Seite herausgezogen und auf der andern tiefer ein-

Fig. 450.



getaucht hat, $= F_1$, iſt ferner der Horizontalabſtand KL der Schwerpunkte dieſer Räume $= a$ und der Horizontalabſtand MT der Schwerpunkte S und S_1 oder die Horizontalprojection des Weges SS_1, welchen S beim Umkippen durchläuft $= s$, ſo hat man wegen des Gleichgewichtszuſtandes beider Kräftepaare: Stabilität.

$$Fs = F_1 a, \text{ daher } s = \frac{F_1}{F} a \text{ und } SM = \frac{MT}{\sin.\varphi} = \frac{s}{\sin.\varphi} = \frac{F_1 a}{F \sin.\varphi}.$$

Die als Faktor in das Maaß der Stabilität eintretende Linie $CM = c$ iſt $= CS + SM$; bezeichnen wir daher noch den Abſtand CS des Schwerpunktes C des Schiffes von dem Schwerpunkte des verdrängten Waſſers durch e, ſo erhalten wir das Stabilitätsmaaß

$$S = Pc \sin.\varphi = P\left(\frac{F_1 a}{F} + e \sin\varphi\right).$$

Iſt der Drehungswinkel klein, ſo kann man die Querſchnitte HOH_1 und ROR_1 als gleich ſchmale Dreiecke anſehen; bezeichnet man die Breite $HR = H_1R_1$ des Schiffes an der Eintauchungsſtelle durch b, ſo kann man $F_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} b \cdot \frac{1}{2} b\varphi = \frac{1}{8} b^2 \varphi$ und $KL = a = 2 \cdot \frac{2}{3}\frac{b}{2}$ $= \frac{2}{3} b$, ſowie $\sin.\varphi = \varphi$ ſetzen, weshalb die Stabilität:

$$S = P\left(\frac{1}{12}\frac{b^3\varphi}{F} + e\varphi\right) = \left(\frac{b^3}{12F} + e\right) P\varphi \text{ folgt.}$$

Fällt der Schwerpunkt C des Schiffes mit dem Schwerpunkte S des verdrängten Waſſers zuſammen, ſo hat man $e = o$, daher $S = \frac{b^3}{12F} \cdot P\varphi$, und liegt der Schwerpunkt des Schiffes über dem des verdrängten Waſſers, ſo hat man e negativ, daher $S = \left(\frac{b^3}{12F} - e\right) P\varphi$. Auch folgt, daß die Stabilität eines Schiffes Null iſt, wenn e negativ und zugleich $e = \frac{b^3}{12F}$ iſt.

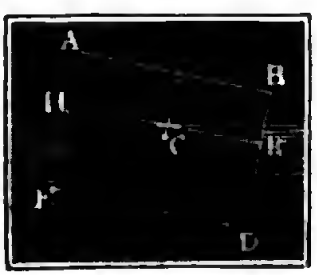
Man ſieht aus dem gewonnenen Ergebniſſe, daß die Stabilität um ſo größer ausfällt, je breiter das Schiff iſt und je tiefer der Schwerpunkt deſſelben liegt.

Beiſpiel. Bei einem Parallelepipede AD, Fig. 451, von der Breite $AB = b$, Höhe $AE = h$ und Einſenkungstiefe $EH = y$ iſt $F = by$ und $e = -\frac{h-y}{2}$, daher das Maaß der Stabilität: $S = P\varphi\left(\frac{b^2}{12by} - \frac{h}{2} + \frac{y}{2}\right)$ oder, wenn das ſpecifiſche Gewicht der Maſſe des Parallelepipedes $= s$ geſetzt wird.

$$S = P\varphi\left(\frac{b^2}{12h\varepsilon} - \frac{h}{2}(1-\varepsilon)\right).$$

Hiernach hört die Stabilität auf, wenn

Fig. 451.



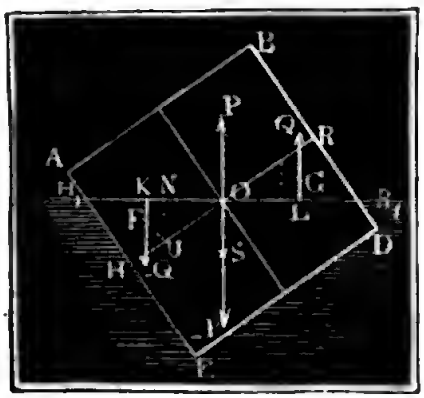
$b^2 = 6h^2\varepsilon\ (1-\varepsilon)$, d. i. wenn $\frac{b}{h} = \sqrt{6\varepsilon(1-\varepsilon)}$ iſt. Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ folgt $\frac{b}{h} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = 1{,}225$; wenn alſo die Breite noch nicht 1,225 der Höhe iſt, ſo ſchwimmt das Parallelepiped ohne Stabilität.

Schiefes Schwimmen.

§. 313. Die Formel $S = P\left(\frac{F_1 a}{F} \pm e \sin.\ \varphi\right)$ für die Stabilität eines ſchwimmenden Körpers läßt ſich auch dazu anwenden, um die verſchiedenen Lagen ſchwimmender Körper zu finden, denn ſetzen wir $S =$ Null, ſo bekommen wir die Gleichung für eine zweite Gleichgewichtslage, deren Auflöſung auf die Beſtimmung des entſprechenden Neigungswinkels führt. Es iſt alſo die Gleichung $\frac{F_1 a}{F} \pm e \sin.\ \varphi = 0$ aufzulöſen in Hinſicht auf φ.

Für ein Parallelepiped AD, Fig. 452, iſt der Querſchnitt $F = HRDE = H_1 R_1 DE = by$, wenn b die Breite $AB = HR$ und y die Senktiefe $EH = DR$ bezeichnet; ferner der Querſchnitt $F_1 = HOH_1 = ROR_1$ als rechtwinkeliges Dreieck mit der Kathete $OH = OR = \frac{1}{2}b$, und der Kathete $HH_1 = RR_1 = \frac{1}{2} b\ tang.\ \varphi$, $F_1 = \frac{1}{8} b^2\ tang.\ \varphi$. Nun ſteht ferner der Schwerpunkt F von der Baſis um $FU = \frac{1}{3} HH_1 = \frac{1}{6} b\ tang.\varphi$ und von O um $OU = \frac{2}{3} OH = \frac{1}{3} b$ ab, es folgt daher der Horizontalabſtand des Schwerpunktes F von der Mitte O, $= OK = ON + NK = OU\ cos.\ \varphi + FU\ sin.\ \varphi = \frac{1}{3} b\ cos.\ \varphi + \frac{1}{6} b\ tang.\ \varphi\ sin.\ \varphi$, und der Arm $a = KL = 2\ OK = \frac{2}{3} b\ cos.\ \varphi + \frac{1}{3} b\ \frac{sin.\ \varphi^2}{cos.\ \varphi}$.

Fig. 452.



Dieſemnach iſt die Gleichung für die ſchiefe Gleichgewichtslage:

$$\frac{\frac{1}{8} b^2\ tang.\ \varphi\ (\frac{2}{3} b\ cos.\ \varphi^2 + \frac{1}{3} b\ sin.\ \varphi^2)}{by\ cos.\ \varphi} - e\ sin.\ \varphi = 0,$$

oder $\frac{sin.\ \varphi}{cos.\ \varphi} = tang.\ \varphi$ eingeführt,

$sin.\ \varphi\ [(\frac{1}{12} + \frac{1}{24}\ tang.\ \varphi^2)\ b^2 - ey] = 0$; welcher Gleichung durch $sin.\ \varphi = 0$ und durch $tang.\ \varphi = \sqrt{2}\ \sqrt{\frac{12\,ey}{b^2} - 1}$ Genüge geleiſtet wird. Dem durch die erſte Gleichung beſtimmten Winkel $\varphi = 0$ entſpricht das aufrechte, dem zweiten aber das ſchiefe Schwimmen. Die

Möglichkeit des letzteren bedingt, daß $\frac{ey}{b^2} > 1/12$ iſt. Iſt nun h die Höhe des Parallelepipedes und ε deſſen ſpecifiſches Gewicht, ſo hat man $y = \varepsilon h$ und $e = \frac{h-y}{2} = (1-\varepsilon)\frac{h}{2}$, daher folgt Schiefes Schwimmen.

$$tang.\ \varphi = \sqrt{2}\sqrt{\frac{6\varepsilon(1-\varepsilon)h^2}{b^2} - 1},$$

und es iſt die Bedingungsgleichung für das ſchiefe Schwimmen

$$\frac{h}{b} > \sqrt{\frac{1}{6\varepsilon(1-\varepsilon)}}.$$

Beiſpiel. 1) Wenn das ſchwimmende Parallelepiped eben ſo hoch als breit iſt und das ſpecifiſche Gewicht $\varepsilon = 1/3$ hat, ſo iſt $tang.\ \varphi = \sqrt{2}\sqrt{3 \cdot 1/3 - 1} = \sqrt{3-2} = 1$, daher $\varphi = 45°$.

2) Wenn die Höhe $h = 0{,}9$ der Breite b, das ſpecifiſche Gewicht aber wieder $1/3$ iſt, ſo hat man $tang.\ \varphi = \sqrt{3 \cdot 0{,}81 - 2} = \sqrt{0{,}43} = 0{,}6557$, daher $\varphi = 33°, 15'$.

§. 314. Das Geſetz vom Auftriebe des Waſſers läßt ſich zur Beſtimmung der Dichtigkeit oder des ſpecifiſchen Gewichtes von Körpern benutzen. Nach §. 307 iſt der Auftrieb des Waſſers gleich dem Gewichte der verdrängten Flüſſigkeit; iſt daher V das Volumen des Körpers und γ_1 die Dichtigkeit der Flüſſigkeit, ſo hat man den Auftrieb $P = V\gamma_1$. Iſt nun aber γ_2 die Dichtigkeit der Körpermaſſe, ſo hat man das Gewicht des Körpers $G = V\gamma_2$, es folgt daher das Dichtigkeitsverhältniß $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{G}{P}$, Specifiſches Gewicht.

d. h. die Dichtigkeit des eingetauchten Körpers verhält ſich zur Dichtigkeit des Fluidum, wie das abſolute Gewicht des Körpers zum Auftriebe oder Gewichtsverluſte beim Untertauchen. Hiernach iſt alſo $\gamma_2 = \frac{G}{P}\gamma_1$, und $\gamma_1 = \frac{P}{G}\gamma_2$; oder wenn γ die Dichtigkeit des Waſſers, ε_1 das ſpecifiſche Gewicht der Flüſſigkeit und ε_2 das des Körpers bezeichnen, alſo $\gamma_1 = \varepsilon_1\gamma$ und $\gamma_2 = \varepsilon_2\gamma$ geſetzt wird, $\varepsilon_2 = \frac{G}{P}\varepsilon_1$, und $\varepsilon_1 = \frac{P}{G}\varepsilon_2$. Wenn man alſo das Gewicht eines Körpers und den Gewichtsverluſt deſſelben beim Untertauchen kennt, ſo läßt ſich aus der Dichtigkeit oder dem ſpecifiſchen Gewichte der Flüſſigkeit die Dichtigkeit oder das ſpecifiſche Gewicht der Körpermaſſe, und umgekehrt aus der Dichtigkeit oder dem ſpecifiſchen Gewichte der letzteren die Dichtigkeit oder das ſpecifiſche Gewicht der erſteren finden.

Iſt die Flüſſigkeit, worin man den feſten Körper abwiegt, Waſſer, ſo

Specifiſches Gewicht.

hat man $\varepsilon_1 = 1$, und $\gamma_1 = \gamma = 1000$ Kilogramm oder 66 Pfund, je nachdem man das Cubikmeter oder den Cubikfuß zur Volumeneinheit annimmt, daher iſt für dieſen Fall die Dichtigkeit des Körpers:

$$\gamma_2 = \frac{G}{P}\gamma = \frac{\text{Abſolutes Gewicht}}{\text{Gewichtsverluſt}} \text{ mal Dichtigkeit des Waſſers}$$

und das ſpecifiſche Gewicht:

$$\varepsilon_2 = \frac{G}{P} = \frac{\text{Abſolutes Gewicht}}{\text{Gewichtsverluſt}}.$$

Um den Auftrieb oder Gewichtsverluſt zu ermitteln, bedient man ſich, wie zur Beſtimmung des Gewichtes G, einer gewöhnlichen Waage, nur befindet ſich unten an der einen Schale dieſer Waage ein Häkchen, um den Körper mittels eines Haares, Drahtes oder andern feinen Fadens daran anzuhängen, bevor er in das Waſſer, welches in einem untergeſetzten Gefäße enthalten iſt, eingetaucht wird. Gewöhnlich nennt man eine zu dieſem Abwägen unter Waſſer eingerichtete Waage eine hydroſtatiſche Waage.

Iſt der Körper, deſſen ſpecifiſches Gewicht man ermitteln will, weniger dicht als Waſſer, ſo kann man ihn mit einem andern ſchweren Körper mechaniſch verbinden, damit die Verbindung im Waſſer noch ein Beſtreben zum Sinken behält. Verliert dieſer ſchwere Körper im Waſſer das Gewicht P_2 und die Verbindung P_1, ſo iſt der Gewichtsverluſt des leichteren Körpers: $P = P_1 - P_2$, bezeichnet nun wieder G das Gewicht des leichteren Körpers, ſo hat man deſſen ſpecifiſches Gewicht:

$$\varepsilon_2 = \frac{G}{P} = \frac{G}{P_1 - P_2}.$$

Kennt man das ſpecifiſche Gewicht ε einer mechaniſchen Verbindung oder Zuſammenſetzung zweier Körper, und ſind auch die ſpecifiſchen Gewichte ε_1 und ε_2 der Beſtandtheile bekannt, ſo laſſen ſich nun auch aus dem Gewichte des Ganzen die Gewichte G_1 und G_2 der Beſtandtheile berechnen. Jedenfalls iſt $G_1 + G_2 = G$ und auch Volumen $\frac{G_1}{\varepsilon_1 \gamma}$ + Volumen $\frac{G_2}{\varepsilon_2 \gamma}$ = Volumen $\frac{G}{\varepsilon \gamma}$, alſo $\frac{G_1}{\varepsilon_1} + \frac{G_2}{\varepsilon_2} = \frac{G}{\varepsilon}$. Durch Vereinigung beider Gleichungen ergiebt ſich nun:

$$G_1 = G\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) : \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \text{ und}$$

$$G_2 = G\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) : \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right).$$

Beiſpiele. 1) Wenn ein 310 Gramm ſchweres Stück Kalkſtein unter dem Waſſer um 121,5 Gramm leichter wird, ſo iſt das ſpecifiſche Gewicht dieſes Kör-

pers: $\varepsilon = \frac{310}{121,5} = 2,55$. 2) Um das ſpecifiſche Gewicht eines Stückes Eichenholz zu finden, hat man es mit einem Bleidraht, welcher beim Abwägen im Waſſer 10,5 Gramm an Gewicht verlor, umbunden, wenn nun das Holzſtück ſelbſt 426,5 Gramm wog, und die Verbindung unter Waſſer 484,5 Gramm leichter war, als in der Luft, ſo ergiebt ſich das ſpecifiſche Gewicht der Holzmaſſe: Specifiſches Gewicht.

$$\varepsilon = \frac{426,5}{484,5 - 10,5} = \frac{426,5}{474} = 0,9.$$

3) Ein vollkommen mit Queckſilber angefülltes und vollkommen geſchloſſenes eiſernes Gefäß hat ein Bruttogewicht von 500 Pfund und verlor im Waſſer 40 Pfund an Gewicht; wenn nun das ſpecifiſche Gewicht des Gußeiſens = 7,2 und das des Queckſilbers 13,6 iſt, ſo ergiebt ſich das Gewicht des leeren Gefäßes:

$$G_1 = 500 \left(\frac{40}{500} - \frac{1}{13,6}\right) : \left(\frac{1}{7,2} - \frac{1}{13,6}\right)$$
$$= 500\ (0,08 - 0,07353) : (0,1388 - 0,0735)$$
$$= \frac{500 \,.\, 0,00647}{0,0653} = \frac{3235}{65,3} = 49,5 \text{ Pfund.}$$

und das Gewicht des eingeſchloſſenen Queckſilbers:

$$G_2 = 500\ (0,08 - 0,1388) : (0,07353 - 0,1388) = \frac{500 \,.\, 0,0588}{0,0653}$$
$$= \frac{2940}{6,53} = 450,2 \text{ Pfund.}$$

Anmerkung 1. Zur Ausmittelung der ſpecifiſchen Gewichte von Flüſſigkeiten, lockeren Maſſen u. ſ. w. reicht auch das bloße Abwägen in freier Luft aus, weil man dieſen Körpern durch Einfüllen in Gefäße jedes beliebige Volumen ertheilen kann. Wiegt eine leere Flaſche = G, wiegt dieſelbe mit Waſſer angefüllt G_1 und hat dieſelbe das Gewicht G_2, wenn ſie eine andere Maſſe enthält, ſo hat man das ſpecifiſche Gewicht dieſer Maſſe: $\varepsilon = \frac{G_2 - G}{G_1 - G}$.

Um z. B. das ſpecifiſche Gewicht von Roggen (in Maſſe) zu finden, wurde ein Fläſchchen mit Roggenkörnern angefüllt, und nach ſtarkem Schütteln gewogen. Nach Abzug des Gewichtes der leeren Flaſche ergab ſich das Gewicht dieſer Roggenmaſſe = 120,75 Gramm, und das Gewicht einer gleichen Waſſermenge = 155,65; es folgt demnach das Gewicht der Roggenmaſſe

$= \frac{120,75}{155,65} = 0,776$, und es wiegt ſonach 1 Cubikfuß dieſes Getreides
$= 0,776 \,.\, 66 = 51,22$ Pfund.

Anmerkung 2. Das ſchon von Archimedes aufgelöſte Problem, aus dem ſpecifiſchen Gewichte einer Zuſammenſetzung und aus den ſpecifiſchen Gewichten der Beſtandtheile das Verhältniß der Beſtandtheile zu finden, geſtattet nur eine beſchränkte Anwendung auf chemiſche Verbindungen, Metalllegirungen u. ſ. w., weil bei ſolchen meiſt eine Contraction, oder auch eine Ausdehnung der Maſſen ſtattfindet, ſo daß das Volumen der Verbindung nicht mehr gleich iſt der Summe der Volumina der Beſtandtheile.

§. 315. Zur Beſtimmung der Dichtigkeit von Flüſſigkeiten, werden vorzüglich auch die Aräometer, Senkwaagen (franz aréomètres; engl. areometers) gebraucht. Dieſe Inſtrumente ſind hohle, in Beziehung auf eine Axe ſymmetriſch geformte Körper mit ſehr tief liegendem Schwer- Aräometer.

Aräometer. punkte, und geben, indem ſie in einer Flüſſigkeit aufrecht ſchwimmen, die Dichtigkeit dieſer an. Man fertigt ſie aus Glas, Meſſingblech u. ſ. w. und nennt ſie nach ihrem verſchiedenen Gebrauche hydroſtatiſche Senkwaagen, Soolwaagen, Bierwaagen, Branntweinwaagen, Alkoholometer u. ſ. w. Es giebt zwei Arten von Senkwaagen, nämlich Gewichts- und Scalenaräometer. Die erſteren werden auch oft zur Beſtimmung der Gewichte, und namentlich der ſpecifiſchen Gewichte von feſten Körpern in Anwendung gebracht.

1. Iſt V das Volumen des unter Waſſer befindlichen Theiles einer bis zu einer gewiſſen Marke O eingetauchten übrigens frei ſchwimmenden Senkwaage ABC, Fig. 453, G das Gewicht der ganzen Waage, P das auf den Teller A aufgelegte Gewicht beim Schwimmen im Waſſer, deſſen Dichtigkeit $= \gamma$ ſein möge, und P_1 das eben daſelbſt aufzulegende Gewicht beim Schwimmen in einer andern Flüſſigkeit von der Dichtigkeit γ_1, ſo hat man $V\gamma = P + G$ und $V\gamma_1 = P_1 + G$, daher

Fig. 453.

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{P_1 + G}{P + G}.$$

2. Iſt P das Gewicht, welches auf den Teller gelegt werden muß, um die im Waſſer ſchwimmende Senkwaage ABC, Fig. 454, bis zu einer Marke O einzuſenken, und iſt P_1 das Gewicht, welches man mit dem abzuwägenden Körper gleichzeitig auf A zu legen hat, um dieſelbe Einſenkung zu erhalten, ſo hat man das Gewicht dieſes Körpers einfach $G_1 = P - P_1$. Iſt aber die Auflage P_1 um P_2 zu vergrößern, wenn der abzuwiegende Körper in das unter Waſſer befindliche Schälchen D gelegt wird, um die Senkungstiefe unverändert zu behalten, ſo iſt P_2 der Auftrieb und daher das ſpecifiſche Gewicht des Körpers:

Fig. 454.

$$\varepsilon = \frac{G_1}{P_2} = \frac{P - P_1}{P_2}.$$

Die Senkwaagen mit unten angehängten Schälchen zur Beſtimmung ſpecifiſcher Gewichte von feſten Körpern, wie z. B. von Mineralien, heißen Nicholſon'ſche Senkwaagen.

3. Setzen wir das Gewicht einer Senkwaage ABC, Fig. 455, $= G$, und das eingetauchte Volumen, wenn dieſe Waage im Waſſer ſchwimmt, $= V$, ſo iſt $G = V\gamma$. Steigt dieſe Waage um die Tiefe $OX = x$ empor, wenn dieſelbe in eine ſchwerere Flüſſigkeit eingetaucht wird, ſo iſt bei dem Querſchnitt F des Stäbchens das noch eingetauchte Volumen $= V - Fx$, und daher $G = (V - Fx)\gamma_1$;

Fig. 455.

beide Formeln, durch einander dividirt, geben nun die Dichtigkeit der Flüſſigkeit: Aräometer.

$$\gamma_1 = \frac{V}{V - Fx} \cdot \gamma = \gamma : (1 - \frac{F}{V} x) = \gamma : (1 - \mu x).$$

Iſt die Flüſſigkeit, worin man das Aräometer eintaucht, leichter als Waſſer, ſo ſinkt daſſelbe in ihr um die Tiefe x, weshalb $G = (V + Fx)\,\gamma$ und daher $\gamma_1 = \gamma : (1 + \mu x)$ zu ſetzen iſt.

Um den Coefficienten $\mu = \frac{F}{V}$ zu finden, wird die Waage durch ein Gewicht P, etwa durch oben eingegoſſenes und den tiefſten Punkt einnehmendes Queckſilber ſo weit beſchwert, daß ſie, im Waſſer ſchwimmend, um eine bedeutende Länge des zum Anbringen einer Scala dienenden Halſes tiefer einſinkt. Setzt man nun $P = Fl\gamma$, ſo erhält man

$$\mu = \frac{F}{V} = \frac{P}{Vl\gamma} = \frac{P}{Gl}.$$

Beiſpiele. 1) Wenn bei einem 65 Gramm ſchweren Gewichtsaräometer vom Teller 13,5 Gramm wegzunehmen ſind, damit es beim Schwimmen in Alkohol ebenſo tief einſinkt, als beim Schwimmen im Waſſer, ſo iſt das ſpecifiſche Gewicht dieſes Alkohols $= \frac{65 - 13{,}5}{65} = 1 - 0{,}208 = 0{,}792$. 2) Bei einer Nicholſon'ſchen Waage iſt das Normalgewicht 100 Gramm, d. h. man hat 100 Gramm aufzulegen, um das Inſtrument bis 0 einzuſenken; hiervon mußten aber 66,5 Gramm weggenommen werden, als man ein abzuwägendes Stück Meſſing mit auf den oberen Teller gelegt hatte, und es waren wieder 7,85 Gramm zuzulegen, als dieſer Körper in dem unteren Teller lag. Deshalb iſt das abſolute Gewicht dieſes Meſſingſtückes = 66,5 Gramm, und das ſpecifiſche Gewicht deſſelben $= \frac{66{,}5}{7{,}85} = 8{,}47$. 3) Ein 75 Gramm ſchweres Scalenaräometer ſteigt, nachdem man ſeine Füllung um 31 Gramm vermindert hat, um 6 Zoll = 72 Linien und hat daher den Coefficienten $\mu = \frac{31}{75 \,.\, 72} = 0{,}00574$. Nach Ergänzung der Füllung und Wiederherſtellung des Gewichtes von 75 Gramm ſtieg es, in einer Salzſoole ſchwimmend, um 29 Linien, daher iſt das ſpecifiſche Gewicht dieſer Flüſſigkeit $= 1 : (1 - 0{,}00574 \,.\, 29) = 1 : 0{,}833 = 1{,}2$.

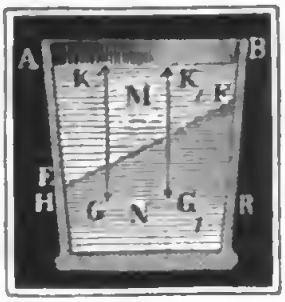
Anmerkung. Die weitere Ausführung dieſes Gegenſtandes gehört in die Phyſik, Chemie und Technologie.

§. 316. Befinden ſich mehrere Flüſſigkeiten von verſchiedenen Dichtigkeiten in einem Gefäße zugleich, ohne daß ſie eine chemiſche Einwirkung auf einander ausüben, ſo legen ſich dieſelben wegen der leichten Verſchiebbarkeit ihrer Theile nach ihren ſpecifiſchen Gewichten über einander, nämlich die dichteſte unten, die weniger dichte darüber und die leichteſte oben. Auch ſind im Gleichgewichtszuſtande die Begrenzungsflächen, ſo wie die Flüſſigkeiten von verſchiedenen Dichtigkeiten.

Flüſſigkeiten von verſchiedenen Dichtigkeiten.

freie Oberfläche horizontal; denn ſo lange die Begrenzungsfläche EF zwiſchen den Maſſen M und N, Fig. 456, geneigt iſt, ſo lange ſtehen auch über einer Horizontalſchicht HR verſchieden ſchwere Flüſſigkeitsſäulen wie GK, G_1K_1 u. ſ. w., es kann daher auch der Druck in dieſer Schicht nicht überall derſelbe ſein und folglich auch kein Gleichgewichtszuſtand eintreten.

Fig. 456.



In communicirenden Röhren AB und CD, Fig. 457, ordnen ſich die Flüſſigkeiten zwar ebenfalls nach ihren Dichtigkeiten über einander, allein ihre Oberflächen A und D liegen nicht in einem und demſelben Niveau. Iſt F der Inhalt des Querſchnittes HR eines Kolbens, Fig. 458, in dem einen Schenkel AB von zwei communicirenden Röhren, und iſt die Druckhöhe, oder die Höhe EH des Waſſerſpiegels in der zweiten Röhre CD über HR, $= h$, ſo hat man den Druck gegen die Kolbenfläche, $P = Fh\gamma$. Erſetzt man dagegen die Kolbenkraft durch eine Flüſſigkeitsſäule AH, Fig. 457, von der Höhe $AH = h_1$ und Dichtigkeit γ_1, ſo hat man $P = Fh_1\gamma_1$; und es giebt nun das Gleichſetzen beider Ausdrücke die Gleichung $h_1\gamma_1 = h\gamma$, oder die Proportion

$$\frac{h_1}{h} = \frac{\gamma}{\gamma_1}.$$

Fig. 457.

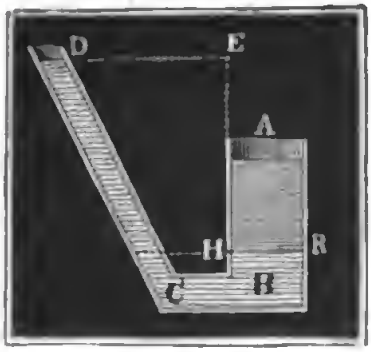
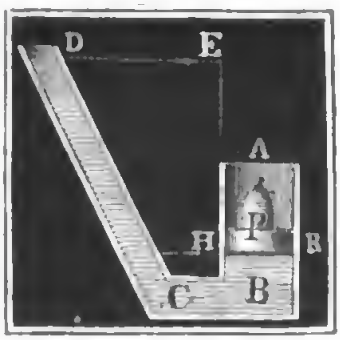


Fig. 458.



Es verhalten ſich alſo in communicirenden Röhren, beim Zuſtande des Gleichgewichtes unter zwei verſchiedenen Flüſſigkeiten, die Druckhöhen, oder die Höhen der Flüſſigkeitsſäulen, von der gemeinſchaftlichen Berührungsebene aus gemeſſen, umgekehrt wie die Dichtigkeiten oder ſpecifiſchen Gewichte dieſer Flüſſigkeiten.

Da das Queckſilber ungefähr 13,6 mal ſo ſchwer iſt als Waſſer, ſo hält hiernach in communicirenden Röhren eine Queckſilberſäule einer 13,6 mal ſo hohen Waſſerſäule das Gleichgewicht.

Drittes Kapitel.

Von den Molekularwirkungen des Waſſers.

§. 317. Die Cohäſion des Waſſers iſt, obgleich ſehr klein, jedoch nicht Null. Die Theile oder Moleküle (franz. molécules; engl. molecules) hängen aber nicht allein unter einander, ſondern auch mit anderen Körpern, z. B. mit den Gefäßwänden, zuſammen, ſo daß es ebenfalls eine Kraft erfordert, um dieſen Zuſammenhang, den man Adhäſion (franz. adhérence; engl. adhesion) des Waſſers nennt, aufzuheben. Ein an einem feſten Körper hängender Waſſertropfen, weiſt die Exiſtenz der Cohäſion und Adhäſion des Waſſers zugleich nach. Ohne die Cohäſion könnte das Waſſer keinen Tropfen bilden, und ohne die Adhäſion könnte es an dem feſten Körper nicht hängen bleiben; es wird hier die Schwerkraft nicht allein von der Cohäſion, ſondern auch von der Adhäſion des Waſſers überwunden. Die Wirkungen, welche aus der Vereinigung der Co- und Adhäſionskräfte hervorgehen, bezeichnet man zur Unterſcheidung von den Wirkungen der Trägheit, der Schwerkraft u. ſ. w. mit dem Namen: die Molekularwirkungen. Die Capillarität oder das Heben oder Senken des Waſſer- oder Queckſilberſpiegels in engen Röhren oder zwiſchen ſehr nahe ſtehenden Wänden, iſt ein vorzüglicher Fall der Molekularwirkung. Molekularkräfte.

§. 318. Man hat die Cohäſion und Adhäſion des Waſſers durch ſogenannte Adhäſionsplatten zu beſtimmen geſucht. Man hängt zu dieſem Zwecke eine ſolche Platte ſtatt einer Waagſchaale an das Ende eines Waagbalkens, bringt die Waage durch ein Tarirgewicht zum Einſpielen, und nähert das Gefäß mit der zu unterſuchenden Flüſſigkeit der Platte allmälig, bis ihre ebene Grundfläche mit der Oberfläche der Flüſſigkeit in Berührung kommt. Nun vergrößert man durch allmäliges Zulegen das Gewicht der Waagſchaale am anderen Ende des Waagbalkens bis die Platte vom Waſſerſpiegel abgeriſſen wird. Die Ergebniſſe ſolcher Verſuche ſind beſonders davon abhängig, ob die Berührungsfläche der Platte von dem Waſſer benetzt wird oder nicht. Im erſteren Falle bleibt ſtets nach der Berührung eine dünne Waſſerſchicht an der Platte hängen, man hat daher beim Abreißen derſelben vom Waſſer nicht die Adhäſion des Waſſers an der Platte, ſondern die Cohäſion des Waſſers überwunden. Deshalb hängt auch die Kraft zum Abreißen verſchiedener Platten vom Waſſerſpiegel gar nicht von der materiellen Beſchaffenheit der Platten ab. Andere Flüſſig- Adhäſionsplatten.

Digitized by Google

Adhäſionsplatten.

keiten als Waſſer erfordern dagegen auch andere Kräfte an den Adhäſionsplatten. Du Buat fand, daß die Adhäſion zwiſchen dem Waſſer und einem überzinnten Eiſenbleche auf einen Quadratzoll 65 bis 70 Gran beträgt. Dies giebt auf ein Quadratmeter ohngefähr eine Kraft von 5 Kilogramm, und auf einen Quadratfuß (Rheinländ) eine Kraft von 1,05 Pfund. Hiervon nur wenig abweichende Werthe fand Achard für Scheiben aus Blei, Eiſen, Kupfer, Meſſing, Zinn und Zink, ferner Gay-Luſſac an einer Glasſcheibe, und Huth an verſchiedenen Holztafeln.

Wenn dagegen die Fläche der Scheibe von der Oberfläche des Waſſers nicht benetzt wird, ſo ſtellen ſich ganz andere Ergebniſſe heraus, weil dann nicht die Cohäſion des Waſſers an ſich, ſondern die Adhäſion deſſelben an der Platte überwunden wird. Es ſcheint, als wenn in dieſem Falle die Zeit der Berührung einen großen Einfluß auf die Kraft zum Losreißen der Scheibe ausübe. Gay-Luſſac fand z. B. für eine Glasplatte von 120 Millimeter Durchmeſſer, um ſie von der Oberfläche des Queckſilbers loszureißen, 150 bis 300 Gramm Kraft nöthig, je nachdem die Zeit der Berührung eine kurze oder eine längere war.

Anmerkung. In Frankenheim's Lehre der Cohäſion werden die Cohäſionserſcheinungen, wie ſie z. B. das Abziehen benetzter Platten von der Oberfläche des Waſſers darbietet, Synaphie, und dagegen die Adhäſionserſcheinungen, wie ſie z. B. bei der Trennung unbenetzter Platten von der Oberfläche einer Flüſſigkeit vorkommen, Proſaphie genannt.

Adhäſion an Seitenwänden.

§. 319. Wenn ein Waſſertropfen auf der Oberfläche eines anderen Körpers zerfließt, und daher dieſe benetzt, ſo iſt die Adhäſion überwiegend, bleibt dagegen der Waſſertropfen in ſeiner kugeligen Form auf der Fläche eines feſten oder flüſſigen Körpers liegen, ohne dieſelbe zu benetzen, ſo herrſcht die Cohäſion des Waſſers vor.

Ein Zuſammenwirken beider Kräfte macht ſich beſonders an der Oberfläche einer Flüſſigkeit in der Nähe der Gefäßwand bemerklich; es ſteigt daſelbſt das Waſſer in die Höhe und bildet eine concave Oberfläche, wenn die Cohäſion des Waſſers von der Adhäſion übertroffen und daher die Gefäßwand benetzt wird; es krümmt ſich hingegen der Waſſerſpiegel in der Nähe der Gefäßwand abwärts und bildet daſelbſt eine convexe Fläche, wenn keine Benetzung eintritt und daher die Cohäſion überwiegend iſt.

Dieſe Erſcheinungen laſſen ſich ſehr leicht auf folgende Weiſe erklären.

Ein Element E in der Oberfläche FG des Waſſers (ſ. Fig. 459.) wird von ſeiner Umgebung nach allen Richtungen abwärts gezogen, und es reſultirt aus allen dieſen Anziehungen eine einzige, vertikal abwärts wirkende Kraft A. Ein Element F an der vertikalen Gefäßwand hingegen wird von dieſer mit einer Horizontalkraft P und von dem Waſſer mit einer Kraft K angezogen, welche den Quadranten BFG halbirt, und aus zwei gleichen

Componenten A_1 und A_1 beſteht, wovon jeder $\frac{1}{2}A$ iſt. Da der horizontale Component $A_1 = \frac{1}{2}A$ der Adhäſionskraft P entgegenwirkt, ſo reſultirt

Adhäſion an Seitenwänden.

Fig. 459.

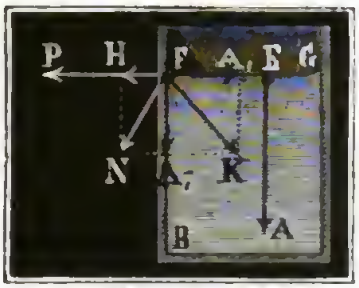


Fig. 460.

aus beiden die Horizontalkraft $H = P - \frac{1}{2}A$, die in Vereinigung mit dem vertikalen Componenten $A_1 = \frac{1}{2}A$ die Mittelkraft N giebt, gegen deren Richtung ſich die Oberfläche des Waſſers rechtwinkelig ſtellt. Iſt nun $P > \frac{1}{2}A$, ſo zieht N auswärts und es ſteigt das Waſſer an der Wand in die Höhe, iſt aber, wie in Fig. 460, $P < \frac{1}{2}A$, ſo wirkt N nach innen und es ſenkt ſich der Waſſerſpiegel an der Gefäßwand.

§. 320. Die Kraft, mit welcher ein Element E in der Oberfläche $DEFG$, Fig. 461, des Waſſers von den tiefer liegenden Elementen normal abwärts

Spannung des Waſſerſpiegels.

Fig. 461.

Spannung des Waſſerſpiegels.

gezogen wird, iſt dem bekannten Principe von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung zu Folge auch gleich der Kraft, mit welcher das Element die unter ihm befindlichen Elemente an ſich zieht; beide Kräfte heben ſich daher in der Verbindung von E und den darunter liegenden Elementen auf. Außerdem wird aber auch das Element E noch von jeden der benach-

Fig. 462.

barten Elementen D und F mit einer Kraft S angezogen, aus der eine Mittelkraft P reſultirt, welche das Element normal auswärts zieht, und daher der Kraft entgegenwirkt, mit welcher E ſammt den darunter befindlichen Elementen vermöge der Schwerkraft nieder zu ſinken ſucht.

In der Nähe einer ebenen Wand BK bildet die Oberfläche des Waſſers eine liegende cylindriſche Fläche, von welcher $DEFG$ ein vertikaler Durchſchnitt iſt. Errichten wir in den Mitten M und N von DE und EF Perpendikel, ſo ſchneiden ſich dieſelben in dem Centro C, aus welchem ſich das als Kreisbogen anzuſehende Curvenelement MEN bei E beſchreiben läßt. Wegen der Gleichheit der Winkel ECM und $ESS = ESO$ und $EMC = EOS = 90^0$, iſt aber das Dreieck CEM dem Dreiecke SEO ähnlich, daher hat man die Proportion $\frac{EO}{ES} = \frac{EM}{EC}$, oder $\frac{\frac{1}{2}P}{S} = \frac{\frac{1}{2}MN}{EC}$,

oder, wenn man noch das Bogenelement $MEN = MN$ mit σ und den Krümmungshalbmeſſer $CE = CM$ mit r bezeichnet, $\frac{P}{S} = \frac{\sigma}{r}$ und daher die Kraft, mit welcher das Element E die tiefer liegenden Elemente an ſich zieht, $P = \frac{S\sigma}{r}$. Spannung des Waſſerſpiegels.

Iſt y die Höhe EH, um welche das Element E über dem von der Seitenwand nicht afficirten Waſſerſpiegel RZ ſteht, ſo hat man nach dem hydroſtatiſchen Geſetze in §. 299 die Kraft, mit welcher das Element $MEN = \sigma$, vom Waſſer radial auswärts gezogen wird, $P = y\gamma . \sigma$; es iſt daher $\frac{S\sigma}{r} = y\sigma\gamma$, folglich $y = \frac{S}{r\gamma}$ zu ſetzen.

Da das Element E ſeine benachbarten Elemente D und F genau eben ſo ſtark anzieht, als es von dieſen angezogen wird, ſo läßt ſich annehmen, daß die Kraft S, oder die Spannung der Waſſeroberfläche an allen Stellen eine und dieſelbe ſei. Aus dieſem Grunde iſt $\frac{S}{\gamma}$, oder der Quotient aus der Spannung S und der Dichtigkeit der Flüſſigkeit eine conſtante Zahl, und daher die Erhebung eines Elementes in der Oberfläche des Waſſers über dem allgemeinen Waſſerſpiegel dem Krümmungshalbmeſſer umgekehrt proportional.

§. 321. In der Nähe einer gekrümmten Seitenwand, z. B. einer vertikalen Cylinderfläche, bildet die Oberfläche des Waſſers eine doppelt gekrümmte Fläche, und es wird hier die unter dem quadratiſchen Flächenelemente $MN = \sigma^2$ hängende Waſſerſäule von zwei Kräften P_1 und P_2 getragen, wovon die eine Mittelkraft der Spannungen in der durch die Axe des Cylinders gehenden Vertikalebene und die andere Mittelkraft der Spannungen in der durch den Krümmungshalbmeſſer CE gehenden Normalebene iſt. Jener Ebene entſpricht der kleinſte und dieſer der größte Krümmungshalbmeſſer; ſetzen wir beide Halbmeſſer $= r_1$ und r_2, ſo haben wir die aus den in beiden Ebenen wirkenden Spannungen σS entſpringenden Normalkräfte $P_1 = \sigma S . \frac{\sigma}{r_1} = \frac{S\sigma^2}{r_1}$ und $P_2 = \sigma S . \frac{\sigma}{r_2} = \frac{S\sigma^2}{r_2}$, und daher die Mittelkraft derſelben:

$$P = P_1 + P_2 = S\sigma^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Bezeichnet auch hier y die Höhe EH des als ein Quadrat σ^2 anzuſehenden Elementes MN der Oberfläche $DEFG$ über dem unterſten oder allgemeinen Waſſerſpiegel, ſo haben wir die Kraft, mit welcher $MN = \sigma$ von dem darunter befindlichen Waſſer normal abwärts gezogen wird,

$$P = y . \sigma^2\gamma,$$

Spannung des Waſſerſpiegels.

und es folgt nun durch Gleichſetzung beider Ausdrücke für P,

$$y\sigma^2\gamma = S\sigma^2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right), \text{ daher alſo}$$

$$y = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right).$$

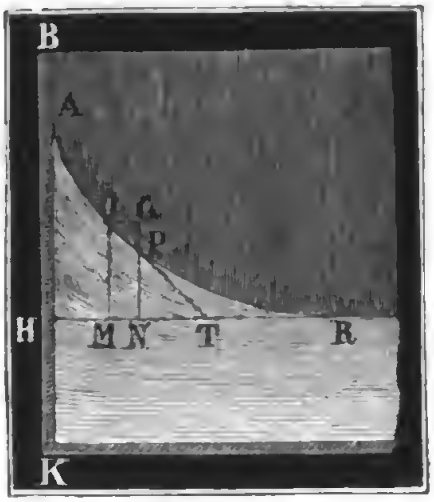
Es iſt alſo bei der cylindriſchen Wand die Erhebung der Oberfläche des Waſſers über dem allgemeinen Waſſerſpiegel an jeder Stelle der Summe von den umgekehrten Maximal- und Minimalkrümmungshalbmeſſern proportional. Dieſe Formel enthält auch die des vorigen in ſich, denn wenn die Normalſchnitte durch CE gerade ſind, ſo hat man $r_2 = \infty$, daher

$$\frac{1}{r_2} = 0, \quad \text{und} \quad y = \frac{S}{\gamma}\cdot\frac{1}{r_1}.$$

Krumme Fläche des Waſſerſpiegels.

§. 322. *) Die Curve, welche der vertikale Durchſchnitt des Waſſerſpiegels in der Nähe einer ebenen Wand bildet, läßt ſich, nach Hagen, wie folgt finden. Es ſei AR, Fig. 463, die Oberfläche des von der vertikalen Wand BK angezogenen Waſſers, HR der allgemeine Waſſerſpiegel, ferner der Durchſchnitt H beider Flächen der Coordinatenanfangspunkt. Man ſetze ferner die Coordinaten HM und MO eines Punktes O in AR, $= x$ und y, ferner den Bogen $AO = s$ und den Tangentenwinkel $OTM = \alpha$, und die Elemente OQ, QP und $OP = dx$, dy und ds.

Fig. 463.



Da $y = \frac{S}{r\gamma}$ und nach Artikel 27 der analytiſchen Hülfslehren $r = \frac{ds}{d\alpha}$, ſo wie $dy = ds\,sin.\,\alpha$ iſt, ſo hat man

$$y = \frac{S\,d\alpha}{\gamma\,ds} = \frac{S\,sin.\,\alpha\,.\,d\alpha}{\gamma\,dy}, \text{ oder}$$

$$y\,dy = \frac{S}{\gamma}\,sin.\,\alpha\,.\,d\alpha,$$

und es giebt nun die Integration

$$\tfrac{1}{2}y^2 = \frac{S}{\gamma}\int sin.\,\alpha\,.\,d\alpha = Con. - \frac{S}{\gamma}\,cos.\,\alpha.$$

Krumme Fläche des Waſſerſpiegels.

Da für den Punkt R, α und y zugleich Null ſind, iſt

$0 = Con. - \frac{S}{\gamma} cos.0$, daher $Con. = \frac{S}{\gamma}$, und

$$y^2 = \frac{2S}{\gamma}(1 - cos.\alpha) = \frac{4S}{\gamma}\frac{(1-cos.\alpha)}{2} = \frac{4S}{\gamma}(sin.\tfrac{1}{2}\alpha)^2,$$

alſo $y = 2\sqrt{\frac{S}{\gamma}} . sin.\frac{1}{2}\alpha$.

Für $\alpha^0 = 90^0$ hat man $sin.\frac{1}{2}\alpha = sin.45^0 = \sqrt{\frac{1}{2}}$; daher iſt die größte Erhebung der Oberfläche des Waſſers unmittelbar an der Seitenwand

$$h = 2\sqrt{\frac{S}{\gamma}} . \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2S}{\gamma}}, \text{ und umgekehrt,}$$

$$\frac{S}{\gamma} = \tfrac{1}{2}h^2, \text{ und}$$

1) $y = h\sqrt{2} . sin.\frac{1}{2}\alpha$.

Durch Differenziiren dieſes Ausdruckes bekommt man

$$dy = \tfrac{1}{2}h\sqrt{2}\, cos.\tfrac{1}{2}\alpha . d\alpha = h\sqrt{\tfrac{1}{2}}\, cos.\tfrac{1}{2}\alpha . d\alpha,$$

und da auch $dy = -dx . tang.\alpha$ iſt, ſo folgt

$$dx = -h\sqrt{\tfrac{1}{2}} . \frac{cos.\frac{1}{2}\alpha}{tang.\alpha} . d\alpha = -h\sqrt{\tfrac{1}{2}} . \frac{cos.\frac{1}{2}\alpha\, cos.\alpha}{sin.\alpha} . d\alpha$$

$$= -h\sqrt{\tfrac{1}{2}} . \frac{cos.\frac{1}{2}\alpha\,[(cos.\frac{1}{2}\alpha)^2 - (sin.\frac{1}{2}\alpha)^2]}{2\,sin.\frac{1}{2}\alpha . cos.\frac{1}{2}\alpha} d\alpha$$

$$= -h\sqrt{\tfrac{1}{2}} . \frac{1 - 2(sin.\frac{1}{2}\alpha)^2}{2\,sin.\frac{1}{2}\alpha} d\alpha$$

$$= -h\sqrt{\tfrac{1}{2}} . \left(\frac{\frac{1}{2}}{sin.\frac{1}{2}\alpha} - sin.\tfrac{1}{2}\alpha\right) d\alpha.$$

Nun iſt aber $\int sin.\frac{1}{2}\alpha . d\alpha = -2\, cos.\frac{1}{2}\alpha$ und

$$\int \frac{d\alpha}{sin.\frac{1}{2}\alpha} = 2\, Log.nat. . tang.\tfrac{1}{2}\alpha,$$

daher hat man

$$x = -h\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(Log.nat.tang.\tfrac{1}{2}\alpha + 2\, cos.\tfrac{1}{2}\alpha) + Con.$$

Da für $x = 0$, $\alpha^0 = 90^0$, $tang.\frac{1}{2}\alpha = tang.45^0 = 1$, alſo $Log.nat.tang.\frac{1}{2}\alpha = 0$, und $cos.\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}$ iſt, ſo folgt

$$Con. = 2h\sqrt{\tfrac{1}{2}} . \sqrt{\tfrac{1}{2}} = h \text{ und}$$

2) $x = h\,(1 - 2 . \sqrt{cos.\frac{1}{2}\alpha} - \sqrt{\tfrac{1}{2}} . Log.nat.tang.\tfrac{1}{2}\alpha)$.

Für $\alpha = 0$ hat man $cos.\frac{1}{2}\alpha = 1$ und $Log.nat.tang.\frac{1}{2}\alpha = -\infty$, daher $x = +\infty$; es iſt alſo HR Aſymptote, welcher ſich der Durchſchnitt AOR der Oberfläche des Waſſers ohne Ende nähert.

Digitized by Google

Krumme Fläche des Waſſerſpiegels.

Anmerkung. Wenn man die Formel (1) umkehrt, alſo

$$\sin.\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{y}{h}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

ſetzt, ſo kann man für jeden beliebigen Werth von y, erſt α und hieraus wieder mittelſt (2) den entſprechenden Werth von x berechnen.

Die Meſſungen, welche Hagen hierüber angeſtellt hat, weiſen eine ſehr gute Uebereinſtimmung dieſer Theorie mit der Erfahrung nach. Dieſelben wurden mittelſt einer matt geſchliffenen Meſſingtafel an Brunnenwaſſer angeſtellt, und führten auf folgende Ergebniſſe.

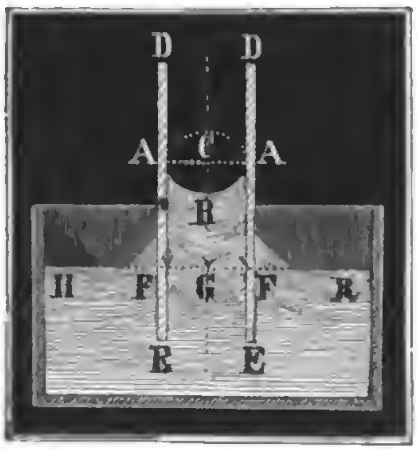
y gemeſſen	1,37	0,70	0,49	0,34	0,24	0,18	0,12	0,07	0,04	0,016
x gemeſſen	0,00	0,31	0,63	0,94	1,26	1,57	1,88	2,50	3,13	3,74
x berechnet	0,00	0,33	0,64	0,96	1,28	1,56	1,95	2,47	3,01	3,90

Dieſe Zahlenwerthe beziehen ſich auf Pariſer Linien. Aus $h = 1{,}37$ Linien berechnet ſich $\frac{S}{\gamma} = 0{,}94$ und der kleinſte Krümmungshalbmeſſer $r = 0{,}68$ Linien. Tafeln von Burbaum, Thonſchiefer und Glas gaben dieſelben Reſultate.

Paralleltafeln

§. 323. Zwiſchen zwei ſehr nahe geſtellten Tafeln wie DE, DE, Fig. 464, erhebt ſich das Waſſer nicht allein an den Rändern, ſondern auch in der Mitte, und es bildet die Oberfläche deſſelben nahe den halben Mantel eines elliptiſchen Cylinders. Die eine Halbaxe des elliptiſchen Durchſchnittes iſt der halben Weite $CA = a$, und die andere Halbaxe $CB = b$, der Differenz $AF - BG = h_2 - h_1$ der größten und kleinſten Erhebung der elliptiſchen Oberfläche ABA über dem allgemeinen Waſſerſpiegel gleich. Nach dem Ingenieur S. 238 iſt der Krümmungshalbmeſſer der Ellipſe in A: $a_1 = \frac{b^2}{a} = \frac{(h_2 - h_1)^2}{a}$,

Fig. 464.



und der in B: $a_2 = \frac{a^2}{b} = \frac{a^2}{(h_2 - h_1)}$,

daher hat man nach §. 320 die Erhebung der Oberfläche des Waſſers in A:

$$h_2 = \frac{S}{a_1 \gamma} = \frac{aS}{(h_2 - h_1)^2 \gamma},$$

und dagegen in B: $h_1 = \frac{S}{a_2\gamma} = \frac{(h_2 - h_1)\,S}{a^2\gamma}$. Parallelſtafeln

Durch Subtraction dieſer Gleichungen erhält man

$$h_2 - h_1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{a}{(h_2-h_1)^2} - \frac{h-h_1}{a^2}\right) \text{ oder}$$

$$1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{a}{(h_2-h_1)^3} - \frac{1}{a^2}\right);$$

daher folgt 1) $h_2 - h_1 = a\sqrt[3]{\frac{S}{S + a^2\gamma}}$,

2) $h_2 = \frac{1}{a}\sqrt[3]{\frac{S}{\gamma}\left(\frac{S}{\gamma} + a^2\right)^2}$,

3) $h_1 = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma}\sqrt[3]{\frac{S}{S + a^2\gamma}}$,

und endlich das Verhältniß

$$n = \frac{h_2 - h_1}{h_1} = \frac{a^2\gamma}{S} = a^2 : \frac{S}{\gamma}.$$

Iſt a ſehr klein, ſo kann man $h = h_1 = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma}$ ſetzen, dann wächſt alſo die Erhebung der Oberfläche des Waſſers umgekehrt wie der Abſtand der Tafeln von einander.

Genauer iſt aber

$$h_2 = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma}\left(1 + \tfrac{2}{3}\,\frac{a^2\gamma}{S}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma} + \tfrac{2}{3}a, \text{ und}$$

$$h_1 = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma}\left(1 - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{a^2\gamma}{S}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma} - \tfrac{1}{3}a.$$

Umgekehrt folgt hiernach $\frac{S}{\gamma} = a\,h_1 + \frac{a^2}{3}$.

Dieſe Formeln ſtimmen, wenn der Abſtand der Tafeln ſehr klein, namentlich $\frac{a}{h_1}$ noch nicht $\frac{1}{2}$ iſt, ſehr gut mit den Beobachtungen überein.

Hagen fand bei Verſuchen mit zwei parallelen Plantafeln im Brunnenwaſſer, im Mittel durch Beobachtungen

$h_1 = 1{,}55$, $h_2 = 2{,}09$ und $h = 1{,}38$ Pariſ. Linien,

und durch Rechnung

$\frac{S}{\gamma} = 1{,}04$, $h_2 = 2{,}12$ und $h = 1{,}44$ Pariſ. Linien.

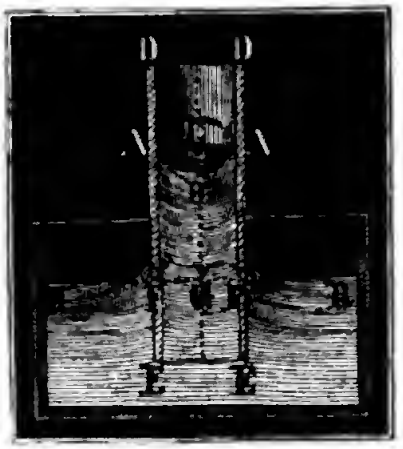
Neuere Verſuche (ſ. Poggendorf's Annalen, Bd. 77.) gaben für

$$a = 0{,}360;\quad 0{,}5875;\quad 0{,}7575 \text{ Linien},$$
$$h_1 = 2{,}562;\quad 1{,}429;\quad 1{,}068 \quad »$$
$$\text{und } \frac{S}{\gamma} = 0{,}949;\quad 0{,}907;\quad 0{,}917 \quad » \text{ , alſo}$$
$$\text{im Mittel } \frac{S}{\gamma} = 0{,}9243, \text{ und } S = 0{,}01059 \text{ Gramme.}$$

(Vergl. den vorigen Paragraphen.)

Haarröhrchen. §. 324. Die Erhebung der Oberfläche des Waſſers in ſenkrechten engen Röhren, oder ſogenannten Haarröhrchen (franz. tubes capillaires; engl. capillary tubes) läßt ſich bei Zugrundelegung der Formel $y = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$ des §. 321 leicht finden, wenn man annimmt, daß die Oberfläche (der Meniscus) ein halbes Sphäroid ABA, Fig. 465, bilde, deſſen kreisförmige Baſis AA mit dem Querſchnitt der Röhre zuſammenfällt. Behalten wir die Bezeichnung des vorigen Paragraphen bei, ſetzen wir alſo wieder die halbe Röhrenweite $CA = a$, und die Minimal- und Maximalerhebung BG und AF des Waſſers in der Röhre über dem allgemeinen Waſſerſpiegel H, $= h_1$ und h_2, ſo haben wir für

Fig. 465.



$$h_2 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),\quad r_1 = a \text{ und } r_2 = \frac{(h_2 - h_1)^2}{a},$$

und für

$$h_1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),\quad r_1 = r_2 = \frac{a^2}{h_2 - h_1} \text{ zu ſetzen, weshalb nun } h_2 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{(h_2 - h_1)^2}\right) \text{ und}$$

$$h_1 = \frac{2S}{\gamma} \cdot \frac{(h_2 - h_1)}{a^2} \text{ folgt.}$$

Durch Subtraction der letzten Gleichungen von einander erhält man

$$h_2 - h_1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{(h_2 - h_1)^2} - \frac{2(h_2 - h_1)}{a^2}\right), \text{ oder}$$

$$1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a(h_2 - h_1)} + \frac{a}{(h_2 - h_1)^3} - \frac{2}{a^2}\right), \text{ oder}$$

$$\left(\frac{\gamma}{S}+\frac{2}{a^2}\right)(h_2-h_1)^3-\frac{1}{a}(h_2-h_1)^2=a.$$ Haarröhrchen.

Iſt a klein, ſo kann man auch

$$\frac{2}{a^2}(h_2-h_1)^3-\frac{1}{a}(h_2-h_1)^2=a$$

ſetzen, woraus dann $h_2-h_1=a$ folgen würde. Nimmt man aber $h_2-h_1=a+\triangle$, und ſetzt

$(h_2-h_1)^2=a^2+2a\triangle$, ſowie $(h_2-h_1)^3=a^3+3a^2\triangle$,

ſo erhält man

$$\left(\frac{\gamma}{S}+\frac{2}{a^2}\right)(a^3+3a^2\triangle)-\frac{1}{a}(a^2+2a\triangle)=a, \text{ oder}$$

$$\frac{\gamma}{S}a^3+\left(\frac{\gamma}{S}+\frac{2}{a^2}\right).3a^2\triangle-2\triangle=0,$$

und es folgt

$$\triangle=-\frac{\gamma a^3}{3\gamma a^2+4S} \text{ annähernd} =-\frac{\gamma a^3}{4S}.$$

Hiernach iſt nun $h_2-h_1=a-\frac{\gamma a^3}{4S}$, daher

$$h_1=\frac{2S}{\gamma}\cdot\frac{1}{a^2}\left(a-\frac{\gamma a^3}{4S}\right)=\frac{2}{a}\cdot\frac{S}{\gamma}-\frac{a}{2} \text{ und}$$

$$h_2=\frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a}+\frac{a}{\left(a-\frac{\gamma a^3}{4S}\right)^2}\right)=\frac{S}{\gamma}\left[\frac{1}{a}+\frac{a}{a^2}\left(1+\frac{\gamma a^2}{4S}\right)^2\right]$$

$$=\frac{S}{\gamma}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\left(1+\frac{\gamma a^2}{2S}\right)\right]=\frac{2}{a}\cdot\frac{S}{\gamma}+\frac{a}{2}.$$

Es wächſt alſo bei den Haarröhrchen die mittlere Erhebung umgekehrt wie die Röhrenweite.

Umgekehrt hat man zur Beſtimmung von S,

$$\frac{S}{\gamma}=\tfrac{1}{2}ah_1+\frac{a^2}{4}.$$

Beobachtungen, welche Hagen mit Brunnenwaſſer an Haarröhrchen angeſtellt hat, gaben Folgendes:

Röhrenweite a	0,295	0,336	0,413	0,546	0,647	0,751	0,765
Erhebung h_1	10,08	8,50	6,87	5,17	4,28	3,72	3,59
Spannungsmaaß $\frac{\gamma}{S}$	1,508	1,455	1,458	1,478	1,473	1,512	1,494

Haarröhrchen. Nach dieſen Verſuchen iſt alſo im Mittel

$$\frac{S}{\gamma} = 1{,}482 \quad \text{und} \quad S = 0{,}0170 \text{ Gramme.}$$

Die Abweichungen dieſer Werthe ſoll ſeinen Grund darin haben, daß die Spannung S der Oberfläche des Waſſers mit der Zeit abnimmt, und bei dem gekochten Waſſer viel kleiner ausfällt als bei dem friſchen Waſſer. Es iſt alſo anzunehmen, daß die Spannung des Waſſers in jedem Streifen von 1 Linie Breite $S = 0{,}0106$ bis $0{,}0170$ Gramm beträgt.

§. 325. Die vorſtehende Theorie findet auch ihre Anwendung in dem Falle, wenn die Wand nicht von der Flüſſigkeit benetzt wird; es findet hier keine Erhöhung, ſondern eine Senkung der Oberfläche ſtatt, und es iſt dieſelbe auch nicht concav, ſondern conver. Die aus der Spannung S der Oberfläche ABA, Fig. 466 hervorgehende Mittelkraft wirkt hier von oben nach unten, und hebt dadurch den Druck des Waſſers von unten nach oben auf, welcher aus dem Niveauabſtande BG entſpringt. Die Adhäſionskraft des feſten Körpers kommt deshalb nicht weiter in Betracht, weil ſie ſich mit der Cohäſionskraft des Waſſers, von welcher natürlich auch die Spannung S der Oberfläche deſſelben abhängt, ins Gleichgewicht ſetzt.

Fig. 466.

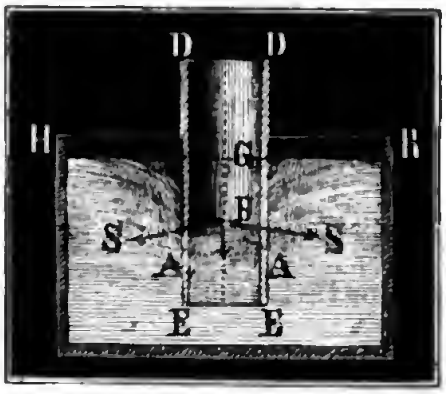
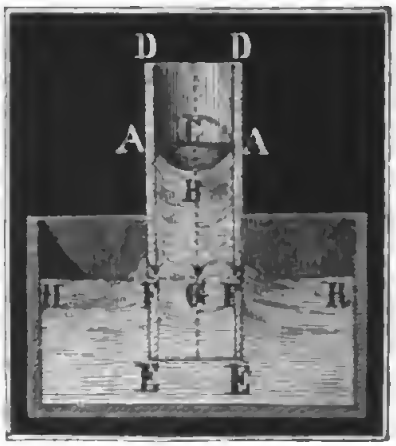


Fig. 467.



Setzt man die Kraft, mit welcher die Röhrenwand die Flüſſigkeitsſäule BG, Fig. 467, an ſich zieht, dem Röhrenumfange proportional, ſetzt alſo für eine cylindriſche Röhre dieſe Kraft $P = \mu . 2\pi a$, wo μ einen Coefficienten ausdrückt, ſo hat man $\pi a^2 h = 2\mu\pi a$, und daher die mittlere Erhebung des Waſſers in der Röhre $h = \frac{2\mu}{a}$.

Für zwei parallele Tafeln iſt dagegen $P = 2\mu l$ und $P = 2ahl\gamma$, wo l die unbeſtimmte Länge der Waſſerſäule bezeichnet, und daher

$h = \frac{\mu}{a}$, d. i. halb ſo groß wie bei der Röhre, wenn der

Abſtand $2a$ der Tafeln der Röhrenweite gleich iſt. Dieſes ſtimmt auch mit Reſultaten der letzten Paragraphen vollkommen. Haarröhrchen.

Nach den Hagen'ſchen Verſuchen hängt die Feſtigkeit oder Spannung der Oberfläche einer Flüſſigkeit nicht von dem Grade ihrer Flüſſigkeit ab, iſt aber um ſo größer, je ſchwerer die Flüſſigkeit an anderen Körpern haftet. Nach Anderen, namentlich nach Brunner und Frankenheim (ſ. Poggendorff's Annalen, Bd. 70 und 72), nimmt aber die Steighöhe h in den Haarröhren und folglich auch S ab, wenn die Temperatur der Flüſſigkeit eine größere wird.

Für Alkohol iſt S ohngefähr die Hälfte und für Queckſilber das Achtfache von der Feſtigkeit des Waſſers.

Anmerkung 1. Hagen findet durch Meſſung und Wägung von Flüſſigkeitstropfen, welche ſich von den Grundflächen kleiner Cylinder losreißen, ziemlich dieſelben Werthe wie durch die Beobachtungen an Capillartafeln. Ebenſo haben die Verſuche mit Adhäſionsplatten eine gute Uebereinſtimmung geliefert, unter der Vorausſetzung, daß die Kraft zum Losreißen einer Platte durch das Gewicht des gehobenen Flüſſigkeitscylinders und durch die Spannung in dem Mantel dieſes Cylinders das Gleichgewicht gehalten wird.

Anmerkung 2. Die Anzahl der Schriften über die Capillarität iſt zu groß, als daß hier eine vollſtändige Mittheilung derſelben erfolgen könnte. Es haben ſich mit dieſem Gegenſtande ſogar die größten Mathematiker, wie Laplace, Poiſſon, Gauß u ſ. w. beſchäftigt. Eine vollſtändige Mittheilung der Literatur findet man in Frankenheim's Lehre von der Cohäſion. Die Schrift, welche bei Bearbeitung dieſes Kapitels vorzüglich benutzt wurde, iſt dieſe: Ueber die Oberfläche der Flüſſigkeiten von Hagen, eine in der K. Akademie der Wiſſenſchaften geleſene Abhandlung, Berlin 1845.

Viertes Kapitel.

Vom Gleichgewichte und Drucke der Luft.

Spannkraft der Gaſe.

§. 326. Die uns umgebende atmoſphäriſche Luft ſowie auch alle übrigen Luftarten oder Gaſe (franz. gaz; engl. gases) beſitzen, in Folge der Repulſivkraft ihrer Theile oder Moleküle, ein Beſtreben, einen größeren und größeren Raum einzunehmen. Man erhält daher auch nur eine begrenzte Luftmaſſe durch Abſperren oder Einſchließen in vollkommen verſchloſſenen Gefäßen. Die Kraft, mit welcher ſich die Gaſe auszudehnen ſuchen, heißt ihre Elaſticität, Spannkraft oder Expanſivkraft (franz. und engl. tension). Sie äußert ſich durch einen Druck gegen die Wände des ſie einſchließenden Gefäßes, und iſt inſofern von der Elaſticität der feſten und tropfbar flüſſigen Körper verſchieden, als ſie in jedem Zuſtande der Dichtigkeit ſich wirkſam zeigt, wogegen die Elaſticität der letztgenannten Körper bei einem gewiſſen Zuſtande der Ausdehnung Null iſt. Man mißt den Druck oder die Spannkraft der Luft und anderer Gaſe durch Barometer, Manometer und Ventile. Das Barometer (franz. baromètre; engl. barometer) wird vorzüglich angewendet, um den Druck der Atmoſphäre zu beſtimmen. Das gewöhnlichſte oder ſogenannte Gefäßbarometer (Fig. 468) beſteht in einer, an einem Ende *A* verſchloſſenen und am andern Ende *B* offenen Glasröhre, welche, nachdem ſie mit Queckſilber gefüllt iſt, umgeſtürzt und mit ihrem offenen Ende in ein ebenfalls Queckſilber enthaltendes Gefäß *CD* eingetaucht wird. Nach dem Umkehren dieſes Inſtrumentes bleibt in der Röhre eine Queckſilberſäule *BS* zurück, welcher (S. §. 316) durch den Druck der Luft gegen die Oberfläche *HR* des Queckſilbers das Gleichgewicht gehalten wird. Der über der Queckſilberſäule befindliche Raum *AS* iſt luftleer, es erleidet daher dieſe Säule von oben keinen Druck, weshalb denn auch die Höhe dieſer Säule, oder vielmehr die Höhe des Queckſilbers in derſelben über dem Queckſilberſpiegel *HR* im Gefäße als Maaß des Luftdruckes dienen kann. Um dieſe Höhe bequem und ſcharf meſſen zu können, iſt eine genau eingetheilte Scala angebracht, welche längs der Röhre hinläuft.

Fig. 468.

Die ausführliche Beſchreibung der verſchiedenen Barometer, die Anleitung zum Gebrauche derſelben u. ſ. w. gehört in die Phyſik.

§. 327. Durch Barometer hat man gefunden, daß bei einem mittleren Zustande der Atmosphäre und an wenig über dem Meere gelegenen Orten dem Luftdrucke durch eine ohngefähr 76 Centimeter oder 28 Pariser Zoll = 29 preuß. Zoll hohe Queckſilberſäule das Gleichgewicht gehalten wird. Da das ſpecifiſche Gewicht des Queckſilbers beinahe 13,6 iſt, ſo folgt, daß der Luftdruck auch gleich iſt dem Gewichte einer $0{,}76 \cdot 13{,}6 = 10{,}336$ Meter = 31,73 Pariſer Fuß = 32,84 preuß. Fuß hohen Waſſerſäule. Spannkraft der Gaſe.

Man mißt die Spannung der Luft auch oft durch den Druck, welchen dieſelbe auf die Flächeneinheit ausübt. Da ein Cubikcentimeter Queckſilber 0,0136 Kilogramm wiegt, ſo iſt der Atmoſphärendruck oder das Gewicht einer 76 Centimeter hohen Queckſilberſäule bei 1 Quadratcentimeter Baſis $= 0{,}0136 \cdot 76 = 1{,}0336$ Kilogramm, und da ein Cubikzoll Queckſilber $= \frac{66 \cdot 13{,}6}{1728} = 0{,}5194$ preuß. Pfd. wiegt, ſo iſt der mittlere Druck der Atmoſphäre auch $= 29 \cdot 0{,}5194 = 15{,}05$ Pfd. auf den Quadratzoll, = 2167 Pfd. auf einen Quadratfuß.

Den mittleren Barometerſtand 28 Zoll angenommen, erhält man den Druck der Atmoſphäre auf einen Quadratzoll 15,01 Pfund, und auf einen Quadratfuß 2162 Pfund.

Es iſt ſehr gewöhnlich, in der Mechanik, den mittleren Atmoſphärendruck als Einheit anzunehmen, und andere Expanſivkräfte auf dieſen zu beziehen, und in Atmoſphärendrücken, oder Atmoſphären, wie man ſchlechtweg ſagt, anzugeben. Hiernach entſpricht dem Drucke von n Atmoſphären eine $28 \cdot n$ Pariſer Zoll hohe Queckſilberſäule oder ein Gewicht von $15{,}01\ n$ preuß. Pfd. auf jeden Quadratzoll, und umgekehrt einer h Zoll hohen Queckſilberſäule die Expanſivkraft von $\frac{h}{28} = 0{,}03571\ h$ Atmoſphären und dem Drucke von p Pfd. auf den Quadratzoll die Spannung von $\frac{p}{15{,}01} = 0{,}06662\ p$ Atmoſphären. Uebrigens giebt die Gleichung $\frac{h}{28} = \frac{p}{15{,}01}$, die Reductionsformeln $h = 1{,}865\ p$ Zoll und $p = 0{,}5361\ h$ Pfund. Bei einer Spannung h Zoll $= p$ Pfund iſt der Druck gegen eine ebene Fläche von F Quadratzoll:

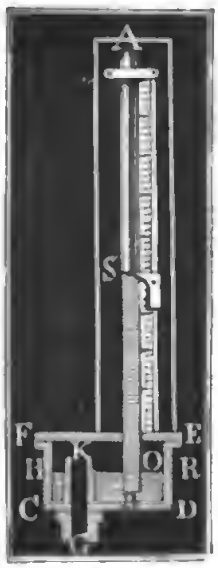
$$P = Fp = 0{,}5361\ Fh \text{ Pfund.}$$

Beiſpiele. 1) Wenn bei einer Waſſerſäulenmaſchine das Waſſer 250 Fuß hoch über der Kolbenfläche ſteht, ſo iſt der Druck gegen dieſe Fläche $= \frac{250}{32{,}84} = 7.6$ Atmoſphären. 2) Wenn der Wind eines Cylindergebläſes 1,2 Atmoſphären Spannung hat, ſo iſt der Druck deſſelben auf jeden Quadratzoll $= 1{,}2 \cdot 15{,}01 = 18.01$ Pfd., und auf die Kolbenfläche von 50 Zoll Durchmeſſer $= \frac{\pi \cdot 50^2}{4} \cdot 18{,}01 = 35362$ Pfd.

Da die Atmoſphäre einen Gegendruck $\frac{\pi \cdot 50^2}{4} \cdot 15{,}01 = 29472$ Pfund ausübt, ſo folgt die Kolbenkraft $P = 35362 - 29472 = 5890$ Pfund.

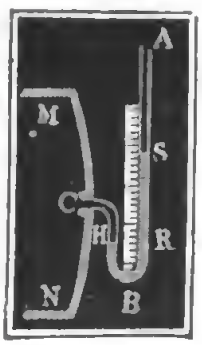
Manometer. §. 328. Um die Spannung der in Gefäßen eingeſchloſſenen Gaſe oder Dämpfe zu finden, werden barometerähnliche Inſtrumente, die man Manometer (franz. manomètres; engl. manometers) nennt, angewendet. Dieſe Inſtrumente werden mit Queckſilber oder mit Waſſer angefüllt, und ſind oben entweder offen oder verſchloſſen, im letzteren Falle aber wieder im oberen Theile entweder luftleer oder mit Luft erfüllt. Das Manometer mit dem luftleeren Raume (Fig. 469) iſt von dem gewöhnlichen Barometer nicht verſchieden. Um mit Hülfe deſſelben die Spannung der Luft in einem Behälter meſſen zu können, wird eine Röhre GK angebracht, die mit einem Ende G in dem Behälter und mit dem andern Ende K über dem Queckſilberſpiegel HR im Gehäuſe CE des Inſtrumentes ausmündet. Der Raum $EFHR$ über dem Queckſilber wird dadurch mit dem Luftbehälter in Communication geſetzt, und es nimmt die in ihm befindliche Luft die Spannung der Luft im Behälter an, und drückt eine Queckſilberſäule OS in die Röhre, welche ſich mit dem zu meſſenden Luftdrucke in's Gleichgewicht ſetzt.

Fig. 469.



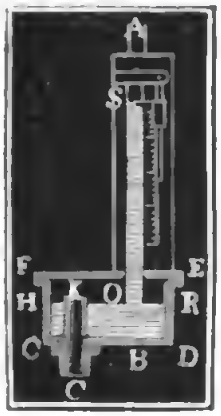
Das oben offene Hebermanometer ABC, Fig. 470, giebt den Ueberſchuß der Spannung in einem Gefäße MN über den Atmoſphärendruck an, weil dieſer Spannung durch die Vereinigung des Luftdruckes über S mit der Queckſilberſäule RS das Gleichgewicht gehalten wird. Iſt b der Barometerſtand und h der Manometerſtand oder der Höhenabſtand, RS der Queckſilberſpiegel in den beiden Schenkeln des Manometers, ſo hat man die durch die Höhe einer Queckſilberſäule gemeſſene Spannung der mit dem kleinen Schenkel communicirenden Luft: $b_1 = b + h$, oder durch den Druck auf den Quadratzoll gemeſſen: $p = 0{,}5361\ (b + h)$ Pfund, oder wenn b der mittlere Barometerſtand iſt, $p = 15{,}01 + 0{,}5361\ h$ Pfund.

Fig. 470.



Gewöhnlicher als die Hebermanometer ſind die Gefäßmanometer, wie $ABCE$, Fig. 471 (ſ. a. f. Seite). Da hier die Luft durch eine größere Queckſilber- oder nach Befinden Waſſermaſſe auf die Flüſſigkeitsſäule

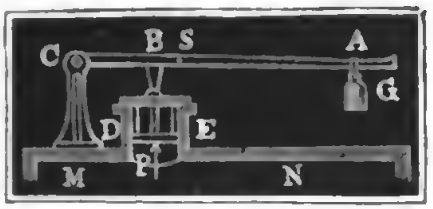
Fig 471.



wirkt, ſo werden die Schwingungen der Luft nicht ſo ſchnell auf die Flüſſigkeitsſäule übergetragen, und es wird das Meſſen dieſer mehr in Ruhe befindlichen Säule erleichtert und ſicherer. Der Bequemlichkeit des Meſſens oder Ableſens an der Scala wegen bringt man oft noch einen Schwimmer an, welcher auf dem Queckſilber ſchwimmt und mittelſt eines über einer Rolle liegenden Fadens mit einem über der Scala weggleitenden Zeiger verbunden iſt. Manometer.

Mit Hülfe eines Ventiles DE, Fig. 472, beſtimmt ſich ebenfalls, jedoch weniger ſcharf, die Expanſivkraft des in MN abgeſchloſſenen Gaſes oder Dampfes, wenn man das Laufgewicht G ſo ſtellt, daß es eben dem Luft- oder Dampfdrucke das Gleichgewicht hält. Iſt $CS = s$ die Entfernung des Schwerpunktes des armirten Hebels von der Drehaxe C, $CA = a$ der Hebelarm des Laufgewichtes, und Q das Gewicht des Hebels ſammt Ventil, ſo hat man das ſtatiſche Moment, mit welchem das Ventil durch die Gewichte zugedrückt wird, $= Ga + Qs$; iſt nun der Gas- oder Dampfdruck von unten $= P$, der Atmoſphärendruck von oben $= P_1$, und endlich der Hebelarm CB des Ventiles $= d$, ſo hat man das ſtatiſche Moment, mit welchem ſich das Ventil zu heben ſucht $= (P - P_1)\, d$, und es giebt nun das Gleichſetzen dieſer beiden Momente: $Pd - P_1 d = Ga + Qs$,

Fig. 472.



$$\text{folglich } P = P_1 + \frac{Ga + Qs}{d}.$$

Bezeichnet r den Halbmeſſer $\frac{1}{2}DE$ des Ventiles, p die innere und p_1 die äußere Spannung, gemeſſen durch den Druck auf einen Quadratzoll, ſo hat man $P = \pi r^2 p$ und $P_1 = \pi r^2 p_1$, daher $p = p_1 + \frac{Ga + Qs}{\pi r^2 d}$.

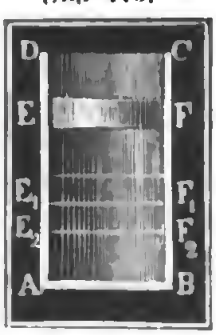
Beiſpiele. 1) Wenn der Queckſilberſtand eines oben offenen Manometers 3,5 Zoll, der Barometerſtand aber 27 Zoll beträgt, ſo iſt die entſprechende Expanſivkraft $h = b + h_1 = 27 + 3{,}5 = 30{,}5$ Zoll, oder $p = 0{,}5361 \,.\, h = 0{,}5361 \,.\, 30{,}5 = 16{,}35$ Pfund. 2) Wenn der Waſſermanometerſtand 21 Zoll hoch iſt, ſo entſpricht demſelben bei dem Barometerſtande von 27 Zoll die Expanſivkraft $h = 27 + \frac{21}{13{,}6} = 28{,}54$ Zoll $= 15{,}34$ Pfund. 3) Wenn das ſtatiſche Moment eines unbelaſteten Sicherheitsventiles 10 Zollpfd., das ſtatiſche Moment des 10 Pfd. ſchweren Laufgewichtes $= 15 \,.\, 10 = 150$ Zollpfd., der Hebelarm des Ventiles, von Ventil- bis Drehaxe gemeſſen, 4 Zoll und der Halbmeſſer des Ventiles 1,5 Zoll beträgt, ſo iſt die Differenz der Drücke auf beide Ventilflä-

chen: $p - p_1 = \frac{150 + 10}{\pi\,(1{,}5)^2 \,.\, 4} = \frac{160}{9\pi} = 5{,}66$ Pfund. Wäre der Atmoſphärendruck $p_1 = 14$ Pfd, ſo fiele hiernach die Spannung der Luft unter dem Ventile: $p = 19{,}66$ Pfd aus.

Mariotte'ſches Geſetz.

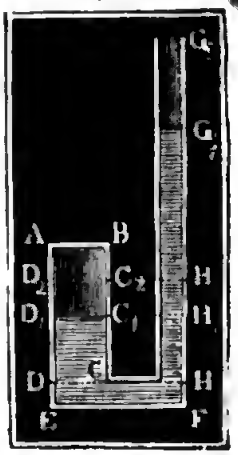
§. 329. Die Spannung der Gaſe wächſt mit der Verdichtung derſelben; je mehr man ein gewiſſes Luftquantum zuſammendrückt oder verdichtet, je größer wird auch deſſen Spannkraft, und je mehr man daſſelbe ſich ausdehnen oder verdünnen läßt, deſto kleiner zeigt ſich auch ſeine Expanſivkraft. Das Verhältniß, in welchem die Spannkraft und die Dichtigkeit oder das Volumen der Gaſe zu einander ſtehen, wird durch das von Mariotte entdeckte und nach ihm benannte Geſetz ausgedrückt. Es behauptet, daß die Dichtigkeit einer und derſelben Luftmenge der Spannkraft derſelben proportional, oder, da die Räume, welche von einer und derſelben Maſſe eingenommen werden, den Dichtigkeiten umgekehrt proportional ſind, daß ſich die Volumina einer und derſelben Gasmaſſe umgekehrt wie deren Expanſivkräfte verhalten. Wird demnach eine gewiſſe Luftmenge bis auf die Hälfte ihres anfänglichen Volumens zuſammengedrückt, ihre Dichtigkeit alſo verdoppelt, ſo ſtellt ſich auch ihre Spannung noch einmal ſo groß heraus, als anfänglich, und wird dagegen ein gewiſſes Luftquantum bis auf das Dreifache ihres anfänglichen Raumes ausgedehnt, alſo ſeine Dichtigkeit bis auf den dritten Theil herabgezogen, ſo bleibt auch die Elaſticität deſſelben nur ein Drittel von der anfänglichen Spannkraft. Iſt z. B. unter dem Kolben EF eines Cylinders AC, Fig. 473, gewöhnliche atmoſphäriſche Luft, welche anfänglich auf jeden Quadratzoll mit 15 Pfd. drückt, ſo wird dieſelbe mit 30 Pfd. drücken, wenn man den Kolben nach E_1F_1 geſchoben und dadurch die eingeſchloſſene Luft bis auf die Hälfte ihres anfänglichen Volumens zuſammengedrückt hat, und es wird dieſe Kraft $3 \,.\, 15 = 45$ Pfund betragen, wenn der Kolben nach $E_2\,F_2$ gekommen iſt und zwei Drittel der ganzen Höhe zurückgelegt hat. Iſt der Inhalt der Kolbenfläche 1 Quadratfuß, ſo beträgt der Atmoſphärendruck gegen dieſelbe $= 144 \,.\, 15{,}01 = 2161$ Pfund; um daher den Kolben um die halbe Cylinderhöhe niederzudrücken, ſind 2161 Pfd., und um ihn um zwei Drittel dieſer Höhe niederzuſchieben, ſind $2 \,.\, 2161 = 4322$ Pfd. aufzuſetzen u. ſ. w.

Fig. 473.



Ebenſo läßt ſich durch Zugießen von Queckſilber in die mit dem Luftcylinder AC, Fig. 474 (ſ. a. f. Seite), communicirende Röhre GH das Mariotte'ſche Geſetz prüfen. Hat man anfänglich durch die Queckſil-

Fig. 474.



bermaſſe $DEFH$ eine Luftſäule AC abgeſperrt, welche mit der äußeren Luft gleiche Spannkraft beſitzt, und ſpäter durch zugegoſſenes Queckſilber den Luftcylinder bis auf die Hälfte, auf das Viertel u. ſ. w. des anfänglichen Volumens zuſammengedrückt, ſo wird man finden, daß die Niveauabſtände G_1H_1, G_2H_2 u. ſ. w. der Oberfläche des Queckſilbers der einfachen, dreifachen Barometerhöhe b u. ſ. w. gleich ſind, daß alſo, wenn man hierzu die dem äußeren Luftdrucke entſprechende einfache Höhe addirt, die Spannkraft zweimal, viermal u. ſ. w. ſo groß iſt, als beim anfänglichen Volumen. Mariotte'ſches Geſetz.

Sind h und h_1 oder p und p_1 die Spannkräfte, γ und γ_1 die entſprechenden Dichtigkeiten, und V und V_1 die zugehörigen Volumina einer und derſelben Luftmenge, ſo hat man nach dem angegebenen Geſetze:

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V} = \frac{h}{h_1} = \frac{p}{p_1}; \text{ daher}$$

$$\gamma_1 = \frac{h_1}{h}\gamma = \frac{p_1}{p}\gamma \text{ und } V_1 = \frac{h}{h_1}V = \frac{p}{p_1}V.$$

Hiernach läßt ſich die Dichtigkeit und auch das Volumen von einer Spannung auf die andere reduciren.

Beiſpiele. 1) Wenn bei einer Gebläſemaſchine der Manometerſtand 3 Zoll mißt, während der Barometerſtand 28 Zoll beträgt, ſo iſt die Dichtigkeit des Windes $= \frac{28+3}{28} = \frac{31}{28} = 1{,}107$ mal ſo groß, als die der äußeren Luft.

2) Wenn ein Cubikfuß atmoſphäriſche Luft bei 28 Zoll Barometerſtand $\frac{66}{770}$ Pfund wiegt, ſo hat er bei 34 Zoll Barometerſtand ein Gewicht von

$$\frac{66}{770} \cdot \frac{34}{28} = \frac{2244}{21560} = 0{,}1041 \text{ Pfund.}$$

Fig. 475.

§. 330. Die Arbeit, welche aufzuwenden iſt, um ein gewiſſes Luftquantum bis zu einem gewiſſen Grade zu verdichten, ſo wie die Arbeit, welche die Luft bei ihrem Ausdehnen zu verrichten vermag, läßt ſich nicht ſogleich angeben, weil die Expanſivkraft in jedem Momente des Verdichtens oder Ausdehnens eine andere iſt, wir müſſen uns daher nach einer beſonderen Formel zur Berechnung dieſes Werthes umſehen. Denken wir uns in einem Cylinder AC, Fig. 475, durch einen Kolben EF eine gewiſſe Luftmaſſe AF abgeſperrt, und unter-

Mariotteſches Geſetz.

ſuchen wir, welche Arbeit aufzuwenden iſt, um den Kolben um einen gewiſſen Weg $EE_1 = FF_1$ fortzuſchieben. Iſt die anfängliche Spannung $= p$ und die anfängliche Höhe des Cylinderraumes $= s$, dagegen die Spannung nach Durchlaufung des Raumes $EE_1 = p_1$, und die Höhe des noch übrigbleibenden Luftvolumens $= s_1$, ſo gilt die Proportion

$$p_1 : p = s : s_1, \text{ und giebt } p_1 = \frac{s}{s_1}\, p.$$

Während Durchlaufung eines ſehr kleinen Wegtheiles $E_1E_2 = \sigma$ läßt ſich die Spannung p_1 als unveränderlich anſehen und es iſt daher die dabei aufzuwendende mechaniſche Arbeit $= A\, p_1 \sigma = \frac{A p s \sigma}{s_1}$, wofern noch A die Kolbenfläche bezeichnet.

Den Lehren der Logarithmen zufolge *) iſt aber eine ſehr kleine Größe $y = Log.\ nat.\ (1 + y) = 2{,}3026\ Log.\ (1 + y)$, wenn $Log.\ nat.$ den natürlichen und $Log.$ den gemeinen Logarithmen bezeichnet; es läßt ſich folglich auch $Aps\ \frac{\sigma}{s_1} = Aps\ Log.nat.\left(1 + \frac{\sigma}{s_1}\right)$

$= 2{,}3026\ Aps\ Log.\left(1 + \frac{\sigma}{s_1}\right)$ ſetzen. Nun iſt aber

$$Log.\ nat\left(1 + \frac{\sigma}{s_1}\right) = Log.nat.\left(\frac{s_1 + \sigma}{s_1}\right)$$

$= Log.nat.(s_1 + \sigma) - Log.\ nat.\ s_1$; daher jene Elementararbeit auch

$$= Aps\ [Log.\ nat.\ (s_1 + \sigma) - Log.\ nat.\ s_1].$$

Denken wir uns den ganzen Weg EE_1 aus n Wegtheilen wie σ beſtehend, ſetzen wir alſo $EE_1 = n\sigma$, ſo finden wir die allen dieſen Theilen entſprechenden Arbeiten, wenn wir in der letzten Formel nach und nach ſtatt s_1, $s_1 + \sigma$, $s_1 + 2\sigma$, $s_1 + 3\sigma$, ... bis $s_1 + (n-1)\,\sigma$ und ſtatt $s_1 + \sigma$, $s_1 + 2\sigma$, $s_1 + 3\sigma$ u. ſ. w. bis $s_1 + n\sigma$ oder s ſetzen, und finden nun durch Summiren den vollſtändigen Arbeitsaufwand beim Durchlaufen des Weges $s - s_1$:

$$L = Aps \left\{ \begin{array}{l} Log.nat.\ (s_1 + \sigma) - Log.nat.\ s_1 \\ Log.nat.\ (s_1 + 2\sigma) - Log.nat.\ (s_1 + \sigma) \\ Log.nat.\ (s_1 + 3\sigma) - Log.nat.\ (s_1 + 2\sigma) \\ \quad . \qquad\qquad . \\ \quad . \qquad\qquad . \\ \quad . \qquad\qquad . \\ Log.nat.\ (s_1 + n\sigma) - Log.nat.\ [s_1 + (n-1)\sigma] \end{array} \right\}$$

$$= Aps\ [Log.nat.\ (s_1 + n\sigma) - Log.nat.\ s_1]$$

$$= Aps\ (Log.\ nat.\ s - Log.\ nat.\ s_1) = Aps\ Log.nat.\left(\frac{s}{s_1}\right),$$

*) Nach §. 176 iſt für ein kleines y, $e^y = 1 + y$, daher $Log.\ nat.\ (1+y) = y$ zu ſetzen.

da sich immer ein Glied in der einen Zeile mit einem Gliede der folgenden Zeile aufhebt. Mariotte'sches Gesetz.

Da $\frac{s}{s_1} = \frac{h_1}{h} = \frac{p_1}{p}$ ist, so läßt sich diese Arbeit auch setzen:

$$L = Aps \; Log.\,nat. \left(\frac{h_1}{h}\right) = Aps \; Log.\,nat. \left(\frac{p_1}{p}\right).$$

Nehmen wir den Kolbenweg $s - s_1 = x$ an, so finden wir hiernach auch die mittlere Kraft des Kolbens bei Verdichtung der Luft in dem Verhältnisse $\frac{h_1}{h} = \frac{p_1}{p}$, $P = \frac{L}{x} = Ap \frac{s}{x} \; Log.\,nat. \left(\frac{p_1}{p}\right)$.

Setzen wir $A = 1$ (Quadratfuß) und $s = 1$ (Fuß), so erhalten wir die Leistung $L = p \; Log.nat. \left(\frac{p_1}{p}\right) = 2{,}3026 p \, Log. \left(\frac{p_1}{p}\right)$. Diese Formel giebt die mechanische Arbeit an, welche aufzuwenden ist, um eine Raumeinheit (1 Cubikfuß) Luft aus der tieferen Pressung oder Spannung p in die höhere Spannung p_1 zu versetzen und sie dadurch auf das Volumen $\left(\frac{p}{p_1}\right)$ Cubikfuß zurückzuführen. Dagegen drückt $L = p_1 \; Log.nat. \left(\frac{p_1}{p}\right)$ $= 2{,}3026 \, p_1 \, Log. \left(\frac{p_1}{p}\right)$ die Arbeit aus, welche eine Raumeinheit Gas ausgiebt oder verrichtet, wenn sie aus der höheren Pressung p_1 in die tiefere p übergeht.

Um eine Luftmasse vom Volumen V und der Spannung p durch Verdichtung auf das Volumen V_1 und auf die Spannung $p_1 = \frac{V}{V_1} p$ zurückzuführen, ist hiernach die mechanische Arbeit $Vp \; Log.\,nat. \left(\frac{V}{V_1}\right)$ aufzuwenden nöthig, und wenn umgekehrt das Volumen V_1 bei der Spannung p_1 durch Verdünnung in das Volumen V und in die Spannung $p = \frac{V_1}{V} p_1$ übergeht, so wird die Arbeit $Vp \; Log.\,nat. \left(\frac{V}{V_1}\right) = V_1 p_1 Log.nat. \left(\frac{V}{V_1}\right)$ frei.

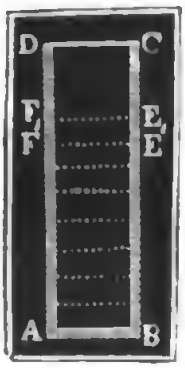
Beispiele. 1) Wenn ein Gebläse pro sec. 10 Cubikfuß Luft von 28 Zoll Spannung in Wind von 30 Zoll Spannung verwandelt, so ist die von demselben in jeder Secunde zu verrichtende Arbeit $= 17280 \,.\, 0{,}5361 \,.\, 28 \; Log.\,nat. \left(\frac{30}{28}\right)$ $= 259400$ ($Log.\,nat.\ 15 - Log.\,nat.\ 14$) $= 259400$ $(2{,}708050 - 2{,}639057)$ $= 259400 \,.\, 0{,}068993 = 17896$ Zollpfd. $= 1491$ Fußpfd. 2) Wenn bei einer Dampfmaschine unter der Kolbenfläche $A = \pi \,.\, 8^2 = 201$ Quadratzoll eine Dampfmasse von 15 Zoll Höhe und 3 Atmosphären Spannung steht, die denselben bei ihrer Ausdehnung um 25 Zoll fortschiebt, so ist die entwickelte und auf den Kolben übergetragene mechanische Arbeit:

$L = 201 \,.\, 3 \,.\, 15.01 \,.\, 15$ *Log. nat* $\left(\frac{15+25}{15}\right) = 135765$ *Log. nat.* $^{2}/_{3}$
$= 135765 \,.\, 0{,}98083 = 133162$ Zollpfd. $= 11097$ Fßpfd. und die mittlere Kolbenkraft ohne Rückſicht auf die Kolbenreibung und den Gegendruck,

$$= \frac{133162}{25} = 5326 \text{ Pfd.}$$

Luftſchichten. §. 331. Die in einem Gefäße eingeſchloſſene Luft iſt in verſchiedenen Tiefen von verſchiedener Dichtigkeit und Spannung, denn die oberen Luftſchichten drücken die unteren Luftſchichten, auf welchen ſie ruhen, zuſammen, es iſt deshalb nur in einer und derſelben Horizontalſchicht einerlei Dichtigkeit und einerlei Spannung, und es nehmen beide mit der Tiefe zu. Um aber das Geſetz dieſer Zunahme der Dichtigkeit von oben nach unten oder der Abnahme von unten nach oben zu finden, ſchlagen wir einen Weg ein, der dem des vorigen Paragraphen ſehr ähnlich iſt.

Fig. 476.



Denken wir uns eine vertikale Luftſäule AE, Fig. 476, vom Querſchnitte $AB = 1$, und von der Höhe $AF = s$. Setzen wir für die untere Luftſchicht die Dichtigkeit $= \gamma$ und die Spannung $= p$, und für die obere Luftſchicht EF die Dichtigkeit $= \gamma_1$ und die Spannkraft $= p_1$, ſo haben wir zunächſt $\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{p_1}{p}$. Iſt x die Höhe EE_1 der Schicht E_1F, ſo hat man ihr Gewicht, und daher auch die der Höhe x entſprechende Abnahme der Spannkraft: $y = 1 \,.\, x \,.\, \gamma_1 = \frac{x\gamma p_1}{p}$, und umgekehrt

$x = \frac{p}{\gamma} \,.\, \frac{y}{p_1}$, oder, wie im vorigen Paragraphen:

$$x = \frac{p}{\gamma} Log.nat.\left(1 + \frac{y}{p_1}\right) = \frac{p}{\gamma}\,[Log.\,nat.\,(p_1+y) - Log.nat.p_1].$$

Setzen wir hierin ſtatt p_1, nach und nach $p_1 + y$, $p_1 + 2y$, $p_1 + 3y$ u. ſ. w. bis $p = p_1 + (n-1)\,y$, und addiren wir die entſprechenden Luftſchichthöhen oder Werthe von x, ſo bekommen wir die Höhe der ganzen Luftſäule, ganz wie im vorigen Paragraphen:

$$s = \frac{p}{\gamma}\,(Log.\,nat.\,p - Log.\,nat.\,p_1) = \frac{p}{\gamma}\,Log.\,nat.\left(\frac{p}{p_1}\right) \text{ oder}$$

auch $s = \frac{p}{\gamma}\,Log.\,nat.\left(\frac{b}{b_1}\right) = 2{,}302\,\frac{p}{\gamma}\,Log.\left(\frac{b}{b_1}\right)$ wenn b und b_1 die den Spannkräften p und p_1 entſprechenden Barometerſtände in A und in F ſind.

Iſt umgekehrt die Höhe s gegeben, ſo läßt ſich die ihr entſprechende

Expansivkraft und Dichtigkeit der Luft berechnen. Es ist nämlich: Luftschichten.

$\frac{p'}{p_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = e^{\frac{s\gamma}{p}}$, also $\gamma_1 = \gamma e^{-\frac{s\gamma}{p}}$, wobei $e = 2{,}71828$ die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystemes bezeichnet.

Anmerkung. Diese Formel findet ihre Anwendung beim barometrischen Höhenmessen, welches im »Ingenieur« abgehandelt wird. Ohne Berücksichtigung der Temperatur u. s. w. läßt sich $s = 58604\ Log. \left(\frac{b}{b_1}\right)$ setzen.

Beispiele. 1) Wenn man den Barometerstand am Fuße eines Berges 339 und am Gipfel desselben 315 Linien gefunden hat, so ergiebt sich die Höhe dieses Berges: $s = 58604 . Log. {}^{339}/_{315} = 58604 . 0{,}031889 = 1869$ Fuß.

2) Für die Dichtigkeit der Luft auf einem 10000 Fuß hohen Berge hat man $Log. \frac{\gamma}{\gamma_1} = {}^{10000}/_{58604} = 0{,}1706$, daher $\frac{\gamma}{\gamma_1} = 1{,}481$ und $\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{1}{1{,}481} = 0{,}675$; es ist also dieselbe nur 67½ Procent von der Dichtigkeit am Fuße.

§. 332. Einen wesentlichen Einfluß auf die Dichtigkeit und Expansivkraft der Gäse hat die Wärme oder Temperatur. Je mehr die in einem Gefäße eingeschlossene Luft erwärmt wird, desto größer zeigt sich auch die Expansivkraft derselben, und je mehr die Temperatur der in einem Gefäße durch einen Kolben abgeschlossenen Luft erhöht wird, desto mehr dehnt sich auch die Luft aus und schiebt den Kolben auswärts. Versuche von Gay-Lussac, welche in neueren Zeiten von Rudberg, Magnus und Regnault wiederholt worden sind, haben ergeben, daß bei gleicher Dichtigkeit die Expansivkraft, und bei gleicher Expansivkraft das Volumen einer und derselben Luftmenge wie die Temperatur wächst. Man kann dieses Gesetz dem Mariotte'schen an die Seite setzen, und es zur Unterscheidung das Gay-Lussac'sche Gesetz nennen. Nach den neuesten Versuchen nimmt die Expansivkraft eines gewissen Luftvolumens bei Erwärmung vom Frost- bis Siedepunkt um 0,367 ihres anfänglichen Werthes zu, oder es wächst bei dieser Temperaturerhöhung das Volumen einer gewissen Luftmasse bei unveränderlicher Spannung um 36,7 Procent. Giebt man die Temperatur nach Centesimalgraden an, deren der Raum zwischen Frost- und Siedepunkt 100 enthält, so folgt die Ausdehnung auf jeden Grad $= 0{,}00367$ und auf t^0 Temperatur $= 0{,}00367 . t$; bedient man sich dagegen der Réaumur'schen Grade, von denen 80 auf den Abstand zwischen dem Frost- und Siedepunkt gehen, so hat man die Ausdehnung auf jeden Grad 0,00459, also für $t^0 = 0{,}00459 . t$. Diese Verhältnißzahl gilt eigentlich nur für die atmosphärische Luft; den übrigen Gasen entsprechen meist wenig größere Werthe, auch nimmt selbst bei der atmosphärischen Luft dieser Coefficient mit der Temperatur wenig zu. Gay-Lussac'sches Gesetz.

Wird eine Luftmasse vom anfänglichen Volumen V_0 und von der Tem-

Gay-Luſſac'ſches Geſetz.

peratur Null um t Grad erwärmt, ohne eine andere Spannung anzunehmen, ſo iſt das neue Volumen $V = (1 + 0{,}00367\ t)\ V_0$, und erhält es die Temperatur t_1, ſo entſteht das Volumen $V_1 = (1 + 0{,}00367\ t_1)\ V_0$, und es entſteht durch Diviſion das Volumenverhältniß

$$\frac{V}{V_1} = \frac{1 + 0{,}00367\ t}{1 + 0{,}00367\ t_1},$$

dagegen das entſprechende Dichtigkeitsverhältniß

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V} = \frac{1 + 0{,}00367\ t_1}{1 + 0{,}00367\ t}.$$

Geht außerdem noch eine Veränderung in der Spannung vor, iſt p_0 die Spannung bei Null, p die bei t und p_1 die bei t_1 Wärme, ſo hat man

$V = (1 + 0{,}00367\ t)\ \frac{p_0}{p}\ V_0$, ferner $V_1 = (1 + 0{,}00367\ t_1)\ \frac{p_0}{p_1}\ V_0$,

daher $\frac{V}{V_1} = \frac{1 + 0{,}00367\ t}{1 + 0{,}00367\ t_1} \cdot \frac{p_1}{p}$ und $\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1 + 0{,}00367 . t_1}{1 + 0{,}00367 . t} \cdot \frac{p}{p_1}$,

oder $\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1 + 0{,}00367\ .\ t_1}{1 + 0{,}00367\ .\ t} \cdot \frac{b}{b_1}$.

Beiſpiel. Wenn eine Luftmaſſe von 800 Cubikfuß Inhalt, 15 Pfd. Spannkraft und 10 Grad Wärme durch das Gebläſe und durch den Erwärmungsapparat eines Hohofens in eine Spannung von 19 Pfd., und in eine Temperatur von 200 Grad verſetzt wird, ſo nimmt ſie zuletzt das größere Volumen

$$V_1 = \frac{1 + 0{,}00367\ .\ 200}{1 + 0{,}00367\ .\ 10} \cdot {}^{15}/_{19} \cdot 800 = \frac{1{,}734}{1{,}0367} \cdot \frac{12000}{19} = 1056 \text{ Cubikfuß ein.}$$

Dichtigkeit der Luft.

§. 333. Mit Hülfe der Formel am Ende des vorigen Paragraphen läßt ſich nun γ durch die einer gegebenen Temperatur und Spannung der Luft entſprechende Dichtigkeit berechnen. Durch genaue Wägungen und Meſſungen hat man das Gewicht von einem Cubikmeter atmoſphäriſche Luft bei Null Grad Wärme und 0,76 Meter Barometerſtand = 1,2995 Kilogramm gefunden. Da ein Cubikfuß (preuß.) = 0,030916 Cubikmeter und 1 Kilogramm = 2,13809 Pfund iſt, ſo iſt bei den angegebenen Verhältniſſen die Dichtigkeit der Luft = 0,030916 . 2,13809 . 1,2995 = 0,08590 Pfund. Iſt nun die Temperatur = t^0 Cent., ſo folgt die

Dichtigkeit für das franz. Maaß $\gamma = \frac{1{,}2995}{1 + 0{,}00367\ t}$ Kilogramm,

und für das preuß. Maaß $\gamma = \frac{0{,}08590}{1 + 0{,}00367 . t}$ Pfund.

Weicht auch noch die Expanſivkraft von der mittleren ab, iſt alſo der Barometerſtand nicht 0,76 Meter, ſondern b, ſo erhält man

$$\gamma = \frac{1{,}2995}{1 + 0{,}00367 . t} \cdot \frac{b}{0{,}76} = \frac{1{,}71\ .\ b}{1 + 0{,}00367\ t} \text{ Kilogr., oder}$$

wenn man, wie gewöhnlich b in Pariſer Zoll giebt,

$$\gamma = \frac{0{,}08565}{1 + 0{,}00367 . t} \cdot \frac{b}{28} = \frac{0{,}003058 . b}{1 + 0{,}00367\ t} \text{ Pfund.}$$

Sehr oft drückt man aber auch die Expansivkraft durch den Druck p auf das Quadratcentimeter oder auf den Quadratzoll aus, deshalb ist denn Dichtigkeit der Luft.

der Faktor $\frac{p}{1{,}0336}$ oder $\frac{p}{15{,}01}$ einzuführen, und es folgt so

$$\gamma = \frac{1{,}2995}{1 + 0{,}00367\,.\,t} \cdot \frac{p}{1{,}0336} = \frac{1{,}2572\,p}{1 + 0{,}00367\,t} \text{ Kilogr.}$$

$$\text{oder } \gamma = \frac{0{,}08565}{1 + 0{,}00367\,.\,t} \cdot \frac{p}{15{,}01} = \frac{0{,}005706\,p}{1 + 0{,}00367\,.\,t} \text{ Pfund.}$$

Bei gleicher Temperatur und Expansivkraft ist die Dichtigkeit des Wasserdampfes $^5/_8$ von der Dichtigkeit der atmosphärischen Luft, weshalb man für ihn

$$\gamma = \frac{0{,}8122}{1 + 0{,}00367\,t} \cdot \frac{p}{1{,}0336} = \frac{0{,}7857\,p}{1 + 0{,}00367\,t} \text{ Kilogramm}$$

$$\text{oder } \gamma = \frac{0{,}05353}{1 + 0{,}00367\,.\,t} \cdot \frac{p}{15{,}01} = \frac{0{,}003566\,p}{1 + 0{,}00367\,t} \text{ Pfund}$$

erhält.

Beispiele. 1) Welches Gewicht hat der in einem cylindrischen Regulator von 40 Fuß Länge und 6 Fuß Weite enthaltene Wind bei 10 Grad Wärme und 18 Pfund Pressung? Die Dichtigkeit dieses Windes ist

$\gamma = \frac{0{,}005706\,.\,18}{1{,}0367} = \frac{0{,}10271}{1{,}0367} = 0{,}09908$ Pfund; der Fassungsraum des Regulatorkessels aber ist $= \pi\,.\,3^2\,.\,40 = 1131$ Cubikfuß, daher wiegt die gedachte Windmasse $= 0{,}09908\,.\,1131 = 112$ Pfund. 2) Eine Dampfmaschine verbraucht in der Minute 500 Cubikfuß Dampf von 107° Wärme und 36 Pariser Zoll Spannkraft, wie viel Pfund Wasser bedarf sie zur Erzeugung dieser Dampfmenge? Die Dichtigkeit dieses Dampfes ist

$= \frac{0{,}05353}{1 + 0{,}00367\,.\,107} \cdot \frac{36}{28} = \frac{0{,}05353\,.\,36}{1{,}393\,.\,18} = 0{,}0494$ Pfund, daher das Gewicht von 500 Cubikfuß, oder das Gewicht der entsprechenden Wassermenge

$= 500\,.\,0{,}0494 = 24{,}7$ Pfund.

Fig. 477.

§. 334. Mit Hilfe der in den letzten Paragraphen gewonnenen Ergebnisse läßt sich nun auch die Theorie des Luftmanometers entwickeln. Dasselbe besteht aus einer gut calibrirten, oben mit Luft und unten mit Quecksilber angefüllten Barometerröhre AB, Fig. 477, und aus einem ebenfalls Quecksilber enthaltenden Gefäße CE, welches mit dem Gase oder Dampfe, dessen Spannkraft man wissen will, durch ein Rohr GK in Communication gesetzt wird. Aus den Höhen der Luft- und Quecksilbersäulen läßt sich diese Spannkraft, wie folgt, berechnen. Gewöhnlich ist das Instrument so einge- Luftmanometer.

Luftmanometer.

richtet, daß das Queckſilber in der Röhre mit dem Queckſilber im Gefäße auf gleichem Niveau ſteht, wenn die Temperatur der eingeſchloſſenen Luft $t = 10$ Grad und die Spannung im Raume EH dem mittleren Atmoſphärendrucke $b = 0{,}76$ Meter oder 28 Zoll gleich iſt.

Iſt aber beim Barometerſtande b, in EH eine Queckſilberſäule h_1 in die Röhre geſtiegen und die Länge der übrigbleibenden Luftſäule h_2, ſo hat man die Spannung derſelben $= \frac{h_1 + h_2}{h_2} b$, und daher

$b_1 = h_1 + \frac{h_1 + h_2}{h_2} b$. Findet noch ein Temperaturwechſel ſtatt, iſt die Temperatur bei der Beobachtung von h_1 und h_2 nicht wie anfänglich $= t$, ſondern t_1, ſo hat man gar die Spannung der Luftſäule AS: $= \frac{h_1 + h_2}{h_2} \cdot \frac{1 + 0{,}00367 \cdot t_1}{1 + 0{,}00367 \cdot t} \cdot b$, und daher den in Frage ſtehenden Barometerſtand $b_1 = h_1 + \frac{h_1 + h_2}{h_2} \cdot \frac{1 + 0{,}00367 \cdot t_1}{1 + 0{,}00367 \cdot t} \cdot b$.

Für $b = 28$ Zoll (Pariſ.) und $t = 10^0$ C., folgt

$b_1 = h_1 + 27 (1 + 0{,}00367\, t_1) \frac{h}{h_2}$, wobei noch $h = h_1 + h_2$ die ganze Röhrenlänge, bis Queckſilberſpiegel HR gemeſſen, bezeichnet.

Aus dem Barometerſtande b_1 folgt die Preſſung auf den Quadratzoll (preuß.) $p = \frac{15{,}01}{28} h_1 + 15{,}01 \cdot {}^{27}/_{28} (1 + 0{,}00367\, t_1) \frac{h}{h_2}$

$= 0{,}5361\, h_1 + 14{,}47 (1 + 0{,}00367\, t) \frac{h}{h_2}$ Pfund.

Beiſpiel. Wenn ein Luftmanometer von 25 Zoll Länge bei 21° Wärme eine Luftſäule von 12 Zoll Länge zeigt, ſo iſt der entſprechende Barometerſtand $b_1 = 25 - 12 + 27 (1 + 0{,}00367 \cdot 21) \cdot {}^{28}/_{12} = 13 + 9 \cdot 1{,}07707 \cdot {}^{28}/_{4}$ $= 13 + 60{,}58 = 73{,}58$ Zoll und der Druck auf einen Quadratzoll $= 0{,}5361 \cdot 73{,}58 = 39{,}45$ Pfund.

Sechster Abſchnitt.

Dynamik flüſſiger Körper.

Erſtes Kapitel.

Die allgemeinen Lehren über den Ausfluß des Waſſers aus Gefäßen.

§. 335. Die Lehre vom Ausfluſſe (franz. écoulement; engl. efflux) der Flüſſigkeiten aus Gefäßen macht den erſten Haupttheil der Hydrodynamik aus. Wir unterſcheiden zuerſt den Ausfluß der Luft und den Ausfluß des Waſſers, und dann noch den Ausfluß bei veränderlichem und den bei unveränderlichem Drucke von einander. Zunächſt iſt von dem Ausfluſſe des Waſſers unter conſtantem Drucke die Rede. Als conſtant läßt ſich aber der Druck des Waſſers annehmen, wenn von einer Seite ebenſoviel Waſſer zutritt, als auf einer andern Seite ausfließt, oder wenn die in einer gewiſſen Zeit ausfließende Waſſermenge in Beziehung auf das Gefäß ſehr klein iſt. Die Hauptaufgabe, um deren Löſung es ſich hier handelt, iſt die Beſtimmung der Waſſermenge (franz. dépense, engl. discharge), welche unter gegebenem Drucke in einer beſtimmten Zeit durch eine gegebene Oeffnung (franz. orifice; engl. aperture) ausfließt. Ausfluß.

Iſt die in jeder Secunde ausfließende Waſſermenge $= Q$, ſo hat man für die im Laufe von t Secunden unter unveränderlichem Drucke ausfließende Waſſermenge: $Q_1 = Qt$. Um aber die Ausflußmenge pro Secunde zu erhalten, iſt es nöthig, die Größe der Oeffnung und die Geſchwindigkeit der ausfließenden Waſſerelemente zu kennen. Der Einfachheit der Unterſuchung wegen, nehmen wir zunächſt an, daß die Waſſerelemente in geraden und parallelen Linien ausſtrömen und deshalb einen prismatiſchen

Ausfluß

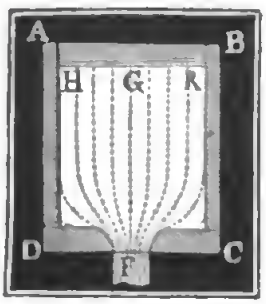
Waſſerſtrahl (franz. veine, conrant de fluide; engl. stream of the fluid) bilden. Iſt nun F der Querdurchſchnitt des Waſſerſtrahls und v die Geſchwindigkeit des Waſſers oder eines jeden Waſſerelementes, ſo bildet die Ausflußmenge pro Secunde ein Prisma von der Baſis F und Höhe v, es iſt alſo $Q = Fv$ Raumeinheiten und $G = Fv\gamma$ Gewichtseinheiten, wofern γ die Dichtigkeit des Waſſers oder der ausſtrömenden Flüſſigkeit bezeichnet.

Beiſpiele. 1) Wenn durch eine Schutzöffnung von 1,7 Quadratfuß das Waſſer mit 14 Fuß Geſchwindigkeit ausfließt, ſo beträgt die Waſſermenge pr. Sec. $Q = 14 . 1{,}7 = 23{,}8$ Cubikfuß, und daher die ſtündlich ausfließende Waſſermenge $= 23{,}8 . 3600 = 85680$ Cubikfuß. 2) Wenn durch eine Mündung von 5 Quadratzoll in 3 Minuten 10 Secunden 264 Cubikfuß Waſſer ausgefloſſen ſind, ſo betrug die mittlere Ausflußgeſchwindigkeit

$$v = \frac{Q_1}{Ft} = \frac{264}{\frac{5}{144} . 190} = \frac{264 . 144}{5 . 190} = 40 \text{ Fuß}.$$

Ausflußgeſchwindigkeit.

Fig. 478.



§. 336. Denken wir uns ein mit Waſſer angefülltes Gefäß AC, Fig. 478, mit einer innen abgerundeten horizontalen Ausmündung F, welche nur einen ſehr kleinen Theil vom Querſchnitte oder der Bodenfläche CD einnimmt. Setzen wir die während des Ausfluſſes als unveränderlich anzuſehende Druckhöhe FG (franz. charge d'eau; engl. height of water) $= h$, die Ausflußgeſchwindigkeit $= v$, und die in jeder Secunde ausfließende Waſſermenge $= Q$, alſo ihr Gewicht $Q\gamma$. Die mechaniſche Arbeit, welche dieſe Waſſermaſſe beim Herabſinken von der Höhe h zu verrichten vermag, iſt $= Qh\gamma$, und die mechaniſche Arbeit, welche die ausfließende Maſſe $Q\gamma$ in ſich aufnimmt, indem ſie aus der Ruhe in die Geſchwindigkeit v übergeht, iſt $\frac{v^2}{2g} Q\gamma$ (§. 71). Findet nun ein Arbeitsverluſt beim Durchgange durch die Oeffnung nicht ſtatt, ſo ſind beide Arbeiten einander gleich, es iſt alſo $hQ\gamma = \frac{v^2}{2g} Q\gamma$ d. i.

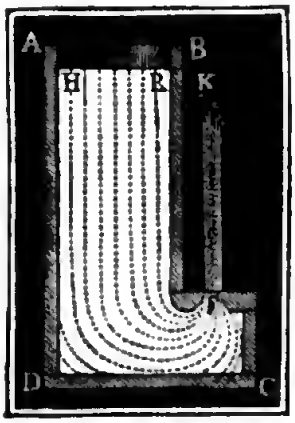
$h = \frac{v^2}{2g}$ und umgekehrt, $v = \sqrt{2gh}$, oder in Fußmaaß,

$h = 0{,}016\, v^2$, und $v = 7{,}906\, \sqrt{h}$.

Es iſt alſo die Geſchwindigkeit des ausfließenden Waſſers ſo groß wie die Endgeſchwindigkeit eines von der Druckhöhe frei herabfallenden Körpers.

Die Richtigkeit dieſes Geſetzes läßt ſich auch durch folgenden Verſuch

Fig. 479.



Ausflußgeſchwindigkeit

erweiſen. Wenn man im Gefäße AC, Fig. 479, eine nach oben gerichtete Oeffnung anbringt, ſo ſteigt der Waſſerſtrahl FK vertikal in die Höhe und erreicht beinahe das Niveau HR des Waſſers im Gefäße, und es läßt ſich annehmen, daß er es vollkommen erreichen würde, wenn alle Hinderniſſe, wie z. B. Widerſtand der Luft, Reibung an den Gefäßwänden, Störung durch das zurückfallende Waſſer u. ſ. w. beſeitigt wären. Da aber ein auf eine ſenkrechte Höhe h aufſteigender Körper die Anfangsgeſchwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ hat (§. 15), ſo folgt hiernach auch, daß die Ausflußgeſchwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ ſein müſſe.

Für eine andere Druckhöhe h_1 iſt die Geſchwindigkeit $v_1 = \sqrt{2gh_1}$, man hat daher $v : v_1 = \sqrt{h} : \sqrt{h_1}$; es verhalten ſich alſo die Ausflußgeſchwindigkeiten wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen.

Beiſpiele. 1) Die Waſſermenge, welche in jeder Secunde durch eine 10 Quadratzoll große Oeffnung unter dem Drucke von 5 Fuß ausſtrömt, iſt $Q = Fv = 10 . 12\sqrt{2gh} = 120 . 7{,}906\sqrt{5} = 948{,}7 . 2{,}236 = 2121$ Cubikzoll.
2) Damit durch eine Oeffnung von 6 Quadratzoll in der Secunde 252 Cubikzoll Waſſer ausfließen, iſt die Druckhöhe $h = \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{F}\right)^2 = 0{,}016\left(\frac{252}{6}\right)^2$ $= 0{,}016 . 42^2 = 28{,}22$ Zoll nöthig.

§. 337. Wenn das Waſſer mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit c zufließt, ſo kommt zur Arbeit $h . Q\gamma$ noch die der Geſchwindigkeitshöhe $h_1 = \frac{c^2}{2g}$ entſprechende Arbeit $\frac{c^2}{2g} Q\gamma$, weshalb nun zu ſetzen iſt

Zu- und Ausflußgeſchwindigkeit.

$(h + h_1) Q\gamma = \frac{v^2}{2g} Q\gamma$, oder $h + h_1 = \frac{v^2}{2g}$ und daher die Ausflußgeſchwindigkeit $v = \sqrt{2g(h + h_1)} = \sqrt{2gh + c^2}$.

Da bei einem beſtändig voll erhaltenen Gefäße die zufließende Waſſermaſſe ebenſo groß iſt, wie die ausfließende Maſſe Q, ſo läßt ſich $Gc = Fv$ ſetzen, wofern G den Inhalt des Querſchnittes HR (Fig. 478) vom zuſtrömenden Waſſer bezeichnet. Setzen wir hiernach $c = \frac{F}{G} v$, ſo erhalten wir $h = \frac{v^2}{2g} - \left(\frac{F}{G}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \left[1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}$, und daher

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}}.$$

Zu- und Ausflußgeſchwindigkeit.

Dieſer Formel zufolge nimmt die Geſchwindigkeit um ſo mehr zu, je größer das Querſchnittsverhältniß $\frac{F}{G}$ iſt, nach ihr fällt die Geſchwindigkeit am kleinſten, nämlich $= \sqrt{2gh}$ aus, wenn der Querſchnitt F der Ausflußöffnung ſehr klein iſt gegen den Querdurchſchnitt G der Zuflußöffnung und es nähert ſich dieſelbe immer mehr und mehr dem Unendlichen, je kleiner der Unterſchied zwiſchen dieſen Mündungen iſt. Wenn $F = G$, alſo $\frac{F}{G} = 1$, ſo iſt $v = \frac{\sqrt{2gh}}{0} = \infty$ und alſo auch $c = \infty$. Dieſer unendliche Werth iſt ſo zu verſtehen, daß bei einem bodenloſen Gefäße AC, Fig. 480, das Waſſer mit einer unmeßbar großen Geſchwindigkeit zu- und abfließen muß, damit der Waſſerſtrahl GF die Ausmündung F ausfüllt.

Fig. 480.

Setzt man $v = \frac{Gc}{F}$ ein, ſo erhält man

$$h = \left[\left(\frac{G}{F}\right)^2 - 1\right]\frac{c^2}{2g}, \text{ daher } F = \frac{G}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{c^2}}},$$

welcher Ausdruck anzeigt, daß der Querſchnitt F des ausfließenden Strahles bei einer endlichen Zuflußgeſchwindigkeit ſtets kleiner iſt als der Querſchnitt G des zufließenden Strahles, und daß er daher die Ausmündung gar nicht ausfüllt, wenn dieſelbe größer iſt, als $\frac{G}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{c^2}}}$.

Anmerkung. Die Richtigkeit der ſchon von Daniel Bernoulli aufgeſtellten Formel $v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}}$ iſt ſpäter von Vielen in Zweifel gezogen worden; wie unbegründet aber die gemachten Ausſtellungen ſind, habe ich in der allgemeinen Maſchinenencyclopädie, Artikel »Ausfluß«, zu beweiſen geſucht.

Beiſpiel. Wenn aus einem prismatiſchen Gefäße von 60 Quadratzoll Querſchnitt das Waſſer durch eine 5 Zoll weite kreisrunde Bodenöffnung bei einer Druckhöhe von 6 Fuß ausfließt, ſo iſt die Geſchwindigkeit $v = \frac{7{,}906\sqrt{6}}{\sqrt{1 - \left(\frac{25\pi}{4.60}\right)^4}}$

$$= \frac{7{,}906 \,.\, 2{,}449}{\sqrt{1 - (0{,}327)^4}} = \frac{19{,}362}{\sqrt{0{,}8931}} = \frac{19{,}362}{0{,}945} = 20{,}49 \text{ Fuß}.$$

Ausflußgeſchwindigkeit, Druck und Dichtigkeit.

§. 338. Die gefundenen Formeln gelten nur dann, wenn der Luftdruck auf den Waſſerſpiegel ebenſo groß iſt, wie der Druck der Luft gegen die Ausmündung, ſind aber dieſe Drücke verſchieden von einander, ſo hat

Fig. 481.

Ausflußgeſchwindigkeit Druck und Dichtigkeit

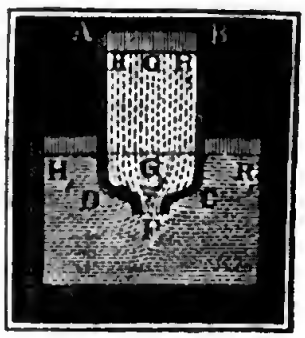
man dieſe Formeln zu ergänzen. Wird die Oberfläche HR, Fig. 481, durch einen Kolben K mit einer Kraft P_1 gedrückt, welcher Fall z. B. bei Feuerſpritzen vorkommt, ſo denke man ſich dieſelbe durch den Druck einer Waſſerſäule erſetzt. Iſt h_1 die Höhe dieſer Säule, und γ die Dichtigkeit der Flüſſigkeit, ſo ſetze man alſo $P_1 = Gh_1\gamma$. Führt man nun ſtatt h die um $h_1 = \frac{P_1}{G\gamma}$ vergrößerte Druckhöhe

$h + h_1 = h + \frac{P_1}{G\gamma}$ ein, ſo bekommt man für die Ausflußgeſchwindigkeit: $v = \sqrt{2g\left(h + \frac{P_1}{G\gamma}\right)}$, wobei wir überdieß $\frac{F}{G}$ ſehr klein vorausſetzen. Bezeichnen wir noch den Druck auf jede Flächeneinheit der Oberfläche G, durch p_1, ſo haben wir einfacher $\frac{P_1}{G} = p_1$, und daher $v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1}{\gamma}\right)}$. Bezeichnen wir endlich den Waſſerdruck im Niveau der Ausmündung durch p, ſo können wir auch ſetzen $p = \left(h + \frac{p_1}{\gamma}\right)\gamma$, alſo $h + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma}$, weshalb $v = \sqrt{2g\frac{p}{\gamma}}$ folgt.

Hiernach wächſt alſo die Ausflußgeſchwindigkeit wie die Quadratwurzel aus der Preſſung auf die Flächeneinheit, und umgekehrt wie die Quadratwurzel aus der Dichtigkeit der Flüſſigkeit. Bei gleichem Drucke fließt alſo z. B die 4mal ſo ſchwere Flüſſigkeit $\frac{1}{2}$mal ſo ſchnell aus, als die einfach ſchwere Flüſſigkeit. Da die Luft 770mal ſo leicht als Waſſer iſt, ſo würde ſie, wenn ſie unelaſtiſch wäre, $\sqrt{770} = 27\frac{3}{4}$mal ſo ſchnell ausfließen, als Waſſer.

Fließt das Waſſer nicht frei, ſondern unter Waſſer aus, ſo tritt wegen des Gegendruckes eine Verminderung der Ausflußgeſchwindigkeit ein. Iſt die Mündung F des Gefäßes AC, Fig. 482, um die Höhe $FG = h$ unter dem Waſſerſpiegel HR des Oberwaſſers, und um die Höhe $FG_1 = h_1$ unter dem Waſſerſpiegel H_1R_1 des Unterwaſſers, ſo hat man von oben nach unten die Preſſung $p = h\gamma$ und von unten nach oben die Gegenpreſſung $p_1 = h_1\gamma$, daher die Kraft des Ausfluſſes: $p - p_1 = (h - h_1)\gamma$, und die Ausflußgeſchwindigkeit: $v = \sqrt{2g\left(\frac{p - p_1}{\gamma}\right)} = \sqrt{2g(h - h_1)}$.

Fig. 482.



Ausflußgeſchwindigkeit, Druck und Dichtigkeit.

Beim Ausfluſſe unter Waſſer iſt alſo der Niveauabſtand $h - h_1$ zwiſchen den Waſſerſpiegeln als Druckhöhe anzuſehen.

Wird das Waſſer auf der Seite der Ausmündung durch die Kraft p und auf der Seite der Einmündung oder des Waſſerſpiegels durch die Kraft p_1 gepreßt, ſo hat man nun allgemein $v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1 - p}{\gamma}\right)}$.

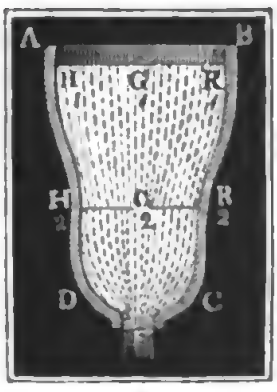
Beiſpiele. 1) Wenn der Kolben im 12 Zoll weiten Cylinder oder Stiefel einer Feuerſpritze mit 3000 Pfd. Kraft niedergedrückt wird und Hinderniſſe in den Röhren und Schläuchen nicht vorkämen, ſo würde das Waſſer mit der Geſchwindigkeit $v = \sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma}} = \sqrt{2g\frac{P_1}{G\gamma}} = 7{,}906\sqrt{\frac{3000}{\frac{\pi}{4}\cdot 66}}$

$= 7{,}906 \cdot \sqrt{\frac{2000}{11\pi}} = 60{,}14$ Fuß durch das Mundſtück am Schlauche ausſtrömen und, vertikal gerichtet, auf die Höhe $h = 0{,}016 \cdot v^2 = 57{,}9$ Fuß ſteigen.

2) Wenn das Waſſer in einen luftverdünnten Raum einſtrömt, z. B. in den Condenſator einer Dampfmaſchine, während es von oben oder an ſeiner freien Oberfläche von der Atmoſphäre gedrückt wird, ſo iſt die letzte Formel $v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1 - p}{\gamma}\right)}$ für die Ausflußgeſchwindigkeit in Anwendung zu bringen. Iſt die Druckhöhe des Waſſers $h = 3$ Fuß, der äußere Barometerſtand 27 und der innere 4 Pariſ. Zoll, ſo hat man $\frac{p_1 - p}{\gamma} = 27 - 4 = 23$ Pariſ. Zoll $= \frac{23}{12} \cdot 1{,}035 = 1{,}9837$ preuß. Fuß, oder als Waſſerſäule $= 13{,}6 \cdot 1{,}9837 = 26{,}98$ Fuß, und es folgt die Geſchwindigkeit des in den inneren oder luftverdünnten Raum einſtrömenden Waſſers: $v = 7{,}906\sqrt{3 + 26{,}98} = 7{,}906\sqrt{29{,}98} = 43{,}29$ Fuß. 3) Steht das Waſſer in der Speiſeröhre eines Dampfkeſſels 12 Fuß über der Oberfläche des Waſſers im Keſſel und iſt der Dampfdruck 20 Pfd., der Luftdruck aber nur 15 Pfd. auf den Quadratzoll, ſo beträgt die Geſchwindigkeit, mit welcher das Waſſer in den Keſſel eintritt, $v = 7{,}906\sqrt{12 + \frac{(15 - 20) \cdot 144}{66}} = 7{,}906\sqrt{12 - \frac{5 \cdot 144}{66}}$

$= 7{,}906\sqrt{1{,}0909} = 8{,}25$ Fuß.

Fig. 483.



Hydrauliſcher Druck.

§. 339. Wenn das in einem Gefäße eingeſchloſſene Waſſer in Bewegung iſt, ſo drückt es gegen die Gefäßwände ſchwächer, als wenn es in Ruhe bleibt. Man hat daher den hydrodynamiſchen oder hydrauliſchen Waſſerdruck von dem hydroſtatiſchen Drucke des Waſſers zu unterſcheiden. Iſt p_1 der Druck auf jede Einheit des Waſſerſpiegels $H_1R_1 = G_1$, Fig. 483, p der Druck außerhalb der Mündung F, und h die Druckhöhe FG_1, ſo hat man für die Ausflußgeſchwindigkeit

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1 - p}{\gamma}\right)} : \sqrt{1 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2}, \text{ oder}$$

$h + \frac{p_1 - p}{\gamma} = \left[1 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}$; iſt ferner in einem andern Querſchnitte $H_2 R_2 = G_2$, welcher um die Höhe $FG_2 = h_1$ über der Mündung ſteht, der Druck $= p_2$, ſo hat man ebenſo $h_1 + \frac{p_2 - p}{\gamma} = \left[1 - \left(\frac{F}{G_2}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}$. Subtrahirt man beide Ausdrücke von einander, ſo folgt

Hydrauliſcher Druck.

$h - h_1 + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \left[\left(\frac{F}{G_2}\right)^2 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}$, oder, wenn man die Druckhöhe $G_1 G_2$ der Schicht $H_2 R_2 = G_2$ durch h_2 bezeichnet, das Maaß des hydrauliſchen Waſſerdruckes in $H_2 R_2$:

$$\frac{p_2}{\gamma} = h_2 + \frac{p_1}{\gamma} - \left[\left(\frac{F}{G_2}\right)^2 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}.$$

Nun iſt aber noch $\frac{Fv}{G_1}$ die Geſchwindigkeit v_1 des Waſſers in der Oberfläche G_1 und $\frac{Fv}{G_2}$ die Geſchwindigkeit v_2 des Waſſers im Querſchnitte G_2, daher läßt ſich einfacher $\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + h_2 - \left(\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right)$ ſetzen.

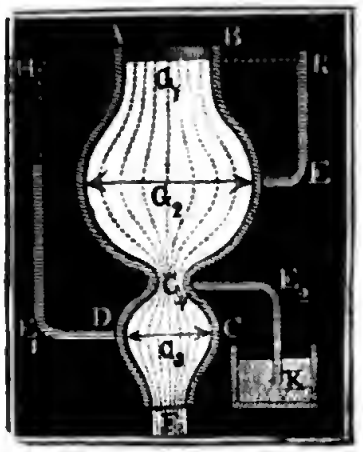
Es iſt alſo hiernach die hydrauliſche Druckhöhe $\frac{p_2}{\gamma}$ an irgend einer Stelle im Gefäße gleich der hydroſtatiſchen Druckhöhe $\frac{p_1}{\gamma} + h_2$ vermindert um die Differenz der Geſchwindigkeitshöhen des Waſſers an dieſer und an der Eintrittsſtelle. Iſt die freie Oberfläche G_1 des Waſſers groß, ſo kann man die Zuflußgeſchwindigkeit außer Acht laſſen und daher $\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + h_2 - \frac{v_2^2}{2g}$ ſetzen, und es iſt hiernach die hydrauliſche Druckhöhe um die Geſchwindigkeitshöhe kleiner, als die hydroſtatiſche Druckhöhe. Je ſchneller alſo das Waſſer in einer Röhrenleitung fließt, je ſchwächer drückt daſſelbe gegen die Röhrenwand. Aus dieſem Grunde zerſpringen die Röhren erſt oft dann, oder laſſen erſt dann Waſſer durch, wenn die Bewegung des Waſſers in denſelben gehemmt wird, wenn ſich die Röhren verſtopfen u. ſ. w.

Durch einen in Fig. 484 (ſ. folg. S.) abgebildeten Ausflußapparat $ABCD$ kann man die Verſchiedenheit zwiſchen dem hydrauliſchen und dem hydroſtatiſchen Drucke vor Augen führen. Führt man von dem Querſchnitte G_2 ein Röhrchen ER in die Höhe, ſo füllt ſich daſſelbe mit Waſſer, und dieſes ſteigt in demſelben über das Niveau des Waſſerſpiegels,

Hydraulischer Druck

wenn $G_2 > G_1$, also $v_2 < v_1$, denn da der Druck p_1 auf den Wasserspiegel durch den Luftdruck an der Röhrenmündung aufgehoben wird, so läßt sich die den Druck in G_2 messende Höhe

Fig. 484.

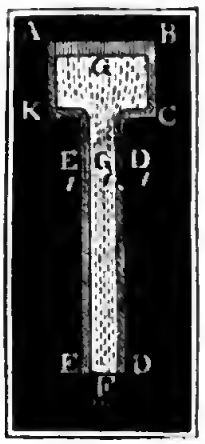


$$x = \frac{p_2}{\gamma} = h_2 - \left(\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right)$$

setzen, und es ist also $x > h_2$, wenn $\frac{v_2^2}{2g} < \frac{v_1^2}{2g}$ ist. Ist dagegen der Querschnitt $G_3 < G_1$, fließt also das Wasser durch G_3 schneller als durch G_1, so hat man die Höhe der Wassersäule in dem bei G_3 einmündenden Röhrchen E_1:

$y = h_3 - \left(\frac{v_3^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right)$ kleiner als h_3 und es reicht sonach dieselbe nicht bis zum Niveau HR von G_1. Ist endlich G_4 sehr klein und also die entsprechende Geschwindigkeit v_4 sehr groß, so kann sogar $\frac{v_4^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} > h_4$, und daher die entsprechende hydraulische Druckhöhe z negativ sein, d. h. die Luft von außen mehr drücken, als das Wasser von innen. Dann wird also in einem nach unten geführten und unter Wasser ausmündenden Röhrchen E_2K eine Wassersäule emporsteigen, welche in Vereinigung mit dem Wasserdrucke dem äußeren Atmosphärendrucke das Gleichgewicht hält. Ist dieses Röhrchen kurz, so steigt sogar das zu diesem Zwecke vielleicht gefärbte Wasser aus dem untergesetzten Gefäße K durch das Röhrchen empor, tritt in das Ausflußreservoir und gelangt bei F mit zum Ausflusse.

Fig. 485.



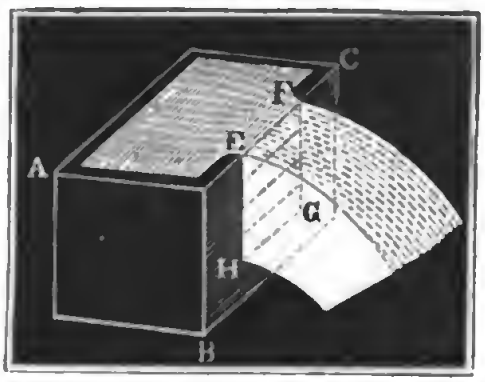
Anmerkung. Besteht das Ausflußgefäß ACE, Fig. 485, aus einem weiten Reservoir AC und aus einer engeren vertikalstehenden Röhre CE, so ist der hydraulische Druck an allen Stellen dieser Röhre negativ. Läßt man den Atmosphärendruck p_1 unberücksichtigt, so ist der Druck des Wassers in der Nähe der Ausmündung F, = Null zu setzen, weil hier die ganze Druckhöhe $GF = h$ auf die Erzeugung der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ verwendet wird, dagegen ist an einer Stelle D_1E_1 um die Höhe $G_1G = h_1$ unter dem Wasserspiegel die hydraulische Druckhöhe $= h_1 - h = -(h - h_1)$ negativ, wenn also ein Loch in diese Röhre gebohrt wird, so fließt kein Wasser heraus, es wird vielmehr Luft eingesaugt, die bei F mit zum Ausflusse gelangt. Dieser negative Druck ist unmittelbar unter dem Gefäße am größten, weil hier h_1 am kleinsten ausfällt.

§. 340. Mit Hülfe der Formel $Q = Fv = F\sqrt{2gh}$ läßt sich die in

einer Secunde ausfließende Waſſermenge nur dann unmittelbar berechnen, wenn die Mündung horizontal iſt, weil nur hier im ganzen Querſchnitte F einerlei Geſchwindigkeit vorkommt; hat aber der Querſchnitt der Mündung eine Neigung gegen den Horizont, befindet ſich z. B. die Oeffnung in einer Seitenwand des Gefäßes, ſo fließen die in verſchiedenen Tiefen befindlichen Waſſerelemente mit verſchiedenen Geſchwindigkeiten aus, und es kann die Waſſermenge Q nicht als ein Prisma angeſehen werden und daher auch die Formel $Q = Fv = F\sqrt{2gh}$ nicht unmittelbar zur Anwendung kommen. Den einfachſten Fall dieſer Art bietet der Ausfluß durch einen Wandeinſchnitt oder der ſogenannte Ueberfall, Fig. 486, dar. Dieſer Wandeinſchnitt bildet eine rectanguläre Ausflußöffnung $EFGH$, deren Breite $EF = GH$ durch b und Höhe $EH = FG$ durch h bezeichnet werden möge. Zerlegen wir dieſe Fläche bh durch Horizontallinien in eine ſehr große Anzahl n gleich breiter Streifen, ſo können wir innerhalb eines jeden einerlei Geſchwindigkeit vorausſetzen. Da, von oben nach unten gegangen, die Druckhöhen dieſer Streifen

Rectanguläre Seitenöffnung

Fig. 486.



$\frac{h}{n}$, $\frac{2h}{n}$, $\frac{3h}{n}$ u. ſ. w. ſind, ſo hat man die entſprechenden Geſchwindigkeiten $\sqrt{2g\frac{h}{n}}$, $\sqrt{2g \cdot \frac{2h}{n}}$, $\sqrt{2g \cdot \frac{3h}{n}}$, und da ferner der Inhalt eines Streifens: $= b \cdot \frac{h}{n} = \frac{bh}{n}$ iſt, ſo hat man die Waſſermengen: $\frac{bh}{n}\sqrt{2g\frac{h}{n}}$, $\frac{bh}{n}\sqrt{2g \cdot \frac{2h}{n}}$, $\frac{bh}{n}\sqrt{2g \cdot \frac{3h}{n}}$ u. ſ. w.; und folglich die Waſſermenge durch den ganzen Querſchnitt

$$Q = \frac{bh}{n}\left(\sqrt{2g\frac{h}{n}} + \sqrt{2g \cdot \frac{2h}{n}} + \sqrt{2g \cdot \frac{3h}{n}} + \ldots\right)$$

$$= \frac{bh\sqrt{2gh}}{n\sqrt{n}}\left(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}\right).$$

Nun iſt aber, wie im »Ingenieur, Seite 145,« angegeben wird,

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}, \text{ oder}$$

$$1^{1/2} + 2^{1/2} + 3^{1/2} + \ldots + n^{1/2} = \frac{n^{1+1/2}}{1+1/2} = {}^2/_3 n^{3/2} = {}^2/_3 n\sqrt{n};$$

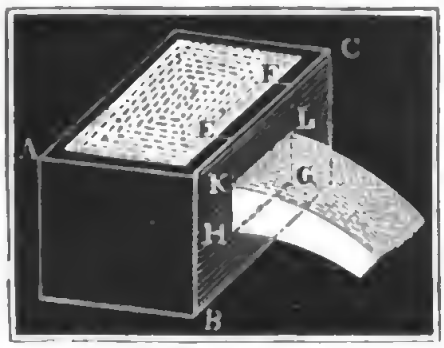
daher folgt die in Frage ſtehende Waſſermenge

Rectanguläre Seitenöffnung.

$$Q = \frac{b h \sqrt{2gh}}{n\sqrt{n}} \cdot {}^2/_3 n\sqrt{n} = {}^2/_3 bh\sqrt{2gh} = {}^2/_3 b\sqrt{2gh^3}.$$

Verſteht man unter der mittleren Geſchwindigkeit v diejenige, welche an allen Stellen vorhanden ſein müßte, damit ebenſo viel Waſſer ausfließt, als bei den verſchiedenen Ausflußgeſchwindigkeiten innerhalb des ganzen Querprofiles, ſo läßt ſich ſetzen: $Q = bh \cdot v$, und es folgt ſonach $v = {}^2/_3\sqrt{2gh}$, d. h. es iſt die mittlere Geſchwindigkeit des durch einen rectangulären Wandeinſchnitt ausfließenden Waſſers zwei Drittel von der Geſchwindigkeit an der Schwelle oder unteren Kante des Einſchnittes.

Fig. 487



Reicht die rectanguläre Ausflußöffnung KG, Fig. 487, mit horizontaler Schwelle nicht bis zum Waſſerſpiegel, ſo findet man die Ausflußmenge, wenn man dieſelbe als die Differenz zweier Wandeinſchnitte $EFGH$ und $EFLK$ anſieht. Iſt daher h_1 die Tiefe HE der unteren und $KE = h_2$ die der oberen Kante, ſo hat man die Ausflußmenge dieſer Einſchnitte: ${}^2/_3 b\sqrt{2gh_1{}^3}$, und ${}^2/_3 b\sqrt{2gh_2{}^3}$, daher das Waſſerquantum für die rectanguläre Oeffnung $GHKL$:

$$Q = {}^2/_3 b\sqrt{2gh_1{}^3} - {}^2/_3 b\sqrt{2gh_2{}^3} = {}^2/_3 b\sqrt{2g}\,(h_1{}^{3/2} - h_2{}^{3/2}),$$

und die mittlere Ausflußgeſchwindigkeit

$$v = \frac{Q}{b\,(h_1 - h_2)} = {}^2/_3\sqrt{2g} \cdot \frac{h_1{}^{3/2} - h_2{}^{3/2}}{h_1 - h_2}.$$

Iſt h die mittlere Druckhöhe $\frac{h_1 + h_2}{2}$, oder die Tiefe des Mittelpunktes der Oeffnung unter dem Waſſerſpiegel und a die Oeffnungshöhe $HK = h_1 - h_2$, ſo kann man ſetzen:

$$v = {}^2/_3\sqrt{2g} \cdot \frac{\left(h + \frac{a}{2}\right)^{3/2} - \left(h - \frac{a}{2}\right)^{3/2}}{a}, \text{ oder annähernd}$$

$$= \left[1 - {}^1/_{96}\left(\frac{a}{h}\right)^2\right]\sqrt{2gh}.$$

Beiſpiel. Wenn eine rectanguläre Ausflußöffnung 3 Fuß breit und $1\frac{1}{4}$ Fuß hoch iſt, und die untere Kante um $2\frac{3}{4}$ Fuß unter dem Waſſerſpiegel liegt, ſo iſt die Ausflußmenge $Q = {}^2/_3 \cdot 7{,}906 \cdot 3\,(2{,}75^{3/2} - 1{,}5^{3/2})$
$= 15{,}812\,(4{,}560 - 1{,}837) = 15{,}812 \cdot 2{,}723 = 43{,}06$ Cubikfuß. Nach der

Näherungsformel iſt die mittlere Ausflußgeſchwindigkeit

Rectangu lare Seitenöffnung

$$v = \left[1 - \tfrac{1}{96}\left(\frac{1{,}25}{2{,}125}\right)^2\right] . 7{,}906\ \sqrt{2{,}125} = (1 - 0{,}0036) . 11{,}525$$

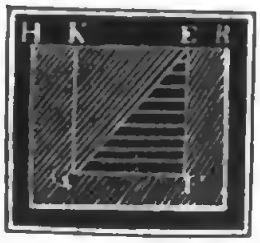
$= 11{,}525 - 0{,}042 = 11{,}483$ Fuß, und daher die Ausflußmenge

$Q = 3 . \tfrac{3}{4} . 11{,}483 = 43\,06$ Cubikfuß.

Anmerkung. Wenn der Wandeinſchnitt unter dem Winkel δ gegen den Horizont geneigt iſt, ſo hat man die Mündungshöhe $\frac{h_1 - h_2}{\sin.\ \delta}$ ſtatt ihrer Vertikalprojection einzuführen, weshalb $Q = \tfrac{2}{3}\ \frac{b\sqrt{2g}}{\sin.\ \delta}(\sqrt{h_1^3} - \sqrt{h_2^3})$ zu ſetzen iſt. Wenn der Querſchnitt des Ausflußreſervoirs parallel zur Mündung nicht bedeutend größer iſt, als der Querſchnitt der Mündung, ſo hat man die Geſchwindigkeit $v_1 = \frac{F}{G}\ v$ des ankommenden Waſſers zu berückſichtigen und deshalb zu ſetzen:

$$Q = \tfrac{2}{3}\ b\ \sqrt{2g}\left[\left(h + \frac{v_1^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(h_2 + \frac{v_1^2}{2g}\right)^{3/2}\right].$$

Fig. 488.



§. 341. Außer rectangulären Seitenöffnungen kommen noch triangulare und kreisförmige Mündungen in der Praxis vor. Handeln wir zunächſt von dem Ausfluſſe durch eine triangulare Mündung EFG, Fig. 488, mit horizontaler Baſis, deren Spitze E im Waſſerſpiegel liegt. Setzen wir die Baſis $FG = b$ und die Höhe $EF = h$, theilen wir die letztere in n gleiche Theile und führen wir durch die Theilpunkte Parallellinien zur Baſis, ſo zerlegen wir die ganze Fläche in ſchmale Elemente von den Inhalten $\frac{b}{n} . \frac{h}{n}, \frac{2b}{n} . \frac{h}{n}, \frac{3b}{n} . \frac{h}{n}$ u. ſ. w., und den Druckhöhen $\frac{h}{n}, \frac{2h}{n}, \frac{3h}{n}$ u. ſ. w. Für dieſe folgen die Ausflußmengen:

Triangulare Seitenöffnung.

$\frac{bh}{n^2}\sqrt{2g\frac{h}{n}}, \frac{2bh}{n^2}\sqrt{2g.\frac{2h}{n}}, \frac{3bh}{n^2}\sqrt{2g.\frac{3h}{n}}$ u. ſ. w., und es ergiebt ſich durch Summation die Ausflußmenge für die ganze Mündung

$$Q = \frac{bh}{n^2}\sqrt{2g\frac{h}{n}}\ (1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \ldots + n\sqrt{n})$$

$$= \frac{bh\sqrt{2gh}}{n^2\sqrt{n}}\ (1 + 2^{3/2} + 3^{3/2} + \ldots + n^{3/2}),$$ oder da die Reihe in der Parentheſe $= \frac{n^{3/2} + 1}{3/2 + 1} = \tfrac{2}{5}\ n^{5/2}$ giebt,

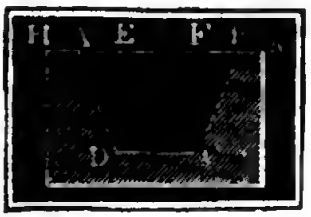
$Q = \tfrac{2}{5}\ bh\sqrt{2gh} = \tfrac{2}{5}\ b\sqrt{2gh^3}$. Liegt die Baſis der Mündung, EGK im Waſſerſpiegel und die Spitze um h tiefer, ſo hat man, da durch

Triangulare Seitenöffnung

das Rechteck $EFGK$, $\frac{2}{3} b h \sqrt{2gh}$ ausfließt, die Wassermenge

$$Q_1 = \frac{2}{3} b h \sqrt{2gh} - \frac{2}{5} b h \sqrt{2gh} = \frac{4}{15} b h \sqrt{2gh}.$$

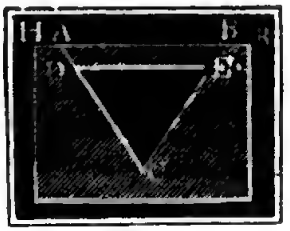
Fig. 489.



Durch das Trapez $ABCD$, Fig. 489, dessen obere im Wasserspiegel liegende Basis $AB = b_1$ und dessen untere Basis $CD = b_2$ und Höhe $DE = h$ ist, findet man die Wassermenge durch Zusammensetzung aus einem Rechtecke und zwei Dreiecken, nämlich:

$$Q = \frac{2}{3} b_2 h \sqrt{2gh} + \frac{4}{15} (b_1 - b_2) h \sqrt{2gh}$$
$$= \frac{2}{15} (2b_1 + 3b_2) h \sqrt{2gh}.$$

Fig. 490.



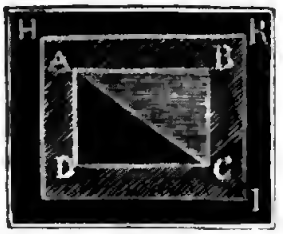
Ferner folgt noch die Ausflußmenge für ein Dreieck CDE, Fig. 490, dessen Basis $DE = b_1$ um die Höhe h_1 und dessen Spitze C um h von dem Wasserspiegel absteht:

Q = Wassermenge durch ABC minus Wassermenge durch AE

$$= \frac{4}{15} bh\sqrt{2gh} - \frac{2}{15}(2b + 3b_1) h_1 \sqrt{2gh_1}$$
$$= \frac{2}{15} \sqrt{2g}[2b\,(h^{3/2} - h_1^{3/2}) - 3 b_1 h_1^{3/2}].$$

Da sich die Breite $AB = b$ durch die Proportion $b : b_1 = h : (h - h_1)$ bestimmen läßt, so folgt

Fig. 491.

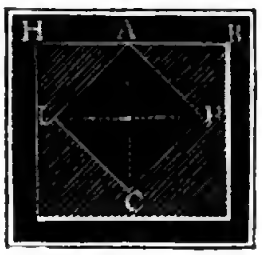


$$Q = \frac{2\sqrt{2g} \cdot b_1}{15} \left(\frac{2h\,(h^{3/2} - h_1^{3/2})}{h - h_1} - 3h_1^{3/2} \right)$$
$$= \frac{2\sqrt{2g} \cdot b_1}{15} \left(\frac{2h^{5/2} - 5hh_1^{3/2} + 3h_1^{5/2}}{h - h_1} \right).$$

Endlich folgt noch für ein Dreieck ACD, Fig. 491, dessen Spitze über der Basis liegt, die Ausflußmenge

$$Q = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \cdot b_1 (h^{3/2} - h_1^{3/2}) - \frac{2\sqrt{2g} \cdot b_1}{15} \left(\frac{2h^{5/2} - 5hh_1^{3/2} + 3h_1^{5/2}}{h - h_1} \right)$$
$$= \frac{2\sqrt{2g} \cdot b_1}{15} \left(\frac{3h^{5/2} - 5h_1 h^{3/2} + 2h_1^{5/2}}{h - h_1} \right).$$

Fig. 492.



Beispiel. Welche Wassermasse fließt durch das Quadrat $ABCD$, Fig. 492, mit vertikaler Diagonale AC von 1 Fuß Länge, wenn der Eckpunkt A bis zum Wasserspiegel reicht. Die obere Hälfte dieses Quadrats giebt die Ausflußmenge $Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2gh^3} = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 7{,}906 \sqrt{\frac{1}{8}} = 1{,}581 \cdot 0{,}7071 = 1{,}118$ Cubikfuß, die untere aber die Wassermenge

$$Q_1 = \frac{2b\sqrt{2g}}{15}\left(\frac{2h^{5/2} - 5h\,h_1^{3/2} + 3h_1^{5/2}}{h - h_1}\right) = \frac{2 \cdot 7{,}906}{15}\left(\frac{2 - 5(1/)^{3/2} + 3(1/)^{5/2}}{1 - 1/2}\right)$$

$$= \frac{31{,}624}{15}\,(2 - 1{,}7678 + 0{,}5303) = \frac{31{,}624 \cdot 0{,}7625}{15} = 1{,}608 \text{ Cubikfuß},$$

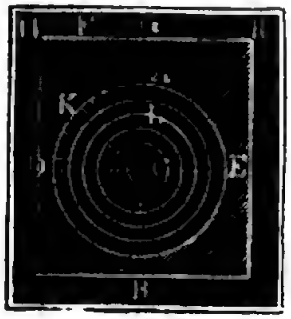
folglich fließt durch die ganze Mündung die Waſſermenge

$$Q = 1{,}118 + 1{,}608 = 2{,}726 \text{ Cubikfuß}.$$

Kreisförmige Seitenöffnung.

§. 342. Für eine kreisförmige Mündung AB, Fig. 493, beſtimmt ſich die Ausflußmenge nun durch eine auf folgende Weiſe zu ermittelnde Näherungsformel. Zerlegen wir den Kreis durch concentriſche Kreiſe in gleich ſchmale Ringe, und jeden Ring in lauter gleiche, als Parallelogramme anzuſehende Elemente. Iſt nun r der Halbmeſſer eines ſolchen Ringes, b deſſen Breite und n die Anzahl ſeiner Elemente, ſo hat man die Größe eines Ringelementes K, $= \frac{2\pi r b}{n}$. Iſt h die Tiefe CG des Mittelpunktes C unter dem Waſſerſpiegel HR, und φ der Winkel ACK, um welchen ein Element K vom höchſten Punkte A des Ringes abſteht, ſo hat man die Druckhöhe dieſes Elementes $KF = CG - CL = h - r\,cos.\,\varphi$, und daher die Ausflußmenge dieſes Elementes $= \frac{2\pi r b}{n}\sqrt{2g(h - r\,cos.\,\varphi)}$. Nun hat man aber $\sqrt{h - r\,cos.\,\varphi}$

Fig. 493.



$$= \sqrt{h}\left[1 - 1/2\,\frac{r}{h}\,cos.\,\varphi - 1/8\left(\frac{r}{h}\right)^2 cos.\,\varphi^2 + \ldots\right]$$

$$= \sqrt{h}\left[1 - 1/2\,\frac{r}{h}\,cos.\,\varphi - 1/16\left(\frac{r}{h}\right)^2 (1 + cos\ 2\,\varphi) + \ldots\right],$$

daher folgt die Ausflußmenge eines Elementes:

$$= \frac{2\pi r b}{n}\sqrt{2gh}\left[1 - 1/2 \cdot \frac{r}{h} cos.\,\varphi - 1/16\left(\frac{r}{h}\right)^2 (1 + cos.2\varphi) + \ldots\right].$$

Die Ausflußmenge des ganzen Ringes ergiebt ſich, wenn man in der Parentheſe ſtatt 1, $n \cdot 1 = n$, ſtatt $cos. \cdot \varphi$ die Summe aller Coſinus φ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$, und ſtatt $cos.\,2\,\varphi$ die Summe aller Coſinus $2\,\varphi$ von $2\,\varphi = 0$ bis $2\,\varphi = 4\,\pi$ nimmt. Da aber die Summe aller Coſinus eines Vollkreiſes $=$ Null iſt, ſo fallen dieſe Coſinus ganz aus, und es folgt die Ausflußmenge für den Ring:

$$= \frac{2\pi r b}{n}\sqrt{2gh}\left[n - 1/16\left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot n - \ldots\right]$$

$$= 2\pi r b\sqrt{2gh}\left[1 - 1/16\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \ldots\right]$$

Kreisförmige Seitenöffnung.

Setzt man jetzt ſtatt $b = \frac{r}{m}$ und ſtatt r, $\frac{r}{m}, \frac{2r}{m}, \frac{3r}{m}$, bis $\frac{mr}{m}$, ſo bekommt man die Ausflußmenge aller die ganze Kreisfläche ausmachenden Ringe, und es folgt zuletzt das Ausflußquantum des ganzen Kreiſes:

$$Q = 2\pi r\sqrt{2gh}\left[\frac{r}{m^2}(1+2+3+..+m) - \tfrac{1}{16}\frac{r^3}{m^4h^2}(1^3+2^3+3^3+..+m^3)\right]$$

$$= 2\pi r\sqrt{2gh}.\left(\frac{r}{m^2}\cdot\frac{m^2}{2} - \tfrac{1}{16}\cdot\frac{r^3}{m^4h^2}\cdot\frac{m^4}{4}\right)$$

$$= \pi r^2\sqrt{2gh}\left[1 - \tfrac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - ..\right], \text{ oder genauer}$$

$$Q = \pi r^2\sqrt{2gh}\left[1 - \tfrac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \tfrac{5}{1024}\left(\frac{r}{h}\right)^4 - ..\right].$$

Reicht der Kreis bis zum Waſſerſpiegel, ſo iſt

$Q = \frac{987}{1024}\pi r^2\sqrt{2gh} = 0{,}964\ F\sqrt{2gh}$, wenn F den Inhalt der ganzen Kreisfläche bezeichnet.

Uebrigens iſt leicht zu erachten, daß man in allen den Fällen, wenn die Druckhöhe im Mittelpunkte dem Durchmeſſer gleich oder größer iſt, als derſelbe, den Werth der ganzen Reihe $= 1$ ſetzen und $Q = F\sqrt{2gh}$ annehmen kann. Auch läßt ſich dieſe Regel auf andere Mündungen anwenden, und alſo in allen den Fällen, wenn der Schwerpunkt einer Mündung mindeſtens ebenſo tief unter dem Waſſerſpiegel liegt, als die Mündung hoch iſt, die Tiefe h dieſes Punktes als Druckhöhe anſehen und $Q = F\sqrt{2gh}$ ſetzen.

Wenn man berückſichtigt, daß das Mittel aller Coſinus des erſten Quadranten $= \frac{\pi}{4}$ und das Mittel aller Coſinus des zweiten Quadranten $= -\frac{\pi}{4}$, alſo das Mittel aller Coſinus des erſten und zweiten Quadranten $=$ Null iſt, ſo kann man auf dem oben eingeſchlagenen Wege die Ausflußmenge des oberen Halbkreiſes:

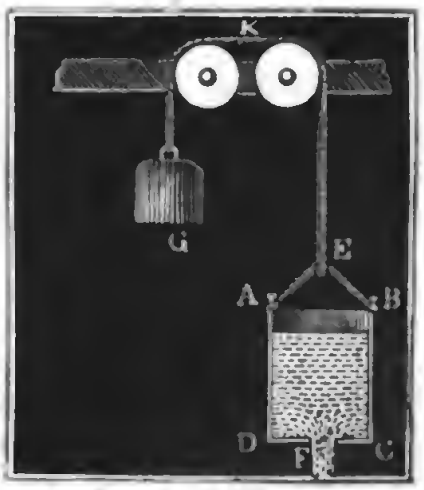
$Q_1 = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{2gh}\left[1 - \frac{\pi}{12}\left(\frac{r}{h}\right) - \frac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2\right]$ und die des unteren Halbkreiſes $Q_2 = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{2gh}\left[1 + \frac{\pi}{12}\left(\frac{r}{h}\right) - \frac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 ..\right]$ finden.

Beiſpiel. Welche Waſſermenge fließt ſtündlich durch eine kreisförmige Oeffnung von 1 Zoll Durchmeſſer, über welcher der Waſſerſpiegel eine Linie hoch ſteht? Es iſt $\frac{r}{h} = \frac{1}{7}$, daher $\left(\frac{r}{h}\right)^2 = \frac{36}{49} = 0{,}735$, ferner $1 - \frac{1}{32}\left(\frac{h}{r}\right)^2$ $= 1 - 0{,}023 = 0{,}977$, und folglich die Ausflußmenge pr. sec.

$Q = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} . 12 . 7{,}906 \sqrt{\frac{7}{144}} . 0{,}977 = \frac{\pi}{4} . 7{,}906 . 0{,}977 \sqrt{7} = 16{,}05$ Cub.-Zoll, *pr. min.* = 963 Cub.-Zoll, und *pr. hor.* = 33⅓ Cubikfuß.

§. 343. Die Ausflußgeſchwindigkeit ändert ſich, wenn ein vorher in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung befindliches Gefäß in Bewegung übergeht, oder ſeinen Bewegungszuſtand ändert, weil in dieſem Falle jedes Waſſertheilchen außer ſeinem Gewichte auch noch durch ſeine Trägheit gegen die Umgebung wirkt. Bewegte Ausflußgefäße.

Fig. 494.



Bewegt man das Gefäß *AC*, Fig. 494, beſchleunigt vertikal aufwärts, während das Waſſer durch die Bodenöffnung *F* abfließt, ſo findet eine Vergrößerung, und bewegt man es beſchleunigt vertikal abwärts, ſo findet eine Verminderung der Ausflußgeſchwindigkeit ſtatt. Iſt die Acceleration p, ſo drückt jedes Waſſermaſſenelement M nicht bloß durch ſein Gewicht Mg, ſondern auch durch ſeine Trägheit Mp; es iſt folglich die Kraft eines jeden Elementes in einem Falle $(g + p)M$ und im zweiten $(g - p)M$, alſo ſtatt g, $g \pm p$ zu ſetzen. Hiernach folgt denn $\frac{v^2}{2} = (g \pm p) h$ und ſonach für die Ausflußgeſchwindigkeit $v = \sqrt{2 (g \pm p) h}$.

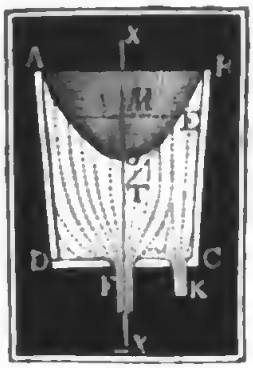
Steigt das Gefäß mit der Acceleration g empor, ſo iſt $v = \sqrt{2 . 2 gh} = 2\sqrt{gh}$, alſo die Ausflußgeſchwindigkeit 1,414 mal ſo groß, als beim ſtillſtehenden Gefäße. Fällt das Gefäß durch ſein eigenes Gewicht, alſo mit der Acceleration g, ſo iſt $v = \sqrt{0} = 0$, dann fließt alſo kein Waſſer aus. Bewegt ſich das Gefäß gleichförmig auf- oder abwärts, ſo bleibt $v = \sqrt{2gh}$, ſteigt es aber verzögert, ſo wird $v = \sqrt{2 (g - p) h}$, und fällt es verzögert, ſo fällt $v = \sqrt{2 (g + p) h}$ aus.

Bewegt man das Ausflußgefäß horizontal oder unter einem ſchiefen Winkel gegen den Horizont, ſo ſtellt ſich (S. §. 297) der Waſſerſpiegel ſchief gegen den Horizont und es findet daher auch eine Veränderung der Ausflußgeſchwindigkeit ſtatt.

Bei Umdrehung eines Gefäßes *AC*, Fig. 495 (folg. S.), um ſeine vertikale Axe $X\overline{X}$, bildet nach §. 297 der Waſſerſpiegel einen paraboliſchen Trichter *AOB*, es ſteht daher über der Mitte *F* des Bodens eine kleinere

Bewegte Ausflußgefäße

Fig. 495.



Druckhöhe, als nahe am Rande deſſelben, und es fließt daher auch durch die Mündung F in der Axe das Waſſer langſamer, als durch jede andere Bodenöffnung K. Bezeichnet h die Druckhöhe FO in der Mitte, ſo iſt die Ausflußgeſchwindigkeit in der Mitte $= \sqrt{2gh}$, bezeichnet aber y die Entfernung $FK = ME$ einer andern Mündung K von der Axe, und ω die Winkelgeſchwindigkeit, ſo hat man die entſprechende Erhebung des Waſſers über der Mitte: OM

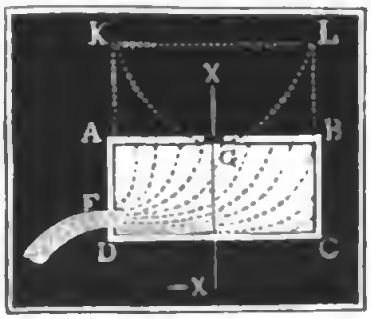
$= \frac{1}{2} TM = \frac{1}{2} ME \cotang. T = \frac{1}{2} y \cdot \frac{\omega^2 y}{g}$

$= \frac{\omega^2 y^2}{2g} = \frac{w^2}{2g}$, wenn w die Umdrehungsgeſchwindigkeit der Mündung K bezeichnet. Hiernach iſt denn die Ausflußgeſchwindigkeit für die Mündung K

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{w^2}{2g}\right)} = \sqrt{2gh + w^2}.$$

Dieſe Formel gilt für jedes beliebig geſtaltete Gefäß, und auch dann noch, wenn es oben verſchloſſen iſt, wie für AC, Fig. 496, ſo daß ſich der Trichter gar nicht bilden kann. Sie findet bei den Reactionsrädern und Turbinen in der Folge ihre Anwendung.

Fig. 496.



Beiſpiele. 1) Wenn das mit Waſſer angefüllte Gefäß AC, Fig. 494, 350 Pfd. wiegt, und mittelſt eines über Leitrollen K gehenden Seiles durch ein Gewicht G von 450 Pfd. aufgezogen wird, ſo ſteigt es mit einer Acceleration.

$p = \frac{450 - 350}{450 + 350} \cdot g = \frac{100}{800} g = \frac{1}{8} g$ und es iſt deshalb die Ausflußgeſchwindigkeit $v = \sqrt{2\,(g + p)\,h} = \sqrt{2 \cdot \frac{9}{8} \cdot gh} = \sqrt{\frac{9}{4} gh}$. Wäre die Druckhöhe $h = 4$ Fuß, ſo würde die Ausflußgeſchwindigkeit $v = \sqrt{9 \cdot g} = 3\sqrt{31{,}25} = 16{,}77$ Fuß betragen. 2) Wenn ſich das mit Waſſer angefüllte Gefäß AC, Fig. 496, ſo umdreht, daß es in der Minute 100 Umdrehungen macht, wenn die Tiefe der Mündung F unter dem Waſſerſpiegel in der Mitte 2 Fuß und die Entfernung von der Axe $X\overline{X}$, 3 Fuß beträgt, ſo iſt die Ausflußgeſchwindigkeit

$$v = \sqrt{2gh + w^2} = \sqrt{62{,}5 \cdot 2 + \left(\frac{3 \cdot \pi \cdot 100}{30}\right)^2} = \sqrt{125 + 100 \cdot \pi^2}$$

$= \sqrt{125 + 987} = \sqrt{1112} = 33{,}35$ Fuß. Steht das Gefäß ſtill, ſo iſt $v = \sqrt{125} = 11{,}18$ Fuß.

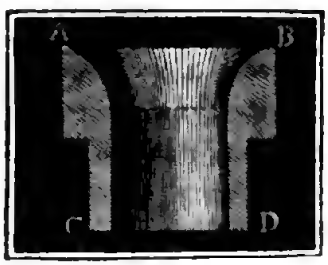
Zweites Kapitel.

Von der Contraction der Wasserstrahlen beim Ausflusse des Wassers durch Mündungen in der dünnen Wand.

§. 344. Die in dem vorstehenden Kapitel entwickelten Ausflußgesetze stimmen mit den Erfahrungen fast ganz überein, so lange die Druckhöhe in Ansehung der Mündungsweite nicht sehr klein ist, und so lange sich die Ausflußöffnung nach innen allmälig erweitert und sich, ohne Ecken und Kanten zu bilden, an der Boden- oder Seitenfläche des Gefäßes anschließt. Die hierüber an glattpolirten metallenen Mundstücken angestellten Versuche von Michelotti, von Eytelwein und von dem Verfasser haben nachgewiesen, daß die effective oder wirklich ausfließende Wassermenge 96 bis 98 Procent von dem theoretisch bestimmten Wasserquantum ist. Das in der halben natürlichen Größe abgebildete Mundstück *AD*, Fig. 497, gab bei einer Druckhöhe von 10 Fuß 97,5 Proc., bei 5 Fuß 96,9 Proc. und bei 1 Fuß 95,8 Proc. (Versuche mit größeren Mündungen s. Untersuchungen in dem Gebiete der Mechanik und Hydraulik, zweite Abtheil.) Da bei diesem Ausflusse der Strahl mit der Mündung gleichen Querschnitt F hat, so ist anzunehmen, daß diese Verminderung der Wassermenge aus einem Verluste an Geschwindigkeit hervorgeht, der in der Reibung oder Adhäsion des Wassers an dem inneren Umfange der Mündung und in der Klebrigkeit des Wassers seinen Grund hat. Wir nennen in der Folge das Verhältniß der effectiven Ausflußgeschwindigkeit zur theoretischen Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$, den Geschwindigkeitscoefficienten (franz. coefficient de vitesse; engl. coefficient of velocity) und bezeichnen ihn durch φ. Hiernach ist also die effective Ausflußgeschwindigkeit im einfachsten Falle: $v_1 = \varphi v = \varphi\sqrt{2gh}$, und die Ausflußmenge: $Q = Fv_1 = \varphi Fv = \varphi F\sqrt{2gh}$.

Geschwindigkeitscoefficient.

Fig. 497.



Geſchwindigkeitscoefficient

Führen wir für φ den mittleren Werth 0,97 ein, ſo erhalten wir für das Fußmaaß

$$Q = 0{,}97 \,.\, F\sqrt{2gh} = 0{,}97 \,.\, 7{,}906\, F\sqrt{h} = 7{,}669\, F\sqrt{h}.$$

Einer mit der Geſchwindigkeit v_1 ausfließenden Waſſermenge Q wohnt die lebendige Kraft $\frac{Q\gamma}{g} \,.\, v_1^2$ inne, vermöge welcher ſie die mechaniſche Arbeit $Q\gamma \,.\, \frac{v_1^2}{2g}$ zu verrichten vermag. Da aber beim Niederſinken von der Höhe $h = \frac{v^2}{2g}$ das Gewicht $Q\gamma$ die Arbeit $Q\gamma \,.\, h = Q\gamma \,\frac{v^2}{2g}$ verrichtet, ſo folgt, daß durch den Ausfluß das Waſſer den Verluſt

$$Q\gamma\left(\frac{v^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right) = Q\gamma \,.\, \frac{v^2}{2g}\,(1 - \varphi^2) = (1 - 0{,}97^2)\; Q\gamma \,.\, \frac{v^2}{2g}$$

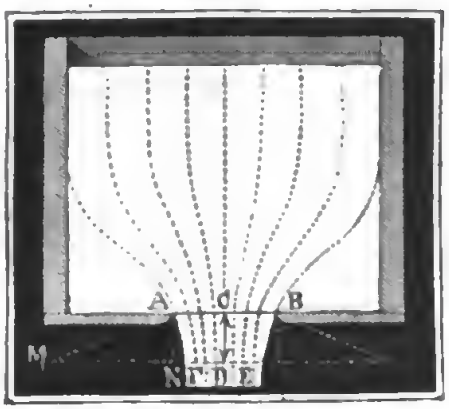
$= 0{,}059\; Q\gamma \,.\, \frac{v^2}{2g}$ oder 5,9 Procent erleidet. Es kann alſo das ausfließende Waſſer durch ſeine lebendige Kraft 5,9 Procent weniger Arbeit verrichten, als durch ſein Gewicht beim Herabſinken von der Höhe h.

Anmerkung. Der Verfaſſer hat das durch die Formel $v = \sqrt{2gh}$ ausgedrückte Ausflußgeſetz auch unter dem hohen Drucke von 390 Fuß (12 Atmoſphären) geprüft. Ein innen gut abgerundetes Mundſtück von 1 Centimeter Weite gab bei den Druckhöhen $h = 1$, 10 und 390 Fuß die Ausflußcoefficienten $\varphi = 0{,}96$, 0,97 und 0,98. S. Bornemann's u. ſ. w. Zeitſchrift für das geſammte Ingenieurweſen (Ingenieur), Band 1.

Contractionscoefficient.

§. 345. Fließt das Waſſer durch eine Mündung in der dünnen Wand (franz. orifice en mince paroi; engl. orifice in a thin plate), ſo tritt unter übrigens gleichen Umſtänden eine bedeutende Verminderung der Ausflußmenge ein, indem die Waſſerelemente in convergenten Richtungen durch die Mündung hindurch gehen und dadurch einen zuſammengezogenen oder contrahirten Waſſerſtrahl (franz. veine contractée; engl. contracted stream) hervorbringen. Die von Vielen, namentlich auch die in der neueſten Zeit von dem Verfaſſer angeſtellten Strahlenmeſſungen haben ergeben, daß der Strahl in einer Entfernung, die ohngefähr der halben Mündungsweite gleich kommt, die ſtärkſte Zuſammenziehung und eine Dicke hat, die 0,8 des Durchmeſſers der Mündung gleichkommt. Iſt F_1 der Querſchnitt des zuſammengezogenen Waſſerſtrahles, ſowie F der Querſchnitt der Mündung, ſo hat man hiernach $F_1 = (0{,}8)^2\; F = 0{,}64\; F$. Man nennt das Verhältniß $\frac{F_1}{F}$ dieſer Querſchnitte den Contractionscoefficienten (franz. coefficient de contraction; engl. coefficient of contraction) und bezeichnet ihn mit α,

Fig. 498.



und es iſt ſonach der mittlere Werth für den Ausfluß des Waſſers durch Mündungen in der dünnen Wand $\alpha = 0{,}64$ zu ſetzen. Contractionscoefficient.

So lange man keine nähere Kenntniß über die Contraction der Waſſerſtrahlen hat, kann man annehmen, daß der durch eine kreisrunde Oeffnung AB, Fig. 498, fließende Strahl einen Rotationskörper $ABEF$ bilde, deſſen Umfläche durch Umdrehung eines Kreisbogens AF um die Axe CD des Strahles entſteht. Setzen wir den Durchmeſſer AB der Mündung $= d$, und die Entfernung CD des contrahirten Querſchnittes EF, $= \frac{1}{2}d$, ſo erhalten wir für den Halbmeſſer $MA = MF = r$ des Erzeugungsbogens AF mittels der Gleichung $\overline{AN}^2 = FN\,(2MF - FN)$ oder

$\frac{d^2}{4} = \frac{d}{10}\left(2r - \frac{d}{10}\right)$, $r = 1{,}3\,d$. Mündungen nach dieſer Geſtalt des contrahirten Waſſerſtrahles geformt, geben ſo ziemlich die Ausflußgeſchwindigkeit $v_1 = 0{,}97\,.\,v$.

Die Contraction des Waſſerſtrahles hat ihren Grund darin, daß nicht allein das Waſſer, welches unmittelbar über der Mündung befindlich iſt, ausfließt, ſondern auch das zur Seite befindliche Waſſer herbeiſtrömt und mit zum Ausfluſſe gelangt. Es findet alſo ſchon im Innern des Gefäßes eine Convergenz der Waſſerfäden, ähnlich wie ſie die Figur andeutet, ſtatt, und es beſteht die Contraction des Waſſerſtrahles in einer bloßen Fortſetzung dieſer Convergenz. Von dieſer Bewegung des Waſſers in der Nähe der Mündung kann man ſich mit Hülfe eines gläſernen Ausflußapparates überzeugen, wenn man kleine Körper, welche wenig leichter oder ſchwerer als Waſſer ſind, wie z. B. Sägeſpähne von Eichenholz, Stücke von Siegellack u. ſ. w., in das Waſſer bringt und mit zum Ausfluſſe gelangen läßt.

§. 346. Fließt das Waſſer durch dreiſeitige, vierſeitige Mündungen u. ſ. w. im dünnen Bleche, ſo nimmt der Waſſerſtrahl beſondere Geſtalten an. In die Augen fallend iſt zumal die Umkehrung des Strahles, oder die veränderte Stellung ſeines Querſchnittes in Hinſicht auf den Querſchnitt der Mündung, vermöge welcher ein Eck dieſes Querſchnittes mit der Mitte einer Seite der Mündung gleichzuliegen kommt. Hiernach bildet bei einer dreiſeitigen Mündung ABC, Fig. 499 a. f. S., der Querſchnitt Contrahirte Waſſerſtrahlen.

Contrahirte Waſſerſtrahlen

des Strahles in einem gewiſſen Abſtande von der Mündung einen dreiſtrahligen Stern *DEF*, bei einer vierſeitigen Mündung *ABCD*, Fig. 500,

Fig. 499.

Fig. 500.

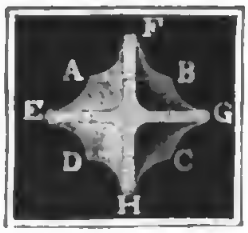
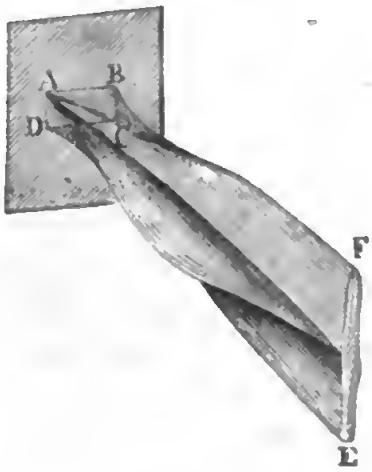


Fig. 501.

einen vierſtrahligen Stern *EFGH*, ebenſo, bei einer fünfſeitigen Mündung *ABCDE*, Fig. 501, einen Stern *FGHKL* mit fünf Strahlen u. ſ. w. Dieſe Querſchnitte ſind aber in verſchiedenen Abſtänden von der Mündung ſehr verſchieden, ſie nehmen auf einer gewiſſen Diſtanz ab und auf einer folgenden wieder zu u. ſ. w.; es beſteht daher der Strahl aus Blättern oder Rippen von veränderlicher Breite und bildet dadurch, was namentlich beim Ausfluſſe unter ſehr großem Drucke zu beobachten iſt, Bäuche und Knoten, ähnlich wie die Cacteen. Iſt die Mündung *ABCD*, Fig. 502, rectangulär, ſo bildet in kleinerer Entfernung von der Mündung der Querſchnitt zwar ebenfalls ein Kreuz oder einen Stern, allein in größerer Entfernung nimmt derſelbe wieder mehr die Geſtalt eines verwendeten Rechteckes *EF* an.

Fig. 502.



Den Ausfluß bei den verſchiedenartigſten Mündungen hat Bidone beobachtet; genaue Strahlenmeſſungen bei quadratiſchen Mündungen ſind aber nur von Poncelet und Lesbros angeſtellt worden (ſ. Allgem. Maſchinenencyclopädie, Artikel »Ausfluß«). Die letzten Meſſungen haben auf einen kleinen Contractionscoefficienten 0,563 geführt. Waſſermeſſungen beim Ausfluſſe durch kleinere Mündungen führen aber auf größere Contractionscoefficienten, ſie weiſen ſogar nach, daß dieſelben bei langgezogenen Rechtecken größer ſind als bei Rechtecken, die ſich mehr den Quadraten nähern.

Ausflußcoefficient.

§. 347. Wäre beim Ausfluſſe des Waſſers durch Mündungen in der dünnen Wand die effective Geſchwindigkeit gleich der theoretiſchen $v = \sqrt{2gh}$, ſo hätte man die effective Ausflußmenge $Q = \alpha F . v = \alpha F \sqrt{2gh}$, weil αF den Querſchnitt des Strahles an der Stelle der größten Zuſammenziehung, wo ſich die Waſſerelemente in parallelen Richtungen bewegen, bezeichnet. Dieſem iſt aber keineswegs

so, es zeigt sich vielmehr in der Erfahrung, daß Q noch kleiner als $\alpha F\sqrt{2gh}$ ist, daß man also die theoretische Wassermenge $F\sqrt{2gh}$ durch einen Coefficienten multipliciren muß, der kleiner als der Contractionscoefficient ist, um die effective Ausflußmenge zu erhalten. Wir müssen daher annehmen, daß beim Ausflusse durch eine Mündung in der dünnen Wand noch ein gewisser Geschwindigkeitsverlust eintrete, deshalb auch einen Geschwindigkeitscoefficienten φ einführen und daher die effective Ausflußgeschwindigkeit $v_1 = \varphi v = \varphi\sqrt{2gh}$ setzen. Hiernach haben wir also die effective Ausflußmenge $Q_1 = F_1 . v_1 = \alpha F . \varphi v = \alpha\varphi F v = \alpha\varphi F\sqrt{2gh}$ zu setzen. Nennen wir endlich noch das Verhältniß der effectiven Ausflußmenge zum theoretischen oder hypothetischen Ausflußquantum den Ausflußcoefficienten (franz. coefficient de dépense; engl. coefficient of efflluxion) und bezeichnen wir ihn in der Folge durch μ, so haben wir $Q_1 = \mu Q = \mu F v = \mu F\sqrt{2gh}$, und daher $\mu = \alpha\varphi$, d. h. der Ausflußcoefficient ist das Product aus dem Contractions- und dem Geschwindigkeitscoefficienten. Ausfluß-coefficient.

Vielfältige Beobachtungen, namentlich aber auch die Messungen des Verfassers, haben darauf geführt, daß der Ausflußcoefficient für Mündungen in der dünnen Wand nicht constant ist, daß er bei kleinen Mündungen und kleinen Ausflußgeschwindigkeiten größer ist, als bei großen Mündungen und bei großen Geschwindigkeiten, daß er auch bei langen und schmalen Mündungen bedeutend größer ausfällt als bei Mündungen, die sich einer regelmäßigen Form oder dem Kreise nähern.

Für quadratische Mündungen von 1 bis 9 Quadratzoll Inhalt bei 7 bis 21 Fuß Druckhöhe ist nach den Versuchen von Bossut und Michelotti der mittlere Ausflußcoefficient $\mu = 0{,}610$, für kreisförmige von $\frac{1}{2}$ bis 6 Zoll Durchmesser bei 4 bis 21 Fuß Druckhöhe aber ist derselbe $\mu = 0{,}615$ oder ohngefähr $\frac{8}{13}$. Die einzelnen Beobachtungswerthe von Bossut und Michelotti weichen unter einander nicht unbedeutend ab, doch läßt sich aus ihnen eine Abhängigkeit von der Größe der Mündung und der Größe der Druckhöhe nicht entnehmen. Nach den Versuchen des Verfassers ist bei einem Drucke von 0,6 Meter der Ausflußcoefficient für eine Mündung von 1 Centimeter Durchmesser: $\mu = 0{,}628$

»	2	»	»	$= 0{,}621$
»	3	»	»	$= 0{,}614$
»	4	»	»	$= 0{,}607.$

Dagegen bei einem Drucke von $\frac{1}{4}$ Meter für die runde Mündung

von	1	Centimeter	Durchmesser:	$\mu = 0{,}637$
»	2	»	»	$= 0{,}629$
»	3	»	»	$= 0{,}622$
»	4	»	»	$= 0{,}614.$

Digitized by Google

Ausfluß-coefficient. Aus ihnen sieht man deutlich, daß der Ausflußcoefficient zunimmt, wenn die Mündungsgröße und die Druckhöhe abnehmen.

Nehmen wir für μ den mittleren Werth $=0{,}615$, und für $\alpha=0{,}64$, so bekommen wir den Geschwindigkeitscoefficienten beim Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand: $\varphi = \frac{\mu}{\alpha} = 0{,}96$, also ziemlich so groß wie beim Ausflusse durch abgerundete oder conoidische Mündungen.

Anmerkung 1. Versuche von Buff (S. Poggendorff's Annalen, 46. B.) zeigen, daß die Ausflußcoefficienten bei kleinen Mündungen und kleinen Druckhöhen oder Geschwindigkeiten bedeutend größer sind, als bei großen und mittleren Mündungen und Geschwindigkeiten. Eine Mündung von 2,084 Linien Durchmesser gab bei $1\frac{1}{2}$ Zoll Druck $\mu=0{,}692$, bei 35 Zoll aber $\mu=0{,}644$; dagegen eine Mündung von 4,848 Linien bei $4\frac{1}{2}$ Zoll Druck $\mu=0{,}682$ und bei 29 Zoll $\mu=0{,}653$.

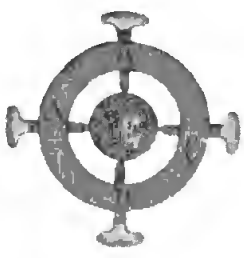
Anmerkung 2. Beim Ausflusse unter Wasser fallen nach den Versuchen des Verfassers die Ausflußcoefficienten um $1\frac{1}{2}$ Procent kleiner aus, als beim Ausflusse in die Luft.

Versuche §. 348. Es läßt sich der Ausflußcoefficient μ, welcher einer gewissen Ausflußmündung entspricht, finden, wenn man das Wasserquantum V kennt, welches in einer gewissen Zeit t bei einer bekannten Druckhöhe h durch den bekannten Querschnitt F der Mündung ausströmt; es ist nämlich

$$V = \mu \,.\, F \,.\, \sqrt{2gh} \,.\, t, \text{ also umgekehrt: } \mu = \frac{V}{Ft \,.\, \sqrt{2gh}}.$$

Um aber die beiden Factoren desselben, nämlich den Contractions- und den Geschwindigkeitscoefficienten zu ermitteln, bedarf es entweder noch einer Ausmessung des Strahlenquerschnittes $F_1 = \alpha F$, oder einer Bestimmung der Ausflußgeschwindigkeit $v_1 = \varphi v = \varphi \sqrt{2gh}$ mittels der Sprungweite des Strahles. Beide Messungen lassen sich jedoch nur bei dünnen Strahlen mit kreisförmigen Querschnitten erträglich genau bewerkstelligen.

Fig. 503.

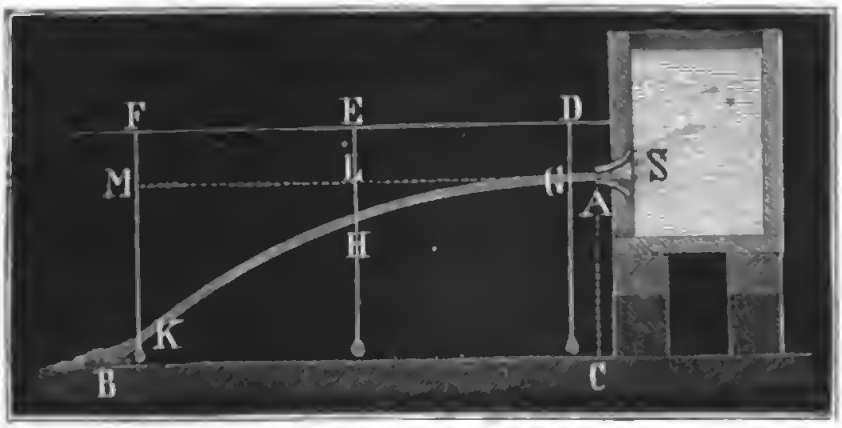


Der kreisförmige Querschnitt F_1 eines Strahles bestimmt sich sehr sicher mit Hülfe eines in Fig 503 abgebildeten, aus einem Ringe und 4 spitz zulaufenden Schrauben A, B, C, D bestehenden Apparates. Die Schrauben sind nach dem Mittelpunkte des Strahlenquerschnittes gerichtet, und werden so lange gestellt, bis ihre Spitzen die Oberfläche des Strahles berühren. Nach diesem wird der Ring von dem Strahle abgezogen und es werden die Abstände der gegenüberstehenden Schraubenspitzen von einander gemessen; zuletzt wird das

Mittel d_1 dieser Abstände als Durchmesser des Strahles angenommen. Ist nun noch d der Durchmesser des Mündungsquerschnittes, so hat man nun: $\alpha = \frac{F_1}{F} = \left(\frac{d_1}{d}\right)^2$, und dann $\varphi = \frac{\mu}{\alpha}$. Versuche.

Mißt man die Sprungweite $BC = b$ eines aus dem Mundstücke SA horizontal ausfließenden Strahles AB, Fig. 504, welche einer gewissen

Fig. 504.



Höhe $AC = a$ zukommt, so hat man nach §. 38 die Ausflußgeschwindigkeit $v_1 = \sqrt{\frac{g b^2}{2a}}$, und da nun $v_1 = \varphi v = \varphi \sqrt{2gh}$ ist, so erhält man dann: $\varphi = \frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{b^2}{4ah}} = \frac{b}{2\sqrt{ah}}$, und hieraus $\alpha = \frac{\mu}{\varphi}$.

Die Bestimmung von v ist jedoch noch sicherer, wenn man statt a und b die horizontalen und vertikalen Coordinaten dreier Punkte der parabolischen Axe AB des Strahles ausmißt, weil dann auch die Axe des Mundstückes eine unbekannte Neigung gegen den Horizont haben kann. Am einfachsten geht man zu Werke, wenn man eine horizontale Schnur DF über dem Strahle ausspannt, von drei gleichweit von einander abstehenden Punkten D, E, F derselben Lothe herabläßt, und an diesen die Abstände DG, EH und FK der Axe des Strahles von DF abmißt. Ist $DF = x$ die horizontale Entfernung der äußersten Punkte, sind ferner die Vertikalabstände DG, EH und FK, $= z$, z_1 und z_2, und nimmt man G als Coordinatenanfangspunkt an, so hat man die Coordinaten für den Punkt H:

$$x_1 = GL = DE = \tfrac{1}{2} DF = \frac{x}{2} \text{ und } y_1 = LH = EH - DG = z_1 - z,$$

und die für den Punkt K:

$$x_2 = GM = DF = x \text{ und } y_2 = MK - DG = z_2 - z.$$

Nach §. 38 ist nun, wenn α den Neigungswinkel der Strahlaxe in G bezeichnet:

Verſuche.

$$y_1 = x_1\, tang.\alpha + \frac{g\, x_1^2}{2\, v_1^2\, cos.\alpha^2} \text{ und auch}$$

$$y_2 = x_2\, tang.\alpha + \frac{g\, x_2^2}{2\, v_1^2\, cos.\alpha^2}, \text{ oder}$$

$$y_1 - x_1\, tang.\alpha = \frac{g\, x_1^2}{2\, v_1^2\, cos.\alpha^2} \text{ und}$$

$$y_2 - x_2\, tang.\alpha = \frac{g\, x_2^2}{2\, v_1^2\, cos.\alpha^2};$$

und es folgt durch Diviſion, da $x_2 = 2\, x_1$ iſt,

$$\frac{y_1 - x_1\, tang.\alpha}{y_2 - x_2\, tang.\alpha} = 1/4; \text{ hieraus aber } tang.\alpha = \frac{4\, y_1 - y_2}{x}.$$

Setzt man in eine der vorigen Formeln ſtatt $\frac{1}{cos.\alpha^2} = 1 + tang.\alpha^2$, und führt man ſtatt $tang.\alpha$ den letzten Ausdruck ein, ſo erhält man für die in Frage ſtehende Ausflußgeſchwindigkeit die Formel:

$$v_1 = \sqrt{\frac{g\, x^2}{2\,(y_2 - x\, tang.\alpha)\, cos.\alpha^2}} = \sqrt{\frac{(1 + tang.\alpha^2)\, g\, x^2}{2\,(2y_1 - 4\, y_1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{g\,[x^2 + (4\, y_1 - y_2)^2]}{4\,(y_2 - 2\, y_1)}}.$$

Der Geſchwindigkeitscoefficient iſt hiernach:

$$\varphi = \frac{v_1}{v} = \frac{v_1}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{x^2 + (4\, y_1 - y_2)^2}{8\, h\,(y_2 - 2\, y_1)}}.$$

Beiſpiel 1. Bei einem Strahle, welcher aus einem gut abgerundeten Mundſtücke von 1 Centimeter Weite ohne Contraction ausfloß, wurden folgende Meſſungsreſultate gefunden: $x = 2{,}480$ Meter,

$y_1 = z_1 - z = 0{,}267 - 0{,}1135 = 0{,}1535$ Meter,

$y_2 = z_2 - z = 0{,}669 - 0{,}1135 = 0{,}5555$ Meter,

und die Druckhöhe $h = 3{,}359$ Meter. Hiernach iſt der Geſchwindigkeitscoefficient

$$\varphi = \sqrt{\frac{2{,}48^2 + 0{,}059^2}{8\,.\,3{,}359\,.\,0{,}2485}} = \sqrt{\frac{6{,}185}{26{,}872\,.\,0{,}2485}} = 0{,}963.$$

Da keine Contraction ſtatt hat, ſo iſt $\alpha = 1$ und daher $\mu = \varphi$. Hiermit ſtimmen die in der Anmerkung zu §. 344 mitgetheilten Meſſungsreſultate ganz gut überein.

Beiſpiel 2. Meſſungen an einem vollſtändig contrahirten Strahle, welcher durch eine 1 Centimeter weite kreisrunde Mündung in der ebenen dünnen Wand floß, gaben bei der Druckhöhe $h = 3{,}396$ Meter Folgendes:

$x = 2{,}70$ Meter,

$y_1 = z_1 - z = 0{,}2465 - 0{,}1115 = 0{,}1350$ Meter, und

$y_2 = z_2 - z = 0{,}6620 - 0{,}1115 = 0{,}5505$ Meter;

und es folgt hieraus:

$$\varphi = \sqrt{\frac{2{,}70^2 + 0{,}01^2}{8\,.\,3{,}396\,.\,0{,}2805}} = \sqrt{\frac{7{,}2901}{27{,}168\,.\,0{,}2805}} = 0{,}978$$

Aus der gemeſſenen Ausflußmenge berechnete ſich aber $\mu = 0{,}617$, daher iſt der Contractionscoefficient $\alpha = \frac{\mu}{\varphi} = 0{,}631$, womit auch die Strahlenquerſchnittsmeſſungen gut übereinſtimmen.

Rectanguläre Seitenöffnungen.

§. 349. Die genaueſten Verſuche über den Ausfluß durch größere rectanguläre Seitenmündungen ſind in Metz von Poncelet und Lesbros angeſtellt worden. Die Weiten dieſer Mündungen waren durchgängig 2 Decimeter, die Höhen aber waren ſehr verſchieden, nämlich 1 Centimeter bis 2 Decimeter. Um eine vollſtändige Contraction herbeizuführen, wurden zur Herſtellung dieſer Mündungen 4 Millimeter dicke Meſſingbleche verwendet. Aus den Ergebniſſen dieſer Verſuche haben dieſe Experimentatoren mit Hülfe des Interpolirens die am Ende des Paragraphen folgenden Tabellen für die Ausflußcoefficienten berechnet, die man zur Meſſung oder Berechnung der Ausflußmenge benutzen kann.

Iſt b die Breite der Ausflußöffnung und ſind h_1 und h_2 die Waſſerſtände über der unterſten und über der oberſten horizontalen Kante der Mündung, ſo hat man nach §. 340 die Ausflußmenge $Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} \left(h_1^{3/2} - h_2^{3/2}\right)$. Führt man aber die Oeffnungshöhe a und die mittlere Druckhöhe $h = \frac{h_1 + h_2}{2}$ ein, ſo hat man annähernd $Q = \left(1 - \frac{a^2}{96\,h^2}\right) a\,b\,\sqrt{2gh}$, und daher die effective Ausflußmenge $Q_1 = \mu\,Q = \left(1 - \frac{a^2}{96\,h^2}\right) \mu\,a\,b\,\sqrt{2gh}$. Setzt man noch $\left(1 - \frac{a^2}{96\,h^2}\right) \mu = \mu_1$, ſo hat man einfach $Q_1 = \mu_1 ab\sqrt{2gh}$, und um mit dieſer einfachen oder gewöhnlichen Ausflußformel rechnen zu können, ſind in den folgenden Tabellen nicht erſt die Werthe für μ, ſondern die für μ_1 zuſammengeſtellt.

Da das Waſſer in der Nähe der Oeffnung in Bewegung iſt, ſo ſteht es unmittelbar vor der Oeffnung tiefer als in größerer Entfernung vor der Wand, in welcher ſich die Mündung befindet; es ſind deshalb auch zwei Tabellen zuſammengeſtellt worden, die eine für die in größerer Entfernung von der Mündung und die andere für die unmittelbar an der Mündungswand gemeſſenen Druckhöhen. Man erſieht übrigens aus beiden Tabellen, daß, wenn auch mit einigen Schwankungen, die Ausflußcoefficienten wachſen, je niedriger die Oeffnung und je kleiner die Druckhöhe iſt.

Haben die Mündungen andere Breiten, ſo bleibt, ſo lange man keine anderen Verſuche zu Grunde legen kann, nichts übrig, als die Coefficienten dieſer Tabellen ebenfalls anzuwenden, um die Ausflußmenge zu berechnen. Sind ferner die Oeffnungen nicht rectangulär, ſo beſtimme man ihre

Rectanguläre Seitenöffnungen.

mittlere Breite und mittlere Höhe und führe die dieſen Dimenſionen entſprechenden Coefficienten in der Rechnung ein. Endlich iſt es immer vorzuziehen, die Druckhöhe in einer größeren Entfernung vor der Mündungswand zu meſſen und die erſte Tabelle anzuwenden, als unmittelbar an der Mündung, wo der Waſſerſpiegel gekrümmt und weniger ruhig iſt, als mehr oberhalb der Mündung.

Beiſpiele. 1) Welche Waſſermenge fließt durch eine rectanguläre Oeffnung von 2 Decimeter Breite und 1 Decimeter Höhe, wenn der Waſſerſpiegel $1\frac{1}{2}$ Meter über der oberen Kante ſteht? Hier iſt

$$b = 0{,}2,\ a = 0{,}1,\ h = \frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{1{,}6 + 1{,}5}{2} = 1{,}55,$$

daher die theoretiſche Ausflußmenge

$Q = 0{,}1 \,.\, 0{,}2\,\sqrt{2g}\,.\,\sqrt{1{,}55} = 0{,}02\,.\,4{,}429\,.\,1{,}245 = 0.1103$ Cubikmeter.

Nun giebt aber die Tabelle I. für $a = 0{,}1$ und $h_2 = 1{,}5$, $\mu_1 = 0{,}611$, daher iſt die effective Ausflußmenge $Q_1 = 0{,}611\,.\,0{,}1103 = 0{,}0674$ Cubikmeter.

2) Welche Ausflußmenge entſpricht einer rectangulären Mündung in der dünnen Wand von 8 Zoll Breite, und 2 Zoll Höhe bei 15 Zoll Waſſerhöhe über der oberen Kante? Die theoretiſche Ausflußmenge iſt

$$Q = \tfrac{2}{3}\,.\,\tfrac{1}{6}\,.\,7{,}906\,\sqrt{\tfrac{1}{3}} = 0{,}8784\,.\,1{,}1547 = 1{,}014 \text{ Cubikfuß.}$$

Nun iſt aber 2 Zoll ohngefähr 0,05 Meter und 15 Zoll ohngefähr 0,4 Meter, daher iſt nach der Tabelle für $a = 0{,}05$ und $h_2 = 0{,}4$ der entſprechende Coefficient $\mu_1 = 0{,}628$ anzunehmen und das geſuchte Waſſerquantum

$$Q_1 = 0{,}628\,.\,1{,}014 = 0{,}637 \text{ Cubikfuß zu ſetzen.}$$

3) Wenn die Breite 0,25, die Höhe 0,15 und der Waſſerſtand $h_2 = 0{,}045$ Meter beträgt, ſo iſt

$Q = 0{,}25\,.\,0{,}15\,.\,4{,}429\,.\,\sqrt{0{,}12} = 0{,}166\,.\,0{,}3464 = 0{,}0575$ Cubikmeter.

Der Höhe 0,15 entſpricht für $h_2 = 0{,}04$ der Mittelwerth

$\mu_1 = \frac{0{,}582 + 0{,}603}{2} = 0{,}5925$ und für $h_2 = 0{,}05$, $\mu_1 = \frac{0{,}585 + 0{,}605}{2} = 0{,}595$;

da nun aber $h_2 = 0{,}045$ gegeben iſt, ſo ſetzen wir das neue Mittel

$\frac{0{,}5925 + 0{,}595}{2} = 0{,}594$ als Ausflußcoefficient ein, und erhalten ſo die geſuchte Waſſermenge $Q_1 = 0{,}594\,.\,0{,}0575 = 0.03415$ Cubikmeter.

Tabelle I.

Die Ausflußcoefficienten für den Ausfluß des Wassers durch rectanguläre Mündungen in einer dünnen vertikalen Wand, nach Poncelet und Lesbros. Die Druckhöhen sind oberhalb der Mündung, an einer Stelle gemessen, wo das Wasser als stillstehend angesehen werden kann. Rectanguläre Seitenöffnungen.

Druckhöhe oder Abstand des Wasserspiegels von der oberen Seite der Mündung, in Metern.	Oeffnungshöhen in Metern.					
	0,20	0,10	0,05	0,03	0,02	0,01
0,000	»	»	»	»	»	»
0,005	»	»	»	»	»	0,705
0,010	»	»	0,607	0,630	0,660	0,701
0,015	»	0,593	0,612	0,632	0,660	0,697
0,020	0,572	0,596	0,615	0,634	0,659	0,694
0,030	0,578	0,600	0,620	0,638	0,659	0,688
0 040	0,582	0,603	0,623	0,640	0,658	0,683
0,050	0,585	0,605	0,625	0,640	0,658	0,679
0,060	0,587	0,607	0,627	0,640	0,657	0,676
0,070	0,588	0,609	0,628	0,639	0,656	0,673
0,080	0,589	0,610	0,629	0,638	0,656	0,670
0,090	0,591	0,610	0,629	0,637	0,655	0,668
0,100	0,592	0,611	0,630	0,637	0,654	0,666
0,120	0,593	0,612	0,630	0,636	0,653	0,663
0,140	0,595	0,613	0,630	0,635	0,651	0,660
0,160	0,596	0,614	0,631	0,634	0,650	0,658
0,180	0,597	0,615	0,630	0,634	0,649	0,657
0,200	0,598	0,615	0,630	0,633	0,648	0,655
0,250	0,599	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653
0,300	0,600	0,616	0,629	0,632	0,644	0,650
0,400	0,602	0 617	0,628	0,631	0,642	0,647
0,500	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644
0,600	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,642
0,700	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640
0,800	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637
0,900	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635
1,000	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632
1,100	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629
1,200	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626
1,300	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622
1,400	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618
1,500	0,602	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615
1,600	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613
1,700	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612
1,800	0,601	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612
1,900	0,601	0,608	0,614	0,613	0,612	0,611
2,000	0,601	0,607	0 613	0,612	0,612	0,611
3,000	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609

Anmerk. Tabellen dieser Art für das preuß. Fußmaaß theilt der »Ingenieur« S. 448 mit.

Tabelle II.

Rectanguläre Seitenöffnungen.

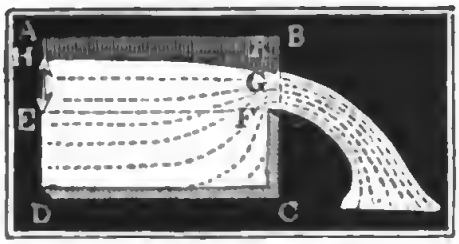
Die Ausflußcoefficienten für den Ausfluß des Waſſers durch rectanguläre Mündungen in einer vertikalen dünnen Wand, nach Poncelet und Lesbros. Die Druckhöhen ſind unmittelbar an der Mündung gemeſſen.

Druckhöhe oder Abſtand des Waſſerſpiegels von der oberen Seite der Mündung, in Metern.	Oeffnungshöhen in Metern.					
	0,20	0,10	0,05	0,03	0,02	0,01
0,000	0,619	0,667	0,713	0,766	0,783	0,795
0,005	0,597	0,630	0,668	0,725	0,750	0,778
0,010	0,595	0,618	0,642	0,687	0,720	0,762
0,015	0,594	0,615	0,639	0,674	0,707	0,745
0,020	0,594	0,614	0,638	0,668	0,697	0,729
0,030	0,593	0,613	0,637	0,659	0,685	0,708
0,040	0,593	0,612	0,636	0,654	0,678	0,695
0,050	0,593	0,612	0,636	0,651	0,672	0,686
0,060	0,594	0,613	0,635	0,647	0,668	0,681
0,070	0,594	0,613	0,635	0,645	0,665	0,677
0,080	0,594	0,613	0,635	0,643	0,662	0,675
0,090	0,595	0,614	0,634	0,641	0,659	0,672
0,100	0,595	0,614	0,634	0,640	0,657	0,669
0,120	0,596	0,614	0,633	0,637	0,655	0,665
0,140	0,597	0,614	0,632	0,636	0,653	0,661
0,160	0,597	0,615	0,631	0,635	0,651	0,659
0,180	0,598	0,615	0,631	0,634	0,650	0,657
0,200	0,599	0,615	0,630	0,633	0,649	0,656
0,250	0,600	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653
0,300	0,601	0,616	0,629	0,632	0,644	0,651
0,400	0,602	0,617	0,629	0,631	0,642	0,647
0,500	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,645
0,600	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,643
0,700	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640
0,800	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637
0,900	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635
1,000	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632
1,100	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629
1,200	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626
1,300	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622
1,400	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618
1,500	0,602	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615
1,600	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613
1,700	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612
1,800	0,601	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612
1,900	0,601	0,608	0,614	0 613	0,613	0,611
2,000	0,601	0,607	0,614	0,612	0,612	0,611
3,000	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609

Digitized by Google

§. 350. Fließt das Wasser durch Ueberfälle (franz. und engl. déversoirs) oder Einschnitte in einer dünnen Wand wie z. B. FB, Fig. 505, Ueberfälle.

Fig. 505.



so erleidet der Strahl an drei Seiten eine Contraction, wodurch ebenfalls eine Verminderung der Ausflußmenge herbeigeführt wird. Es ist daher das Ausflußquantum für diese Mündungen:

$Q_1 = \frac{2}{3}\mu b h \sqrt{2gh}$ zu setzen.

Hier ist aber die Druckhöhe $EH = h$, oder der Wasserstand über der Ueberfallsschwelle F nicht unmittelbar an der Schwelle, sondern mindestens 2 Fuß vor der Wand, in welcher sich die Mündung befindet, zu messen, weil der Wasserspiegel vor der Mündung eine Senkung erleidet, die nach der Mündung zu immer größer und größer wird, und in der Mündungsebene selbst eine Größe GR von 0,1 bis 0,25 der Druckhöhe FR beträgt, so daß die Dicke FG des Wasserstrahles in dieser Ebene nur 0,9 bis 0,75 der Druckhöhe oder des Wasserstandes beträgt. Ueber den Ausfluß des Wassers durch Ueberfälle in dünnen Wänden sind von Vielen Versuche angestellt worden, und es bieten deren Resultate eine große Mannichfaltigkeit, aber nicht überall die gewünschte Uebereinstimmung dar. Die Ergebnisse der Versuche von Poncelet und Lesbros an Ueberfällen von 2 Decimeter Breite enthält folgende kleine Tabelle.

Tabelle der Ausflußcoefficienten für Ueberfälle von 2 Decimeter Breite, nach Poncelet und Lesbros.

Druckhöhe h in Metern.	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08	0,10	0,15	0,20	0,22
Ausflußcoefficient $\mu_1 = \frac{2}{3}\mu$.	0,424	0,417	0,412	0,407	0,401	0,397	0,395	0,393	0,390	0,385

Bei ohngefähren Bestimmungen kann man hiernach $\mu_1 = 0{,}4$ setzen. Versuche an Ueberfällen mit größeren Breiten gaben Eytelwein im Mittel $\mu_1 = \frac{2}{3}\mu = 0{,}42$ und Bidone $\mu_1 = \frac{2}{3} . 0{,}62 = 0{,}41$ u. s. w. Die ausgedehntesten Versuche sind von D'Aubuisson und Castel ausgeführt worden. Aus ihnen folgert D'Aubuisson, daß für Ueberfälle, deren Breite nicht mehr als den dritten Theil der Breite des Kanales oder der Wand beträgt, worin sich der Ueberfall befindet, μ im Mittel 0,60, also $\frac{2}{3}\mu = 0{,}40$ zu setzen sei, daß dagegen für Ueberfälle, welche über die ganze Wand weggehen, oder mit dem Kanale einerlei Breite haben,

Ueberfälle. $\mu = 0{,}665$ alſo $\mu_1 = 0{,}444$ angenommen werden müſſe, daß endlich bei anderen Verhältniſſen zwiſchen der Ueberfall- und Kanalbreite die Ausflußcoefficienten ſehr verſchieden, und zwar zwiſchen 0,58 und 0,66 liegend, ausfallen. Die vom Verfaſſer angeſtellten Unterſuchungen über den Ausfluß des Waſſers durch Ueberfälle bringen weiter unten (§. 356) die Veränderlichkeit dieſer Ausflußcoefficienten auf Geſetze zurück.

Beiſpiele. 1) Ein Ueberfall von 0,25 Meter Breite und 0,15 Waſſerſtand oder Druckhöhe giebt in der Secunde die Waſſermenge $Q = 0{,}393 . b h \sqrt{2gh}$ $= 0\,393 . 4{,}429 . 0{,}25 . (0{,}15)^{3/2} = 0{,}435 . 0{,}0581 = 0{,}02527$ Cubikmeter.

2) Welche Breite hat man einem Ueberfalle zu geben, der bei einem Waſſerſtande von 8 Zoll eine Waſſermenge von 6 Cubikfuß pr. Secunde durchlaſſen ſoll? Es iſt

$$b = \frac{Q_1}{\mu_1 \sqrt{2gh^3}} = \frac{6}{0{,}4 . 7{,}906 \sqrt{(\frac{2}{3})^3}} = \frac{6}{3{,}1624 . 0{,}5443} = 3{,}486 \text{ Fuß.}$$

Nimmt man nach Eytelwein $\mu_1 = 0{,}42$ an, ſo folgt

$$b = \frac{6}{3{,}32 . 0{,}5443} = 3{,}320 \text{ Fuß.}$$

Maximum und Minimum der Contraction. §. 351. Bei dem Ausfluſſe des Waſſers durch Mündungen in einer ebenen Wand ſteht die Axe des Strahles rechtwinkelig auf die Wandfläche und es iſt deshalb die Größe der Contraction eine mittlere, bildet aber die Axe der Mündung oder des Strahles einen ſpitzen Winkel mit dem die Mündung enthaltenden Theile der Wand, ſo fällt die Contraction kleiner aus, und iſt der Winkel zwiſchen dieſer Axe und den inneren Randflächen der Oeffnung ein ſtumpfer, ſo ſtellt ſich eine noch größere Contraction heraus. Den einen Fall repräſentirt Fig. 506, und den andern Fig. 507. Jedenfalls hat dieſe Verſchiedenheit der Contraction darin ihren Grund, daß dort die von den Seiten zufließenden Waſſerelemente weniger, hier aber mehr von ihrer Richtung abgelenkt werden, wenn ſie durch die Mündung gehen und zu einem Strahle ſich vereinigen.

Fig. 506.

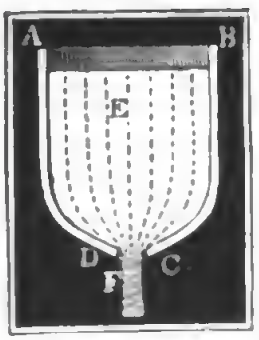
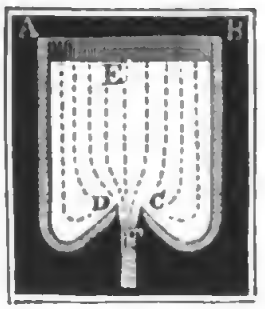


Fig. 507.



Die Contraction iſt ein Minimum, d. h. Null, wenn durch allmälige Zuſammenziehung der die Mündung umfaſſenden Wand das Zufließen von der Seite ganz verhindert wird, und ein Maximum, wenn die Wand der Richtung des Strahles entgegen gerichtet iſt, ſo daß gewiſſe Waſſerelemente ſich um 180° wenden müſſen, um in die Mündung zu gelangen. Beide Fälle ſind in den Figuren 508 und 509 abgebildet. In dem erſten Falle iſt der Ausflußcoefficient beinahe 1, nämlich 0,96 bis 0,98, und im zweiten hat er ſich bei den Meſſungen von Borda, Bidone und von dem Verfaſſer im Mittel 0,53 herausgeſtellt.

In der Praxis kommen, durch convergente Wände herbeigeführt, Veränderungen der Ausflußcoefficienten sehr oft vor, namentlich tritt der Fall bei Schützen ein, wenn diese gegen den Horizont geneigt sind, wie z. B. Fig. 510 vor Augen führt. Poncelet fand für eine derartige Schutzöffnung den Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}80$, wenn das Schutzbrett 45° geneigt war, und dagegen μ nur $= 0{,}74$ bei einer Neigung von $63\frac{1}{2}$ Grad, d. h. bei einer Böschung von $\frac{1}{2}$. Für derartige Ueberfälle, Fig. 511, wo ebenfalls wie bei der Poncelet'schen Schütze nur an einer Seite Contraction eintritt, fand der Verfasser $\mu = 0{,}70$, also $\mu_1 = \frac{2}{3}\mu = 0{,}467$ bei einer Neigung von 45°; und $\mu = 0{,}67$, also $\mu_1 = 0{,}447$, bei einer Neigung von $63\frac{1}{2}$ Grad.

Maximum und Minimum der Contraction.

Fig. 508.

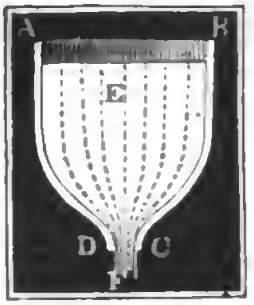


Fig. 509.

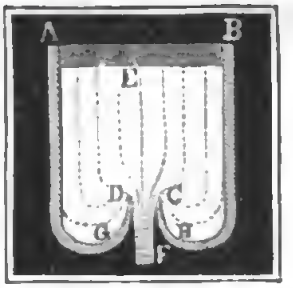


Fig. 510.

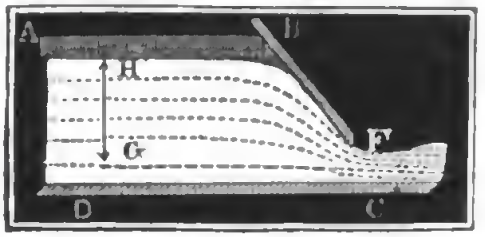
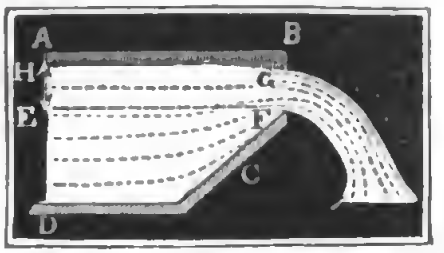


Fig. 511.



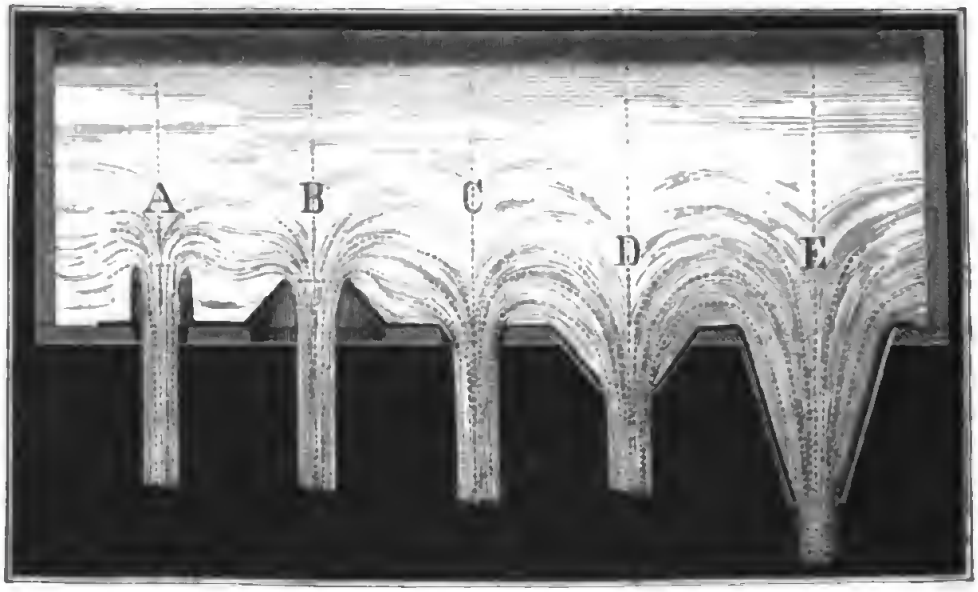
Beispiel. Wenn das unter dem Winkel von 50 Grad geneigte Schutzbrett, welches quer über ein $2\frac{1}{4}$ Fuß breites Gerinne weggeht, $\frac{1}{2}$ Fuß hoch gezogen wird, und sich hierauf der Wasserspiegel um 4 Fuß über den Gerinnboden stellt, so läßt sich die Oeffnungshöhe $a = \frac{1}{2}\,sin.\,50° = 0{,}3830$ Fuß, die Druckhöhe $h = 4 - \frac{1}{2}.0{,}3830 = 3{,}8085$ Fuß, und der Ausflußcoefficient $\mu = 0{,}78$, daher die Ausflußmenge $Q_1 = 0{,}78.2{,}25.0{,}3830.7{,}906\sqrt{3.8085} = 10\,36$ Cubikfuß setzen.

§ 352. Die Contraction eines Wasserstrahles ist um so größer, je mehr die Richtung des von der Seite zuströmenden Wassers von der Bewegungsrichtung des Strahles abweicht. Bei dem Ausflusse durch die Mündung C, Fig. 512 a. f. S, in der ebenen dünnen Wand beträgt der Winkel δ, um welchen die Bewegungsrichtung der von der Seite zuströmenden Wasserelemente von der Axen- oder Bewegungsrichtung des Strahles abweicht, den Rechtwinkel, bei der Mündung A, welche von einer dünnen Röhrenwand gebildet wird, mißt dieser Winkel δ 2 Rechte ($2R$); bei dem Ausflusse durch ein conisch divergentes Mundstück B ist δ zwischen R und

Contractionsgrade.

Contractions-ſcala. $2R$, und bei dem Ausfluſſe durch coniſch convergente Anſatzſtücke D und E iſt δ zwiſchen 0^0 und R.

Fig. 512.



Um das Geſetz kennen zu lernen, nach welchem die Contraction mit dem Winkel δ abnimmt, hat der Verfaſſer an einer größern Anzahl von Mundſtücken von 2 Centimeter Mündungsweite unter verſchiedenem Drucke (von 1 bis 10 Fuß) eine ganze Reihe von Verſuchen angeſtellt, und die Ergebniſſe derſelben in folgender Tabelle zuſammengeſtellt:

δ	180°	157½°	135°	112½°	90°	67½°	45°	22½°	11¼°	5¾°	0°
μ	0,541	0,546	0,577	0,606	0,632	0,684	0,753	0,902	0,924	0,949	0,966

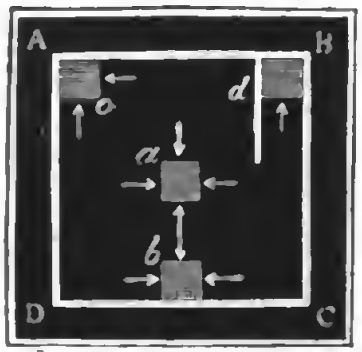
Dieſe Tabelle giebt allerdings nur die Ausflußcoefficienten (μ) an, welche den verſchiedenen Abweichungswinkeln δ zukommen; die Contractionscoefficienten ſind noch ein Paar Procent größer, da bei jedem Ausfluſſe auch ein kleiner Verluſt an Geſchwindigkeit eintritt. Um bei dem Eintritte des Waſſers in die convergenten Anſatzſtücke D und E keinen Verluſt an lebendiger Kraft zu erleiden, wurden dieſe Stücke bei der Einmündung abgerundet. Die Reibung, welche das Waſſer bei der Bewegung an den Wänden dieſer Mundſtücke zu überwinden hat, wird weiter unten (§. 368) beſtimmt werden.

Partielle Contraction. §. 353. Wir haben ſeither nur den Fall kennen gelernt, wo das Waſſer von allen Seiten her der Oeffnung zuſtrömt und einen ringsherum contrahirten Strahl bildet, und müſſen nun noch auch die Fälle, wenn das Waſſer nur von einer oder einigen Seiten her gegen die Oeffnung ſtrömt und deshalb einen nur theilweiſe contrahirten Strahl hervorbringt,

in Unterſuchung ziehen. Um dieſe Contractionsverhältniſſe von einander zu unterſcheiden, wollen wir den Fall, wenn der Strahl auf allen Seiten contrahirt, die vollſtändige und den Fall, wenn der Strahl nur auf einen Theil ſeines Umfanges zuſammengezogen iſt, die unvollſtändige oder partielle Contraction (franz. contraction incomplète; engl. incomplete contraction) nennen. Die unvollſtändige Contraction wird herbeigeführt, wenn eine Mündung in der ebenen dünnen Wand durch andere Wände in der Richtung des Strahles auf einer oder mehreren Seiten eingefaßt iſt. In Fig. 513 ſind vier gleichgroße Mündungen *a, b, c, d*, im Boden *AC* eines Gefäßes abgebildet. Die Contraction beim Ausfluſſe durch die Mündung *a* in der Mitte des Bodens iſt vollſtändig, weil bei ihr das Waſſer von allen Seiten zuſtrömen kann; die Contraction beim Ausfluſſe durch *b*, *c* und *d* iſt aber unvollſtändig, weil bei dieſen das Waſſer nur von drei, zwei oder einer Seite zuſtrömen kann. Ebenſo, wenn eine rectanguläre Seitenöffnung bis zum Boden des Gefäßes geht, ſo iſt die Contraction partiell, weil dann dieſelbe auf der Seite im Boden wegfällt; wenn ferner die Schutzöffnung bis zum Boden und bis an die Seitenwände des Gerinnes reicht, ſo bleibt nur noch an einer Seite Contraction übrig.

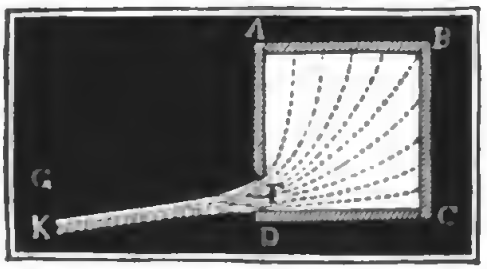
Partielle Contraction.

Fig. 513.



Die partielle Contraction macht ſich auf zweierlei Weiſe bemerklich. Erſtens giebt ſie dem Strahl eine ſchiefe Richtung, und zweitens bewirkt ſie einen ſtärkeren Ausfluß.

Fig. 514.



Reicht z. B. die Seitenöffnung *F*, Fig. 514, bis an eine zweite Seitenwand *CD*, ſo daß daſelbſt eine Contraction nicht eintreten kann, ſo weicht die Axe *FK* des Strahles um einen Winkel *KFG* von ohngefähr 9 Grad von der Normale *FG* zur Ebene der Mündung ab. Viel größer ſtellt ſich aber noch die Schiefe des Strahles heraus, wenn zwei benachbarte Seiten der Mündung eingefaßt ſind. Iſt die Mündung an zwei gegenüberliegenden Seiten eingefaßt, und die Contraction an denſelben aufgehoben, ſo tritt natürlich eine ſolche Abweichung nicht ein, wohl aber nimmt der Strahl auf den nicht eingefaßten Seiten in einiger Entfernung außerhalb der Mündung noch mehr Ausbreitung an, als wenn dieſe Einfaſſung nicht vorhanden wäre.

Partielle Contractionen.

Wenn auch durch die partielle Contraction eine größere Ausflußmenge erzielt wird, ſo muß man ſie doch in der Regel zu vermeiden ſuchen, weil durch ſie der Strahl eine abweichende Richtung und eine große Ausbreitung erleidet.

Verſuche über den Ausfluß des Waſſers bei partieller Contraction ſind von Bidone und von dem Verfaſſer angeſtellt worden. Sie haben gezeigt, daß die Ausflußcoefficienten mit dem Verhältniſſe des eingefaßten Theiles zum ganzen Umfange faſt gleichmäßig zunehmen; doch iſt leicht zu ermeſſen, daß dieſe Beziehung eine andere wird, wenn der Umfang beinahe oder ganz eingefaßt und die Contraction beinahe oder ganz aufgehoben iſt. Setzen wir das Verhältniß der Einfaſſung zum ganzen Umfange $= n$, und verſtehen wir unter $\varkappa$ irgend eine Erfahrungszahl, ſo können wir, wenn auch nur annähernd, das Verhältniß des entſprechenden Ausflußcoefficienten μ_n der partiellen Contraction zum Ausflußcoefficienten μ_o bei vollſtändiger Contraction:

$$\frac{\mu_n}{\mu_o} = 1 + \varkappa n, \text{ und folglich } \mu_n = (1 + \varkappa n)\,\mu_o \text{ ſetzen.}$$

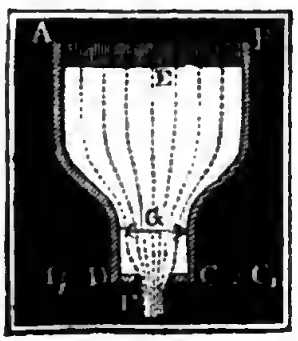
Die Verſuche Bidone's geben für kleine kreisförmige Mündungen $\varkappa = 0{,}128$ und für quadratiſche $\varkappa = 0{,}152$; die des Verfaſſers haben für kleine rectanguläre Mündungen $\varkappa = 0{,}134$, für größere (Ponceletmündungen) 0,2 Meter Breite und 0,1 Meter Höhe aber $\varkappa = 0{,}157$ geliefert (ſ. die Zeitſchrift: »der Ingenieur«, Bd. 2.) In der Anwendung kommen faſt nur rectanguläre Mündungen mit Einfaſſungen vor; wir werden für ſie den mittleren Werth $\varkappa = 0{,}155$ annehmen und hiernach $\mu_n = (1 + 0{,}155 \,.\, n)\,\mu_o$ ſetzen. Bei einer rectangulären Seitenöffnung von der Höhe a und Breite b iſt $n = \frac{b}{2\,(a+b)}$, wenn die Contraction an einer Seite b wegfällt, wenn z. B. dieſe Seite in der Ebene des Bodens liegt, ferner $n = \frac{1}{2}$, wenn eine Seite a und eine Seite b eingefaßt ſind, und $n = \frac{2\,a + b}{2\,(a+b)}$, wenn auf einer Seite b und auf beiden Seiten a die Contraction verhindert wird, wenn z. B. die Mündung die ganze Breite des Reſervoirs einnimmt und bis zur Bodenebene reicht.

Beiſpiel. Welches Waſſerquantum liefert der Ausfluß des Waſſers durch eine 3 Fuß breite und 10 Zoll hohe vertikale Schutzöffnung, bei einem Drucke von $1\frac{1}{2}$ Fuß über der oberen Mündungsſeite, wenn die untere Mündungsſeite in den Gerinnboden fällt, und daher die Contraction am Boden wegfällt. Die theoretiſche Ausflußmenge iſt $Q = \frac{10}{12} \,.\, 3 \,.\, 7{,}906 \sqrt{1{,}5 + \frac{5}{12}} = \frac{5}{2} \,.\, 7{,}906 \sqrt{1{,}9166}$ $= 27{,}35$ Cubikfuß. Nach der Poncelet'ſchen Tabelle iſt bei vollſtändiger Contraction $\mu = 0{,}604$ zu ſetzen, nun hat man aber $n = \frac{3}{2\,(3 + \frac{10}{12})} = \frac{9}{18+5}$ $= \frac{9}{23}$, daher iſt für den vorliegenden Fall der partiellen Contraction $\mu_n = (1 + 0{,}155 \,.\, \frac{9}{23}) \,.\, 0{,}604 = 1{,}060 \,.\, 0{,}604 = 0{,}640$ und das effective Ausflußquantum $Q_1 = 0{,}640\, Q = 0{,}640 \,.\, 27{,}35 = 17{,}50$ Cubikfuß.

§. 354. Die Contraction des Wasserstrahles ist auch noch davon abhängig, ob das Wasser vor der Mündung ziemlich in Ruhe steht, oder ob es mit einer gewissen Geschwindigkeit vor derselben ankommt; je schneller das Wasser der Ausflußmündung zuströmt, je weniger ist auch der Strahl zusammengezogen, desto größer fällt auch die Ausflußmenge aus. Die oben angegebenen und untersuchten Contractions- und Ausflußverhältnisse beziehen sich nur auf den Fall, wenn sich die Mündung in einer großen Wand befindet, und nun angenommen werden kann, daß das Wasser nur mit einer sehr kleinen Geschwindigkeit der Mündung zufließt; wir müssen daher auch die Contractions- und Ausflußverhältnisse kennen lernen, wenn der Mündungsquerschnitt nicht viel kleiner ist, als der Querschnitt des zufließenden Wassers, wenn folglich das Wasser schon mit einer beträchtlichen Geschwindigkeit an der Mündung ankommt. Um diese beiden Fälle von einander zu unterscheiden, wollen wir die Contraction bei stillstehendem Oberwasser die vollkommene und die bei bewegtem Oberwasser die unvollkommene Contraction (franz. contraction imparfaite; engl. imperfect contraction) nennen. Unvollkommen ist z. B. die Contraction beim Ausfluß aus dem Gefäße AC, Fig. 515, weil der Querschnitt F der Mündung nicht viel kleiner ist, als der Querschnitt G des ankommenden Wassers oder der Inhalt der Wand CD, in welchem sich diese Mündung befindet. Hätte dagegen das Gefäß die Form ABC_1D_1, wäre also der Inhalt der Bodenfläche C_1D_1 viel größer als der Mündungsquerschnitt F, so würde der Ausfluß mit vollkommener Contraction vor sich gehen. Uebrigens unterscheidet sich der unvollkommen contrahirte Wasserstrahl nicht bloß durch seine größere Stärke, sondern auch dadurch von dem vollkommen contrahirten Wasserstrahle, daß er nicht so durchsichtig und krystallähnlich ist wie dieser.

Unvollkommene Contraction.

Fig. 515.



Setzt man das Verhältniß zwischen den Flächenräumen der Mündung F und der Mündungswand G, also $\frac{F}{G} = n$, den Ausflußcoefficienten bei vollkommener Contraction $= \mu_o$ und den bei unvollkommener Contraction $= \mu_n$, so kann man mit großer Genauigkeit, den vom Verfasser hierüber angestellten Versuche und Rechnungen zufolge, setzen:

1) für kreisförmige Mündungen:

$$\mu_n = \mu_o\,[1 + 0{,}04564\,(14{,}821^n - 1)],\text{ und}$$

2) für rectanguläre Mündungen:

$$\mu_n = \mu_o\,[1 + 0{,}0760\,(9^n - 1)]\ ^*).$$

*) Versuche über die unvollkommene Contraction des Wassers u. s. w. Leipzig, 1843.

Unvollkommne Contraction.

Zur Erleichterung der Rechnung in Fällen der Anwendung sind die Correctionen $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ der Ausflußcoefficienten wegen Unvollkommenheit der Contraction in folgenden kleinen Tabellen zusammengestellt.

Tabelle I.

Die Correctionen der Ausflußcoefficienten für kreisrunde Oeffnungen.

n	0,05	0,10	0,15	0.20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,007	0,014	0,023	0,034	0,045	0,059	0,075	0,092	0,112	0,134

n	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,161	0,189	0,223	0,260	0,303	0,351	0,408	0,471	0,546	0,613

Tabelle II.

Die Correctionen der Ausflußcoefficienten für rectanguläre Oeffnungen.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,009	0,019	0,030	0,042	0,056	0,071	0,088	0,107	0,128	0,152

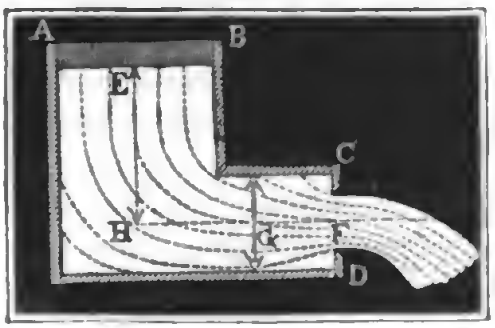
n	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,178	0,208	0,241	0,278	0,319	0,365	0,416	0,473	0,537	0,608

Bei diesen Tabellen stehen oben verschiedene Werthe von den Querschnittsverhältnissen $n = \frac{F}{G}$, und unmittelbar darunter die entsprechenden Zusätze der Ausflußcoefficienten wegen der Unvollkommenheit der Contraction. Z. B. beim Querschnittsverhältniß $n = 0{,}35$, d. i. für den

Fall, wenn der Inhalt der Mündung 35 Hundertel vom Inhalte der ganzen Mündungswand iſt, hat man bei kreisförmigen Mündungen Unvollkommene Contraction.

$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}075$ und bei rectangulären Mündungen $= 0{,}088$; es iſt alſo der Ausflußcoeffizient bei vollkommener Contraction im erſten Falle um 75 Tauſendel und im zweiten um 88 Tauſendel größer zu machen, um den entſprechenden Ausflußcoefficienten bei unvollkommener Contraction zu erhalten. Wäre der Ausflußcoefficient $\mu_0 = 0{,}615$, ſo hätte man daher im erſten Falle $\mu_{0.35} = 1{,}075 \,.\, 0{,}615 = 0{,}661$ und im zweiten Falle $\mu_{0.35} = 1{,}088 \,.\, 0{,}615 = 0{,}669$.

Fig. 516.



Beiſpiel. Welche Ausflußmenge giebt die rectanguläre $1\frac{1}{4}$ Fuß breite und $\frac{1}{2}$ Fuß hohe Seitenmündung F, wenn dieſelbe in einer rectangulären Wand CD, Fig. 516, von 2 Fuß Breite und 1 Fuß Höhe ausgeſchnitten iſt, und die Druckhöhe $EH = h$ im ſtillſtehenden Waſſer 2 Fuß beträgt? Die theoretiſche Waſſermenge iſt $Q = 1{,}25 \,.\, 0{,}5 \,.\, 7{,}906 \sqrt{2} = 4{,}941 \,.\, 1{,}414 = 6{,}987$ Cubikfuß, und der Ausflußcoefficient bei vollkommner Contraction iſt nach Poncelet: $\mu_0 = 0{,}610$; nun iſt aber das Querſchnittsverhältniß $n = \frac{F}{G} = \frac{1{,}25 \,.\, 0{,}5}{2 \,.\, 1} = 0{,}312$, und für $n = 0{,}312$, nach Tabelle II.,

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}071 + {}^{12}/_{50}\,(0{,}088 - 0{,}071) = 0{,}071 + 0{,}004 = 0{,}075$$

zu ſetzen, daher folgt denn der Ausflußcoefficient für den vorliegenden Fall $\mu_{0{,}312} = 1{,}075 \,.\, \mu_0 = 1{,}075 \,.\, 0{,}610 = 0{,}6557$ und die Ausflußmenge $Q_1 = 0{,}6557 \,.\, Q = 0{,}6557 \,.\, 6{,}987 = 4{,}581$ Cubikfuß.

§. 355. Wir haben ſeither angenommen, daß die Druckhöhe im ſtillſtehenden Waſſer gemeſſen worden ſei, und müſſen nun noch den Fall abhandeln, wenn nur der Waſſerſtand des bewegten, der Mündung mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit zufließenden Waſſers gemeſſen werden kann. Ausfluß des bewegten Waſſers.

Setzen wir eine rectanguläre Seitenöffnung voraus, bezeichnen wir deren Breite durch b und die Waſſerſtände in Hinſicht auf die beiden horizontalen Kanten durch h_1 und h_2, die der Geſchwindigkeit c des zufließenden Waſſers entſprechende Höhe aber durch k, ſo haben wir die theoretiſche Ausflußmenge $Q = {}^2/_3 b \sqrt{2g}\,[(h_1 + k)^{3/2} - (h_2 + k)^{3/2}]$.

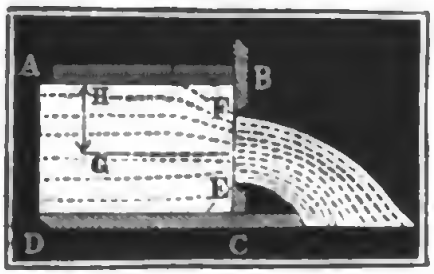
Dieſe Formel läßt ſich aber nicht unmittelbar anwenden zur Beſtimmung der Waſſermenge, weil die Geſchwindigkeitshöhe

$k = \frac{c^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{G}\right)^2$ wieder von Q abhängt, und die weitere Um-

Ausfluß des bewegten Wassers.

formung auf eine complicirte höhere Gleichung führt, es ist daher weit einfacher, wenn man die effective Wassermenge $Q_1 + \mu_1\, ab\sqrt{2gh}$ setzt, und unter μ_1 nicht den bloßen Ausfluß-, sondern einen vorzüglich vom Querschnittsverhältnisse abhängigen Coefficienten versteht. Am häufigsten kommt der Fall vor, wenn es darauf abgesehen ist, das in Gerinnen und Kanälen fließende Wasser zu messen, weil es hier nur selten möglich ist, das Wasser durch eine die Ausflußöffnung enthaltende Querwand BC, Fig. 517, so hoch aufzustauen, daß die Mündung EF nur ein kleiner Theil gegen den Querschnitt des zufließenden Wasserstromes wird und daher die Geschwindigkeit des letzteren sehr klein gegen die mittlere Geschwindigkeit ausfällt.

Fig. 517.



Aus den vom Verfasser hierüber angestellten Versuchen mit den Poncelet'schen Mündungen, wobei die Druckhöhe ein Meter oberhalb der Mündungsebene gemessen wurde, hat sich ziemlich genau

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}641\left(\frac{F}{G}\right)^2 = 0{,}641\,.\,n^2,$$ ergeben, wobei $n = \frac{F}{G}$

das Querschnittsverhältniß, welches jedoch nicht viel über ½ sein soll, ferner μ_0 den aus der Poncelet'schen Tabelle genommenen Ausflußcoefficienten bei vollkommener Contraction, und μ_n den derselben Mündung im vorliegenden Falle entsprechenden Ausflußcoefficienten bezeichnet. Ist b die Breite, a die Höhe der Mündung, b_1 die Breite und a_1 die Höhe des Wasserstromes und ist h die Tiefe der oberen Mündungsseite unter dem Wasserspiegel, so hat man hiernach die effective Ausflußmenge

$$Q_1 = \left[1 + 0{,}641\left(\frac{a\,b}{a_1 b_1}\right)^2\right]\mu_0\,.\,ab\,\sqrt{2g\left(h + \frac{a}{2}\right)}.$$

Folgende Tabelle dient zur Abkürzung der Rechnung in Fällen der Anwendung.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,002	1.006	0,014	0,026	0,040	0,058	0,079	0,103	0,130	0,160

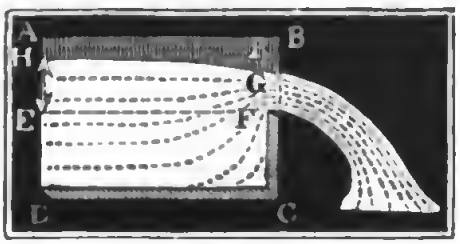
Beispiel. Um das durch ein 3 Fuß breites Gerinne zugeführte Wasserquantum zu finden, hat man eine Spundwand mit einer 2 Fuß weiten und 1 Fuß

hohen rectangulären Mündung eingesetzt, und dadurch das Wasser endlich so aufgestaut, daß es beim Eintritt des Beharrungszustandes um eine Höhe von 2¼ Fuß über der Sohle und 1¾ Fuß über der unteren Kante der Mündung stand. Die theoretische Wassermenge ist $Q = ab\sqrt{2gh} = 1 \,.\, 2 \,.\, 7{,}906\sqrt{1{,}25}$ $= 15{,}812 \,.\, 1{,}118 = 17{,}68$ Cubikfuß, der Ausflußcoefficient bei vollkommner Contraction läßt sich 0,602 setzen, und das Querschnittsverhältniß $n = \frac{F}{G} = \frac{ab}{a\,b_1}$ $= \frac{1 \,.\, 2}{2{,}25 \,.\, 3} = 0{,}296$, daher folgt der Ausflußcoefficient für das vorstehende Ausflußverhältniß $= (1 + 0{,}641 \,.\, 0{,}296^2)\,\mu_0 = 1{,}056 \,.\, 0{,}602 = 0{,}6357$ und das effective Ausflußquantum $= 17{,}68 \,.\, 0{,}6357 = 11{,}24$ Cubikfuß.

Ausfluß des bewegten Wassers

§. 356. Die unvollkommne Contraction kömmt auch sehr oft beim Ausflusse durch Ueberfälle, wie Fig. 518, vor. Die Ueberfälle können aber entweder nur einen Theil der Breite des Reservoirs oder Kanales einnehmen, oder sie können über die ganze Breite des Gerinnes weggehen. In dem letzten Falle fällt auch die Contraction an den Seiten der Mündung weg, und es fließt also aus diesem Grunde mehr Wasser durch, als bei den Ueberfällen der ersten Art. Auch über diese Ausflußverhältnisse hat der Verfasser Versuche angestellt, und aus den Ergebnissen derselben Formeln abgeleitet, wodurch sich mit ziemlicher Sicherheit mit Hülfe des Querschnittsverhältnisses $n = \frac{F}{G} = \frac{hb}{a_1 b_1}$ der entsprechende Ausflußcoefficient berechnen läßt. Behalten wir die Bezeichnungen der vorigen Paragraphen bei, so haben wir für die Poncelet'schen Ueberfälle:

Fig. 518.



$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 1{,}718\left(\frac{F}{G}\right)^4 = 1{,}718 \,.\, n^4$, und für die die ganze Gerinnbreite einnehmenden Ueberfälle $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}041 + 0{,}3693\,n^2$, es ist daher im ersten Falle die Ausflußmenge:

$Q_1 = \frac{2}{3}\left[1 + 1{,}718\left(\frac{hb}{a_1 b_1}\right)^4\right]\mu_0 \,.\, b\,\sqrt{2gh^3}$, und im zweiten Falle: $Q_1 = \frac{2}{3}\left[1{,}041 + 0{,}3693\left(\frac{h}{a_1}\right)^2\right]\mu_0 \,.\, b\,\sqrt{2gh^3}$, wo h den etwa 1 Meter vor dem Ueberfall gemessenen Wasserstand EH über der Ueberfallschwelle F bezeichnet.

In folgenden Tabellen sind die Correctionen $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ für die einfachsten Werthe von n zusammengestellt.

Ausfluß des bewegten Waſſers.

Tabelle I. Correctionen für die Poncelet'ſchen Ueberfälle.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,000	0,000	0,001	0,003	0,007	0,014	0,026	0,044	0,070	0,107

Tabelle II. Correctionen für Ueberfälle über die ganze Wand, oder ohne Seitencontraction.

n	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,041	0,042	0,045	0,049	0,056	0,064	0,074	0,086	0,100	0,116	0,133

Beiſpiel. Um das in einem 5 Fuß breiten Kanale fortgeführte Waſſerquantum zu beſtimmen, hat man eine Spundwand mit einer nach außen abgeſchrägten Kante eingezogen, und das Waſſer über dieſe wegfließen laſſen. Nachdem das Steigen des Oberwaſſers aufgehört hatte, ergab ſich der Waſſerſtand über dem Gerinnboden $3\frac{1}{2}$ Fuß, und über der Schwelle $1\frac{1}{2}$ Fuß, es iſt daher die theoretiſche Ausflußmenge $Q = \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 7{,}906 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = 48{,}41$ Cubikfuß.

Der Ausflußcoefficient iſt, da $\frac{h}{a_1} = \frac{1{,}5}{3{,}5} = \frac{3}{7}$ und $\mu_0 = 0{,}577$,

$\mu_{\frac{3}{7}} = [1{,}041 + 0{,}3693 \cdot (\frac{3}{7})^2] \cdot 0{,}577 = 1{,}110 \cdot 0{,}577 = 0{,}64$, daher die effective Waſſermenge $Q_1 = 0{,}64 \cdot Q = 0{,}64 \cdot 48{,}41 = 31$ Cubikfuß.

Drittes Kapitel.

Von dem Ausfluſſe des Waſſers durch Röhren.

Kurze Anſatzröhren.

§. 357. Läßt man das Waſſer durch eine kurze Anſatzröhre (franz. tuyau additionel; engl. short pipe) ausfließen, ſo treten ganz andere Verhältniſſe ein, als wenn es durch Mündungen in der dünnen, oder durch nach außen abgeſchrägte Mündungen in der dicken Wand ausfließt. Iſt die Anſatzröhre prismatiſch, und ihre Länge $2\frac{1}{2}$ bis 3mal ſo groß als ihre Weite, ſo giebt ſie einen uncontrahirten und undurchſichtigen Strahl, welcher eine kleine Sprungweite und daher auch eine kleinere Geſchwindigkeit hat, als der durch eine Mündung in der dünnen Wand unter

übrigens gleichen Umſtänden ausfließende Strahl. Hat alſo die Röhre *KL* mit der Mündung *F*, Fig. 519, gleichen Querſchnitt und iſt auch die Druckhöhe von beiden eine und dieſelbe, ſo erhält man in *LR* einen trüben und uncontrahirten, alſo dickeren, und in *FH* einen klaren und contrahirten, alſo ſchwächeren Strahl, und es läßt ſich auch wahrnehmen, daß die Sprungweite *ER* kleiner iſt als die Sprungweite *DH*. Dieſes Ausflußverhältniß tritt aber nur dann ein, wenn die Röhre die angegebene Länge hat; iſt die Röhre kürzer, vielleicht nur ſo lang als weit, ſo legt ſich der Strahl *KL*, Fig. 520, gar nicht an die Röhrenwand an, es bleibt die Röhre ganz ohne Einwirkung auf den Ausfluß, und der Strahl wie beim Ausfluſſe durch Mündungen in der dünnen Wand. Kurze Anſatzröhren.

Fig. 519.

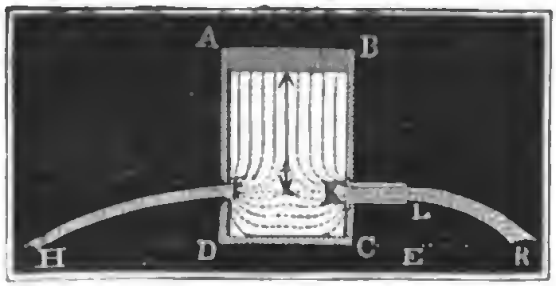
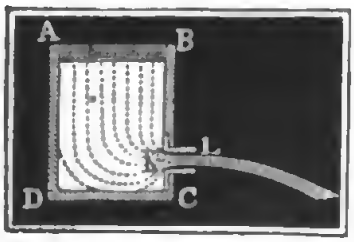
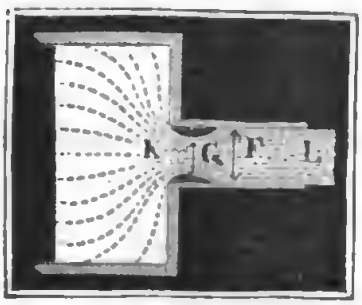


Fig. 520.



Zuweilen findet auch bei Röhren von größerer Länge ein Ausfüllen der Röhre durch den Strahl nicht ſtatt, nämlich dann, wenn dem Waſſer keine Gelegenheit gegeben worden iſt, mit der Röhrenwand in Berührung zu kommen; verſchließt man aber in dieſem Falle die äußere Mündung durch die Hand oder durch ein Brett auf einige Augenblicke, ſo bildet ſich nachher ein die Röhre vollkommen füllender Strahl, und es findet ein ſogenannter voller Ausfluß (franz. à gueule-bée; engl. of filled tube) ſtatt. Die Contraction des Waſſerſtrahles findet auch beim Ausfluß durch Röhren ſtatt, nur fällt hier der contrahirte Theil in das Innere der Röhre. Man kann ſich hiervon überzeugen, wenn man ſich gläſerner Anſatzröhren, wie *KL*, Fig. 521, bedient, und dem Waſſer eine Färbung giebt, denn man bemerkt in dieſem Falle, daß nur in der Mitte des Querſchnittes *G* nahe hinter der Eintrittsſtelle *K*, nicht aber am Umfange deſſelben progreſſive Bewegung vorhanden iſt, daß hier vielmehr nur eine wirbelnde Bewegung ſtattfindet. Es iſt aber die Capillarität oder die Adhäſion des Waſſers an der Röhrenwand, welche macht, daß das Waſſer das Ende *FL* der Röhre ganz aus-

Fig. 521.



Kurze Anſatzröhren.

füllt. Das aus der Röhre fließende Waſſer hat nur den der Atmoſphäre gleichen Druck, nun iſt aber der contrahirte Querſchnitt G nur α mal ſo groß als der Querſchnitt F der Röhre, und deshalb die Geſchwindigkeit in ihm $\frac{1}{\alpha}$ mal ſo groß als die Ausflußgeſchwindigkeit v, daher iſt auch der Druck des Waſſers in der Nähe von G um $\frac{\left(\frac{1}{\alpha}\,v\right)^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}$ $= \left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 1\right]\frac{v^2}{2g}$ (§. 339) kleiner als beim Austritte, oder als der Atmoſphärendruck. Bohrt man bei G ein enges Loch in die Röhre, ſo findet auch wirklich kein Ausfluß durch daſſelbe, ſondern vielmehr ein Einſaugen von Luft ſtatt, auch hört endlich der volle Ausfluß und die Einwirkung der Anſatzröhre ganz auf, wenn man das Loch weiter macht, oder mehrere Löcher anbringt.

Cylindriſche Anſatzröhren.

§. 358. Ueber den Ausfluß des Waſſers durch kurze cylindriſche Anſatzröhren ſind von Vielen Verſuche angeſtellt worden, doch weichen die Reſultate derſelben ziemlich viel von einander ab. Namentlich ſind es die Boſſut'ſchen Ausflußcoefficienten, welche durch ihre Kleinheit (0,785) von den von Anderen gefundenen bedeutend abweichen. Aus den Verſuchen von Michelotti mit $1\frac{1}{2}$ bis 3 Zoll weiten Röhren und bei 3 bis 20 Fuß Druckhöhe folgt im Mittel dieſer Ausflußcoefficient $\mu = 0{,}813$. Die Verſuche von Bidone, Eytelwein und D'Aubuiſſon weichen hiervon nur wenig ab. Im Mittel läßt ſich aber, namentlich auch den Verſuchen des Verfaſſers entſprechend, der Ausflußcoefficient für kurze cylindriſche Anſatzröhren: $\mu = 0{,}815$ ſetzen. Da wir denſelben für runde Mündungen in der dünnen Wand 0,615 gefunden haben, ſo folgt, daß unter übrigens gleichen Umſtänden und Verhältniſſen durch kurze Anſatzröhren $^{815}/_{615} = 1{,}325$ mal ſo viel Waſſer ausfließt als durch runde Mündungen in der dünnen Wand. Uebrigens wachſen dieſe Ausflußcoefficienten, wenn die Röhrenweite kleiner wird, und nehmen auch wenig zu bei Abnahme der Druckhöhe oder Ausflußgeſchwindigkeit. Nach den bei einem Drucke von 0,23 bis 0,60 Meter angeſtellten Verſuchen des Verfaſſers iſt für Röhren, welche 3mal ſo lang als weit ſind:

bei	1	2	3	4 Centimeter Weite
$\mu =$	0,843	0,832	0,821	0,810

Dieſer Tabelle zufolge nehmen alſo die Ausflußcoefficienten merklich zu, wenn die Röhrenweite kleiner wird. Ebenſo fand Buff bei einer 2,79 Linien weiten und 4,3 Linien langen Röhre die Ausflußcoefficienten allmälig von 0,825 bis 0,855 zunehmend, wenn die Druckhöhe von 33 bis $1\frac{1}{2}$ Zoll nach und nach herabſank. Cylindriſche Anſatzröhren.

Beim Ausfluſſe des Waſſers durch kurze parallelepipediſche Anſatzröhren fand der Verfaſſer einen Ausflußcoefficienten von 0,819.

Fig. 522.

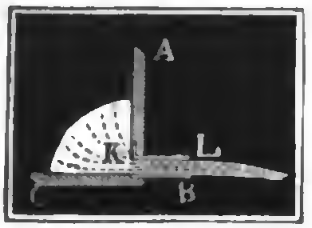
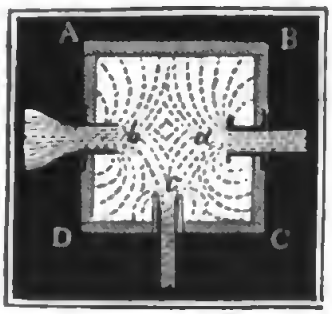


Fig. 523.



Sind die Anſatzröhren KL, Fig. 522, inwendig theilweiſe eingefaßt, ſtoßen ſie z. B. mit der einen Seite an den Boden BC an, und wird dadurch eine partielle Contraction herbeigeführt, ſo ſteigt nach den Verſuchen des Verfaſſers der Ausflußcoefficient nicht anſehnlich, wohl aber fließt das Waſſer an verſchiedenen Stellen des Querſchnittes mit verſchiedenen Geſchwindigkeiten, und zwar auf der Seite BC ſchneller aus, als auf der gegenüberliegenden. Wenn die innere Stirnfläche einer Anſatzröhre nicht in die Wandfläche fällt, ſondern vorſteht, wie a, b, c, Fig. 523, ſo nennt man dieſe Röhre eine innere Anſatzröhre. Iſt die Stirnfläche dieſer Röhre mindeſtens $\frac{1}{3}$ mal ſo breit als die Röhre weit, wie z. B. a, ſo bleibt der Ausflußcoefficient derſelbe, als wenn die Stirnfläche in der Ebene der Wand läge, iſt aber die Stirnfläche ſchmaler, wie z. B b und c, ſo fällt der Ausflußcoefficient kleiner aus. Bei einer ſehr ſchmalen faſt verſchwindenden Stirnfläche wird derſelbe den Verſuchen Bidone's und des Verfaſſers zufolge 0,71, wenn der Strahl die Röhre ausfüllt, und 0,53 (vergl. §. 351), wenn er ſich gar nicht an die innere Röhrenwand anlegt. Im erſten Falle (b) iſt der Strahl ganz zerriſſen und beſenförmig divergirend, im zweiten (c) aber ſtark zuſammengezogen und ganz kryſtallrein.

§. 359. Da das Waſſer ohne Contraction aus der prismatiſchen Anſatzröhre tritt, ſo folgt, daß bei dem Ausfluſſe durch dieſe Mundſtücke der Contractionscoefficient = Eins und der Geſchwindigkeitscoefficient φ = dem Ausflußcoefficienten μ iſt. Eine mit der Geſchwindigkeit v ausſtrömende Waſſermenge Q beſitzt die lebendige Kraft $\frac{Q\gamma}{g} v^2$ und kann dadurch die mechaniſche Arbeit $\frac{v^2}{2g} Q\gamma$ (S. §. 71) verrichten. Nun iſt aber Widerſtandscoefficient.

Widerſtands-coefficient.

bei dem Ausfluſſe die theoretiſche Geſchwindigkeit $= \frac{v}{\varphi}$, daher entſpricht der ausfließenden Waſſermaſſe die Leiſtung $\frac{1}{\varphi^2} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot Q\gamma$, und es verliert ſonach die Waſſermenge Q durch den Ausfluß die mechaniſche Arbeit $\left(\frac{1}{\varphi^2} \cdot \frac{v^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}\right) Q\gamma = \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g} Q\gamma$. Beim Ausfluſſe durch Mündungen in der dünnen Wand iſt φ im Mittel $= 0{,}97$, daher beträgt hier der Arbeitsverluſt $\left[\left(\frac{1}{0{,}97}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g} Q\gamma = 0{,}063 \frac{v^2}{2g} Q\gamma$; beim Ausfluſſe durch kurze cylindriſche Anſätze iſt $\varphi = 0{,}815$ und es ſtellt ſich der entſprechende Verluſt an Arbeit $= \left[\left(\frac{1}{0{,}815}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g} Q\gamma = 0{,}505 \frac{v^2}{2g} Q\gamma$, d. i. 8mal ſo groß heraus, als beim Ausfluſſe durch Mündungen in der dünnen Wand. Bei Benutzung der lebendigen Kraft des ausfließenden Waſſers iſt es folglich beſſer, das Waſſer durch Mündungen in der dünnen Wand als durch prismatiſche Anſatzröhren ausfließen zu laſſen. Wenn man aber die inneren Kanten, womit die Röhre an die Gefäßwand ſtößt, abrundet und dadurch einen allmäligen Uebergang aus dem Gefäße in die Röhre hervorbringt, ſo wird der Ausflußcoefficient auf 0,96 geſteigert und dadurch der Arbeitsverluſt auf $8\frac{1}{2}$ Procent herabgezogen. Bei kürzeren, genau abgerundeten oder nach der Form des contrahirten Waſſerſtrahles gebildeten Mundſtücken iſt $\mu = \varphi = 0{,}97$ und daher der Arbeitsverluſt wie bei Mündungen in der dünnen Wand $= 6$ Procent.

Dem Arbeitsverluſte $\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g} Q\gamma$ entſpricht eine Druckhöhe $\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g}$; man kann ſich daher auch vorſtellen, daß durch die Hinderniſſe des Ausfluſſes die Druckhöhe den Verluſt $\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g}$ erleide, und annehmen, daß nach Abzug dieſes Verluſtes der übrigbleibende Theil der Druckhöhe auf die Erzeugung der Geſchwindigkeit verwendet werde. Dieſen mit dem Quadrate der Ausflußgeſchwindigkeit proportional wachſenden Verluſt $\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g}$ kann man Widerſtandshöhe (franz. hauteur de résistance; engl. height of resistance) und den Coefficienten $\frac{1}{\varphi^2} - 1$, womit die Geſchwindigkeitshöhe zu multipliciren iſt, um die Widerſtandshöhe zu erhalten, den Widerſtandscoefficienten

nennen. Wir werden in der Folge dieſen, auch das Verhältniß der Widerſtandshöhe zur Druckhöhe ausdrückenden Coefficienten durch den Buchſtaben ζ bezeichnen, alſo die Widerſtandshöhe ſelbſt durch $\zeta \cdot \frac{v^2}{2g}$ ausdrücken. Durch die Formeln $\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1$ und $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}$ läßt ſich aus dem Geſchwindigkeitscoefficienten der Widerſtandscoefficient, und aus dieſem wieder jener berechnen. Widerſtands-coefficient.

Beiſpiele. 1) Welche Waſſermenge fließt unter einer Druckhöhe von 3 Fuß durch eine 2 Zoll weite Röhre aus, welcher der Widerſtandscoefficient $\zeta = 0{,}4$ entſpricht? Es iſt $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1{,}4}} = 0{,}845$, daher

$$v = 0{,}845 \cdot 7{,}906 \sqrt{3} = 11{,}574 \text{ Fuß, ferner}$$
$$F = (\tfrac{1}{12})^2 \pi = 0{,}02182 \text{ Quadratfuß,}$$

folglich das geſuchte Waſſerquantum $Q = 0{,}02182 \cdot 11{,}574 = 0{,}253$ Cubikfuß.
2) Wenn eine Röhre von 2 Zoll Weite unter einem Drucke von 2 Fuß in der Minute 10 Cubikfuß Waſſer liefert, ſo iſt ihr Ausfluß- oder Geſchwindigkeitscoefficient

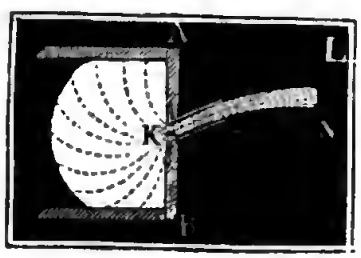
$$\varphi = \frac{Q}{F\sqrt{2gh}} = \frac{10}{60 \cdot 0{,}02182 \cdot 7{,}906 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{1{,}035\sqrt{2}} = 0{,}683,$$

der Widerſtandscoefficient $= \left(\frac{1}{0{,}683}\right)^2 - 1 = 1{,}143$, und endlich der durch die Hinderniſſe der Röhre bewirkte Verluſt an Druckhöhe

$$= 1{,}143 \cdot \frac{v^2}{2g} = 1{,}143 \cdot 0{,}016 \left(\frac{Q}{F}\right)^2 = 0{,}0183 \cdot \frac{1}{0{,}1309^2} = 1{,}066 \text{ Fuß.}$$

§. 360. Schief angeſetzte oder ſchief abgeſchnittene Anſatzröhren geben ein kleineres Waſſerquantum als rechtwinkelig angeſetzte oder rechtwinkelig abgeſchnittene Anſatzröhren, weil die Richtung des Waſſers in denſelben eine Aenderung erleidet. Die hierüber in nicht unbedeutender Ausdehnung angeſtellten Verſuche haben den Verfaſſer auf Folgendes geführt. Iſt δ der Winkel, welchen die Röhrenaxe KL, Fig. 524, mit der Normale KN zur Ebene AB der Einmündung einſchließt, und iſt ζ der Widerſtandscoefficient für die winkelrecht abgeſchnittene Röhre, ſo hat man den Widerſtandscoefficienten der ſchiefen Anſatzröhre: $\zeta_1 = \zeta + 0{,}303 \sin.\ \delta + 0{,}226 \sin.\ \delta^2$. Nehmen wir für ζ den mittleren Werth 0,505, ſo erhalten wir: Schiefe Anſatzröhren.

Fig. 524.



Schiefe Anſatzröhren.

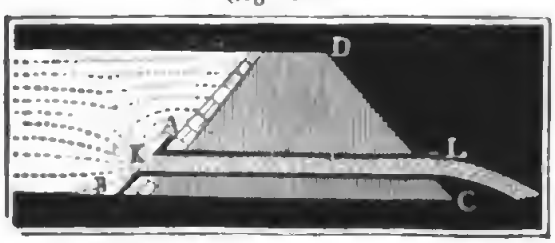
bei $\delta^0 =$	0	10	20	30	40	50	60 Grad.
den Widerſtandscoefficienten $\zeta_1 =$	0,505	0,565	0,635	0,713	0,794	0,870	0,937
den Ausflußcoefficienten $\mu_1 =$	0,815	0,799	0,782	0,764	0,747	0,731	0,719

Hiernach iſt z. B. der Widerſtandscoefficient einer kurzen Anſatzröhre bei 20 Grad Axenabweichung $\xi = 0{,}635$ und der Ausflußcoefficient $= \frac{1}{\sqrt{1{,}635}} = 0{,}782$, und bei 35° Axenabweichung der erſtere $= 0{,}753$ und der letztere $= 0{,}755$.

In der Regel ſind dieſe ſchiefen Anſatzröhren länger als wir ſeither angenommen haben, auch müſſen ſie länger ſein, weil außerdem das Waſſer die Röhre nicht vollkommen ausfüllen würde. Die vorſtehende Formel giebt nur denjenigen Theil des Widerſtandes an, welcher dem Röhrenſtück an der Einmündung entſpricht, das dreimal ſo lang als die ganze Röhre weit iſt. Der Widerſtand, welchen das übrige Röhrenſtück bei Bewegung des Waſſers entgegenſetzt, wird in der Folge angegeben werden.

Beiſpiel. Wenn die Einmündungsebene AB eines horizontalliegenden Teichgerinnes KL, Fig. 525, ſowie die Innenfläche des Teichdammes 40 Grad gegen den Horizont geneigt iſt, ſo ſchließt die Röhrenaxe mit der Normale dieſer Ebene einen Winkel von 50 Grad ein, und es iſt daher der Widerſtandscoefficient für den Ausfluß durch das Einmündungsſtück dieſer Röhre $= 0{,}870$, und wenn nun dem übrigen und längeren Röhrenſtücke der Widerſtandscoefficient 0,650 entſpräche, ſo wäre der Widerſtandscoefficient für die ganze Röhre $= 0{,}870 + 0{,}650 = 1{,}520$, und daher der Ausflußcoefficient $= \frac{1}{\sqrt{1 + 1{,}520}} = \frac{1}{\sqrt{2{,}520}} = 0{,}630$. Bei 10 Fuß Druckhöhe und 1 Fuß Röhrenweite ergäbe ſich folglich die Ausflußmenge:

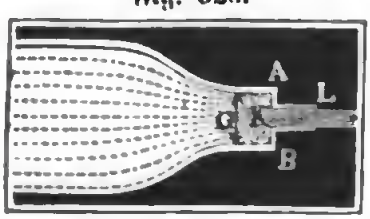
Fig. 525.



$$Q = 0{,}630 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 7{,}906\sqrt{10} = 12{,}37 \text{ Cubikfuß}.$$

Unvollkommene Contraction

Fig. 526.



§. 361. Mündet eine kurze cylindriſche Anſatzröhre KL, Fig. 526, in einer ebenen Wand AB ein, deren Inhalt G den Querſchnitt F der Röhre nicht vielmal übertrifft, ſo kommt das Waſſer mit einer nicht zu vernach-

läſſigenden Geſchwindigkeit an der Einmündungsſtelle an, und es tritt deshalb nur mit unvollkommener Contraction in das Rohr, weshalb wieder die Ausflußgeſchwindigkeit eine größere iſt, als wenn das Waſſer als ſtillſtehend vor dem Eintritt in die Röhre angenommen werden muß. Unvollkommene Contraction.

Iſt wieder $\frac{F}{G} = n$ das Verhältniß des Röhrenquerſchnittes zum Inhalte der Wandfläche, ferner μ_0 der Ausflußcoefficient bei vollkommener Contraction, wo $\frac{F}{G}$ der Null gleich geſetzt werden kann, ſo hat man den Verſuchen des Verfaſſers zufolge den Ausflußcoefficienten bei unvollkommener Contraction oder dem Querſchnittsverhältniſſe n zu ſetzen:

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}102\ n + 0{,}067\ n^2 + 0{,}046\ n^3, \text{ oder}$$

$$\mu_n = \mu_0\ (1 + 0{,}102\ n + 0{,}067\ n^2 + 0{,}046\ n^3).$$

Nimmt z. B. der Röhrenquerſchnitt den ſechsten Theil der ganzen Wandfläche ein, ſo iſt:

$$\mu_{1/6} = \mu_0\ (1 + 0{,}102\ .\ 1/6 + 0{,}067\ .\ 1/36 + 0{,}046\ .\ 1/216)$$

$$= \mu_0\ (1 + 0{,}017 + 0{,}0019 + 0{,}0002) = 1{,}019\ \mu_0, \text{ oder}$$

$$\mu_0 = 0{,}815 \text{ geſetzt, } \mu_{1/6} = 0{,}815\ .\ 1{,}019 = 0{,}830.$$

Etwas genauer giebt die Correctionswerthe $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ folgende, zum Gebrauch bequeme Tabelle an.

Tabelle

der Correctionen wegen der unvollkommenen Contraction, beim Ausfluſſe durch kurze cylindriſche Anſatzröhren.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,006	0,013	0,020	0,027	0,035	0,043	0,052	0,060	0,070	0,080

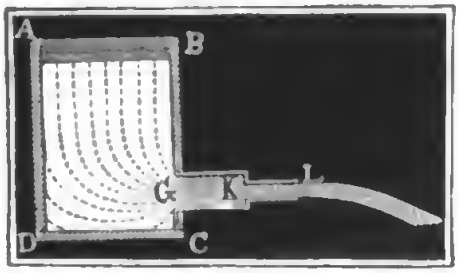
n	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,090	0,102	0,114	0,127	0,138	0,152	0,166	0,181	0,198	0,227

Unvollkommene Contraction.

Beim Ausfluſſe durch kurze parallelepipediſche Röhren ſind dieſe Correctionen ziemlich die nämlichen.

Dieſe Coefficienten finden ihre Anwendung vorzüglich beim Ausfluß des Waſſers durch zuſammengeſetzte Röhren, wie z. B. in dem durch die Fig. 527 dargeſtellten Falle, wo die kurze Anſatzröhre KL in einer weiteren kurzen Anſatzröhre GK und dieſe wieder in dem Gefäße AC einmündet. Hier iſt beim Eintritt des Waſſers aus der weiteren Röhre in die engere unvollkommene Contraction vorhanden und daher der Ausflußcoefficient nach der letzten Regel zu beſtimmen. Setzen wir den dieſem Ausflußcoefficienten entſprechenden Widerſtandscoefficienten $= \zeta_1$, den Widerſtandscoefficienten für den Eintritt aus dem Gefäße in die weitere Röhre $= \zeta$, die Druckhöhe $= h$, die Ausflußgeſchwindigkeit $= v$ und das Verhältniß $\frac{F}{G}$ der Röhrenquerſchnitte $= n$, alſo die Geſchwindigkeit des Waſſers in der weiteren Röhre $= nv$, ſo giebt die Formel: $h = \frac{v^2}{2g} + \zeta \cdot \frac{(nv)^2}{2g} + \zeta_1 \cdot \frac{v^2}{2g}$.

Fig. 527.



d. i $h = (1 + n^2\zeta + \zeta_1)\frac{v^2}{2g}$ und es iſt daher

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + n^2\zeta + \zeta_1}}.$$

Beiſpiel. Welche Waſſermenge liefert der in Figur 527 abgebildete Apparat, wenn die Druckhöhe $h = 4$ Fuß, die Weite der engeren Röhre 2 Zoll und die der weiteren 3 Zoll beträgt? Es iſt $n = (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$, daher $\mu_{\frac{4}{9}} = 1{,}069 \cdot 0{,}815 = 0{,}871$ und der entſprechende Widerſtandscoefficient $\zeta_1 = \left(\frac{1}{0{,}871}\right)^2 - 1 = 0{,}318$; nun hat man aber $\zeta = 0{,}505$ und $n^2 \cdot \zeta = \frac{4}{81} \cdot 0{,}505 = 0{,}099$, daher folgt $1 + n^2\zeta + \zeta_1 = 1 + 0{,}099 + 0{,}318 = 1{,}471$ und die Ausflußgeſchwindigkeit $v = \frac{7{,}906 \cdot \sqrt{4}}{\sqrt{1{,}417}} = \frac{15{,}812}{\sqrt{1{,}417}} = 13{,}29$ Fuß. Da endlich der Röhrenquerſchnitt $= 0{,}02182$ Quadratfuß iſt, ſo folgt die Ausflußmenge

$$Q = 13{,}29 \cdot 0{,}02182 = 0{,}290 \text{ Cubikfuß}.$$

Coniſche Anſatzröhren.

§. 362. Coniſche Anſatzröhren geben andere Ausflußmengen als prismatiſche oder cylindriſche Anſatzröhren. Sie ſind entweder coniſch convergent oder coniſch divergent; im erſten Falle iſt die Ausmündung kleiner, im zweiten Falle aber iſt ſie größer als die Einmündung. Die Ausflußcoefficienten bei den erſteren Röhren ſind größer und die bei den letzteren kleiner, als bei den cylindriſchen Röhren. Eine und dieſelbe coni-

ſche Röhre giebt allerdings mehr Waſſer, wenn man die weitere Mündung zur Ausmündung macht, wie *K* in Fig. 528, als wenn man ſie nach innen richtet, wie *L* in derſelben Figur, allein ſie giebt nicht in demſelben Verhältniß mehr als die weitere Mündung die engere übertrifft. Wenn Manche, wie z. B. Venturi und Eytelwein, für coniſch divergente Röhren größere Ausflußcoefficienten angeben, als für coniſch convergente, ſo iſt zu berückſichtigen, daß ſie immer den engeren Querſchnitt als Mündung behandeln. Den Einfluß der Conicität der Röhren auf die Ausflußmenge führen folgende, unter Druckhöhen von 0,25 bis 3,3 Meter angeſtellte Verſuche mit einer 9 Centimeter langen Röhre *AD*, Fig. 529, vor Augen. Die Weite dieſer Röhre betrug an einem Ende *DE* = 2.468, am andern Ende *AB* = 3,228 Centimeter und der Convergenzwinkel, d. i. der Winkel *AOB*, unter den die gegenüberliegenden Seiten *AE* und *BD* eines Längenaxenſchnittes zuſammenlaufen, = 4°, 50′. Beim Ausfluſſe durch die engere Mündung war der Ausflußcoefficient = 0,920; bei dem Ausfluſſe durch die weitere Mündung aber = 0,553; und wenn man die engere Einmündung als Querſchnitt in die Rechnung einführt, ergab er ſich = 0,946. Der Strahl war im erſten Falle, wo die Röhre als coniſch convergentes Mundſtück gebraucht wurde, wenig contrahirt, dicht und glatt, im zweiten Falle aber, wo er als coniſch divergentes Mundſtück diente, war er ſtark divergent, zerriſſen und ſtark pulſirend. Ueber den Ausfluß durch coniſch divergente Röhren haben noch Venturi und Eytelwein experimentirt. Beide Hydrauliker haben noch dieſe coniſche Röhren an cylindriſche und conoidiſche, nach der Form des contrahirten Waſſerſtrahles geformte Mundſtücke angeſetzt. Durch eine ſolche Verbindung, wie Fig. 530 darſtellt, wo das divergente Ausmündungsſtück *KL* innen 12 und außen 21½ Linien weit, und 8 13/16 Zoll lang war, der Convergenzwinkel ſich aber 5°, 9′ berechnet, fand Eytelwein $\mu = 1{,}5526$, wobei er das engere Ende als Mündung behandelte, und dagegen μ nur = 0,483, wenn, wie recht, das weitere Ende als Mündung angeſehen wird. Allerdings fließt durch dieſes combinirte Mundſtück $\frac{1{,}5526}{0{,}615} = 2{,}5$mal ſo viel, als durch die einfache Mündung

Coniſche Anſatzröhren

Fig. 528.

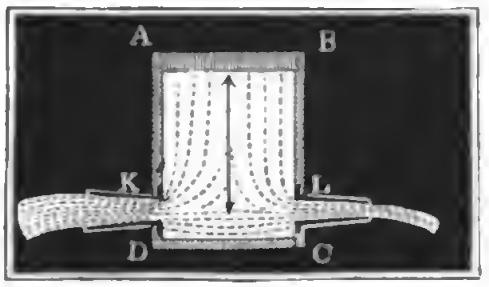


Fig. 529.

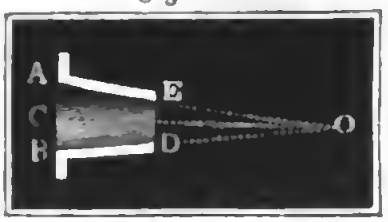


Fig. 530.

Coniſche Anſatzröhren.

in der dünnen Wand und $\frac{1,5526}{0,815} = 1,9$mal ſo viel als durch die kurze cylindriſche Anſatzröhre. Bei kleinen Geſchwindigkeiten und bei größerer Divergenz iſt es übrigens gar nicht möglich, ſelbſt durch vorhergegangenes Zuhalten der Röhren, den vollen Ausfluß herbeizuführen.

§. 363. Die ausführlichſten Verſuche über den Ausfluß durch coniſch convergente Anſatzröhren ſind von D'Aubuiſſon und Caſtel angeſtellt worden. Die hierzu in Anwendung gekommenen Röhren waren von großer Mannichfaltigkeit, verſchieden in den Längen, Weiten und in den Convergenzwinkeln. Am ausgedehnteſten waren die Verſuche mit Röhren von 1,55 Centimeter Weite in der Ausmündung und von 2,6mal ſo großer, d i. von 4 Centimeter Länge, weswegen wir ihre Ergebniſſe auch in folgender Tabelle hier mittheilen. Die Druckhöhe war durchgängig 3 Meter. Die Ausflußmengen wurden durch ein beſonderes Aichgefäß gemeſſen, um aber außer den Ausflußcoefficienten auch noch die Geſchwindigkeits- und Contractionscoefficienten zu erhalten, wurden die gegebenen Höhen entſprechenden Sprungweiten der Waſſerſtrahle gemeſſen und hieraus die Ausflußgeſchwindigkeiten (ſ. §. 348) berechnet. Das Verhältniß $\frac{v}{\sqrt{2gh}}$ der effectiven Geſchwindigkeit v zur theoretiſchen Geſchwindigkeit $\sqrt{2gh}$ gab den Geſchwindigkeitscoefficienten φ, ſowie das Verhältniß $\frac{Q}{F\sqrt{2gh}}$ der effectiven Ausflußmenge Q zur theoretiſchen Ausflußmenge $F\sqrt{2gh}$ auf den Ausflußcoefficienten μ führte und das Verhältniß beider Coefficienten, d. i. $\frac{\mu}{\varphi}$, endlich den Contractionscoefficienten α beſtimmte.

Tabelle
der Ausfluß- und Geſchwindigkeitscoefficienten für den Ausfluß durch coniſch convergente Röhren.

Convergenzwinkel.	Ausflußcoefficienten.	Geſchwindigkeitscoefficienten.	Convergenzwinkel.	Ausflußcoefficienten.	Geſchwindigkeitscoefficienten.
0°, 0′	0,829	0,829	13°, 24′	0,946	0,963
1°, 36′	0,866	0,867	14°, 28′	0,941	0,966
3°, 10′	0,895	0,894	16°, 36′	0,938	0,971
4°, 10′	0,912	0,910	19°, 28′	0,924	0,970
5°, 26′	0,924	0,919	21°, 0′	0,919	0,972
7°, 52′	0,930	0,932	23°, 0′	0,914	0,974
8°, 58′	0,934	0,942	29°, 58′	0,895	0,975
10°, 20′	0,938	0,951	40°, 20′	0,870	0,980
12°, 4′	0,942	0,955	48°, 50′	0,847	0,984

Conische Ansatzröhren.

Man erſieht aus dieſer Tabelle, daß die Ausflußcoefficienten bei einer Röhre von $13\frac{1}{2}^0$ Seitenconvergenz ihr Maximum 0,946 erreicht haben, daß dagegen die Geſchwindigkeitscoefficienten immer größer und größer ausfallen, je größer der Convergenzwinkel iſt. Wie in vorkommenden Fällen der Praxis dieſe Tabelle zu gebrauchen iſt, mag folgendes Beiſpiel lehren.

Beiſpiel. Welche Waſſermenge liefert eine kurze coniſche Anſatzröhre von $1\frac{1}{8}$ Zoll Weite in der Ausmündung und von 10 Grad Convergenz bei einem Drucke von 16 Fuß? Nach des Verfaſſers Verſuchen giebt eine cylindriſche Röhre von dieſer Weite $\mu = 0{,}810$, die Röhre von D'Aubuiſſon aber gab $\mu = 0{,}829$, alſo um $0{,}829 - 0{,}810 = 0{,}019$ mehr; nun iſt aber der Tabelle zufolge für die Röhre von 10° Convergenz $\mu = 0{,}937$, daher iſt es angemeſſen, für die gegebene Röhre $\mu = 0{,}937 - 0{,}019 = 0{,}918$ zu ſetzen, weshalb die Ausflußmenge $Q = 0{,}918 \cdot \frac{\pi}{4 \cdot 8^2} \cdot 7{,}906 \sqrt{16} = \frac{0{,}918 \cdot 7{,}906 \cdot \pi}{64} = 0{,}3563$ Cubikfuß folgt.

Reibungswiderſtand.

§. 364. Langeprismatiſche oder cylindriſche Anſatzröhren verzögern den Ausfluß um ſo mehr, je länger dieſelben ſind; es iſt daher anzunehmen, daß die Röhrenwände durch Reibung, Adhäſion oder Klebrigkeit des Waſſers an denſelben der Bewegung des Waſſers ein Hinderniß entgegenſetzen. Vernunftgründen und vielfachen Beobachtungen und Meſſungen zufolge läßt ſich annehmen, daß dieſer Reibungswiderſtand ganz unabhängig iſt vom Drucke, daß er aber direct wie die Länge l und umgekehrt wie die Weite d derſelben wächſt, daß er alſo dem Verhältniſſe $\frac{l}{d}$ proportional iſt. Außerdem hat ſich auch noch herausgeſtellt, daß dieſes Hinderniß größer iſt bei größeren und kleiner bei kleineren Geſchwindigkeiten des Waſſers, und daß es beinahe mit dem Quadrate der Geſchwindigkeit v des Waſſers ſelbſt wächſt. Meſſen wir dieſes Hinderniß durch die Höhe einer Waſſerſäule, die nachher von der ganzen Druckhöhe h abzuziehen iſt, um die zur Erzeugung der Geſchwindigkeit nöthige Höhe zu erhalten, ſo können wir dieſe Höhe, die wir in der Folge Reibungswiderſtandshöhe nennen wollen, ſetzen: $h_1 = \zeta \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$, und es iſt hierbei unter ζ eine Erfahrungszahl, die wir den Reibungscoefficienten nennen können, zu verſtehen. Man verliert alſo hiernach durch die Reibung des Waſſers in der Röhre um ſo mehr an Druck oder Druckhöhe, je größer das Verhältniß $\frac{l}{d}$ der Länge zur Weite und je größer die Geſchwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ iſt. Aus der Waſſermenge Q und dem Röhrenquerſchnitte $F = \frac{\pi d^2}{4}$ folgt die Geſchwindigkeit $v = \frac{4Q}{\pi d^2}$

Reibungswiderſtand.

und daher die Reibungshöhe

$$h_1 = \zeta \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{1}{2g}\left(\frac{4Q}{\pi d^2}\right)^2 = \zeta \cdot \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{l\,Q^2}{d^5}.$$

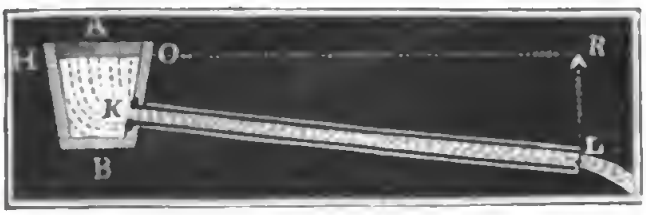
Um durch das Fortleiten einer gewiſſen Waſſermenge Q in einer Röhre möglichſt wenig Verluſt an Druckhöhe oder Gefälle zu erhalten, ſoll man die Röhre möglichſt weit und nicht unnöthig lang machen. Die doppelte Weite beanſprucht z. B. nur $(1/2)^5 = 1/32$mal ſo viel Gefälle als die einfache Weite.

Iſt der Querſchnitt einer Röhre ein Rechteck von der Höhe a und der Breite b, ſo hat man ſtatt $\frac{1}{d} = 1/4 \cdot \frac{\pi d}{1/4 \pi d^2} = 1/4 \cdot \frac{\text{Umfang}}{\text{Inhalt}}$ $= 1/4 \cdot \frac{2(a+b)}{a\,b} = \frac{a+b}{2\,a\,b}$ einzuſetzen, weshalb folgt:

$$h_1 = \zeta \cdot \frac{l(a+b)}{2ab} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Mit Hülfe dieſer Formel für den Röhrenreibungswiderſtand laſſen ſich nun auch die Ausflußgeſchwindigkeit und das Ausflußquantum finden, welches eine Röhre von einer gegebenen Länge und Weite unter einem gegebenen Drucke fortleitet. Uebrigens iſt es vollkommen gleich, ob die Röhre KL, Fig. 531, horizontal iſt, fällt, oder aufſteigt, wenn nur unter der Druckhöhe die Tiefe RL des Mittelpunktes L der Röhrenmündung unter dem Waſſerſpiegel HO des Ausflußreſervoirs verſtanden wird. Iſt h die Druckhöhe, h_1 die Widerſtandshöhe für das Einmündungsſtück und h_2 die Widerſtandshöhe für den übrigen Theil der Röhre, ſo hat man

Fig. 531.



$h - (h_1 + h_2) = \frac{v^2}{2g}$, oder $h = h_1 + h_2 + \frac{v^2}{2g}$. Bezeichnet ζ_1 den Widerſtandscoefficienten für das Einmündungsſtück, und ζ den Coefficienten des Reibungswiderſtandes der übrigen Röhre, ſo hat man

$$h = \frac{v^2}{2g} + \zeta_1 \cdot \frac{v^2}{2g} + \zeta \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

$$\text{oder 1)}\quad h = \left(1 + \zeta_1 + \zeta \frac{l}{d}\right)\frac{v^2}{2g},$$

$$\text{und 2)}\quad v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta_1 + \zeta \cdot \frac{l}{d}}}.$$

Aus der letzteren Formel ergiebt ſich aber die Waſſermenge $Q = Fv$. Reibungswiderſtand.

Bei ſehr langen Röhren fällt $1 + \zeta$ ſehr klein gegen $\zeta \frac{l}{d}$ aus, weshalb dann einfach $h = \zeta \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$, ſowie umgekehrt

$$v = \sqrt{\frac{1}{\zeta} \cdot \frac{d}{l} \cdot 2gh} \text{ folgt.}$$

§. 365. Der Reibungscoefficient iſt, wie die Ausflußcoefficienten, nicht ganz conſtant, er iſt bei kleinen Geſchwindigkeiten größer und bei großen Geſchwindigkeiten kleiner, d. h. der Reibungswiderſtand des Waſſers in den Röhren wächſt nicht genau mit dem Quadrate der Geſchwindigkeit, ſondern auch noch mit einer andern Potenz der Geſchwindigkeit. Prony und Eytelwein haben angenommen, daß die durch den Reibungswiderſtand verlorene Druckhöhe wie die einfache Geſchwindigkeit und wie das Quadrat derſelben wachſe und für ſie den Ausdruck $h_1 = (\alpha v + \beta v^2) \frac{l}{d}$, wo α und β Erfahrungscoefficienten bezeichnen, feſtgeſetzt. Um dieſe Coefficienten zu beſtimmen, haben die genannten Hydrauliker 51 Verſuche benutzt, welche zu verſchiedenen Zeiten von Couplet, Boſſut und Du Buat über die Bewegung des Waſſers durch lange Röhren angeſtellt worden ſind. Prony fand hieraus:

$$h_1 = (0{,}0000693\, v + 0{,}0013932\, v^2) \frac{l}{d},$$

Eytelwein $h_1 = (0{,}0000894\, v + 0{,}0011213\, v^2) \frac{l}{d}$, D'Aubuiſſon nimmt an $h_1 = (0{,}0000753\, v + 0{,}001370\, v^2) \frac{l}{d}$ Meter.

Noch weit genauer an die Beobachtungen ſchließt ſich eine von dem Verfaſſer aufgefundene Formel an, welche die Form

$$h_1 = \left(\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}}\right) \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

hat und ſich auf die Vorausſetzung gründet, daß der Reibungswiderſtand wie das Quadrat und wie die Quadratwurzel aus dem Cubus der Geſchwindigkeit zugleich wächſt. Man hat alſo hiernach den Widerſtandscoefficienten $\zeta = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}}$ und die Höhe der Reibungswiderſtandshöhe einfach $h_1 = \zeta \cdot \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$ zu ſetzen.

Zur Ermittelung des Widerſtandscoefficienten ζ oder der Hülfsconſtanten α und β ſind aber von dem Verfaſſer nicht nur die ſchon bei den

Reibungswiderſtand.

Prony'ſchen und Eytelwein'ſchen Beſtimmungen zu Grunde gelegten 51 Verſuche von Couplet, Boſſut und Du Buat, ſondern auch noch 11 Verſuche vom Verfaſſer und 1 Verſuch von einem Herrn Gueymard in Grenoble benutzt worden. Die älteren Verſuche erſtrecken ſich nur auf Geſchwindigkeiten von 0,043 bis 1,930 Metern, durch die Verſuche des Verfaſſers iſt aber die letzte Grenze der Geſchwindigkeiten bis auf 4,648 Meter hinausgerückt worden. Die Weiten der Röhren waren bei den älteren Verſuchen 27, 36, 54, 135 und 490 Millimeter, die neuen Verſuche aber wurden an Röhren von 33, 71 und 275 Millimetern angeſtellt. Mit Hülfe der Methode der kleinſten Quadrate iſt nun aus den zum Grunde gelegten 63 Verſuchen gefunden worden:

$$\zeta = 0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}}, \text{ alſo}$$

$$h_1 = \left(0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}}\right) \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ Meter,}$$

oder für das preußiſche Maaß

$$h_1 = \left(0{,}01439 + \frac{0{,}016921}{\sqrt{v}}\right) \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ Fuß.}$$

§. 366. Zur Erleichterung der Rechnung iſt folgende Tabelle der Widerſtandscoefficienten zuſammengeſtellt worden. Man erſieht aus ihr, daß allerdings die Veränderlichkeit dieſer Coefficienten nicht unbedeutend iſt, da dieſer Coefficient für 0,1 Meter Geſchwindigkeit = 0,0443, für 1 Meter = 0,0239 und für 5 Meter = 0,0186 ausfällt.

Tabelle der Reibungscoefficienten des Waſſers.

		Zehntel Meter.									
	v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ganze Meter.	0	∞	0,0443	0,0356	0,0317	0,0294	0,0278	0,0266	0,0257	0,0250	0,0244
	1	0239	0234	0230	0227	0224	0221	0219	0217	0215	0213
	2	0211	0209	0208	0206	0205	0204	0203	0202	0201	0200
	3	0199	0198	0197	0196	0195	0195	0194	0193	0193	0192
	4	0191	0191	0190	0190	0189	0189	0188	0188	0187	0187

Man findet in dieſer Tabelle die einer gewiſſen Geſchwindigkeit entſprechenden Widerſtandscoefficienten, wenn man die ganzen Meter in der erſten Vertikal- und die Zehntel in der erſten Horizontalcolumne aufſucht, von der erſten Zahl horizontal und von der letzten vertikal fortgeht bis zur

Stelle, wo ſich beide Bewegungen begegnen. Z. B. für $v = 1{,}3$ Meter iſt $\zeta = 0{,}0227$, für $v = 2{,}8$, $\zeta = 0{,}0201$. Reibungswiderſtand.

Für das preußiſche Fußmaaß läßt ſich ſetzen:

v	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9 Fuß.
ζ	0,0679	0,0522	0,0453	0,0411	0,0383	0,0362	0,0346	0,0333	0,0322

v	1	1¼	1½	2	3	4	6	8	12	20 Fuß.
ζ	0,0313	0,0296	0,0282	0,0263	0,0242	0,0229	0,0213	0,0204	0,0192	0,0182

Anmerkung. Eine ausgedehntere und bequemere Tafel giebt der »Ingenieur«, Seite 458.

§. 367. In Anſehung der Bewegung des Waſſers in langen Röhren oder Röhrenleitungen können folgende drei Hauptaufgaben zur Löſung vorkommen. Lange Röhren.

1) Es iſt die Länge l und Weite d der Röhre und das fortzuführende Waſſerquantum Q gegeben, und man ſucht die entſprechende Druckhöhe. Hier hat man zunächſt die Geſchwindigkeit $v = \frac{Q}{F} = \frac{4Q}{\pi d^2} = 1{,}2732 \cdot \frac{Q}{d^2}$ zu berechnen, dann den dieſem Werthe entſprechenden Reibungscoefficienten ζ in einer der letzten Tafeln aufzuſuchen, und zuletzt die Werthe d, l, v, ζ und ζ_1, wo ζ_1 den Widerſtandscoefficienten für das Einmündungsſtück bezeichnet, in der erſten Hauptformel $h = \left(1 + \zeta_1 + \zeta \frac{l}{d}\right) \frac{v^2}{2g}$ zu ſubſtituiren.

2) Es iſt die Länge und Weite der Röhre, ſowie die Druckhöhe oder das Gefälle gegeben, und die Waſſermenge zu beſtimmen. Hier iſt zunächſt die Geſchwindigkeit durch die Formel

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta_1 + \zeta \cdot \frac{l}{d}}}$$

zu finden; da aber der Widerſtandscoefficient nicht ganz conſtant iſt, ſondern ſich mit v etwas ändert, ſo muß man v vorher ſchon annähernd kennen, um darnach ζ ermitteln zu können.

Aus v folgt dann $Q = \frac{\pi d^2}{4} v = 0{,}7854\ d^2\ v$.

Lange Röhren.

3) Es iſt die Waſſermenge, die Druckhöhe und die Länge der Röhre gegeben, und die nöthige Weite der Röhre zu beſtimmen.

$$\text{Da } v = \frac{4Q}{\pi d^2}, \text{ alſo } v^2 = \left(\frac{4Q}{\pi}\right)^2 . \frac{1}{d^4},$$

$$\text{ſo hat man } 2gh = \left(1 + \xi_1 + \xi \frac{l}{d}\right)\left(\frac{4Q}{\pi}\right)^2 . \frac{1}{d^4}, \text{ oder}$$

$$2gh . \left(\frac{\pi}{4Q}\right)^2 = (1 + \xi_1) \frac{1}{d^4} + \xi \frac{l}{d^5}, \text{ oder}$$

$2gh . \left(\frac{\pi}{4Q}\right)^2 d^5 = (1 + \xi_1)\, d + \xi\, l$; daher iſt die Röhrenweite

$$d = \sqrt[5]{\frac{(1 + \xi_1)\, d + \xi l}{2gh} . \left(\frac{4Q}{\pi}\right)^2}.$$

Nun iſt aber $\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = 1{,}6212$, $1 + \xi_1$ im Mittel $= 1{,}505$ und für das preuß. Maaß $\frac{1}{2g} = 0{,}016$, daher läßt ſich ſetzen:

$$d = 0{,}4817 \sqrt[5]{(1{,}505 . d + \xi l) \frac{Q^2}{h}} \text{ Fuß.}$$

Auch dieſe Formel iſt nur als Näherungsformel zu gebrauchen, weil die Unbekannte d und auch der von $v = \frac{4Q}{\pi d^2}$ abhängige Coefficient ξ in ihr mit vorkommen.

Beiſpiele. 1) Welche Druckhöhe beanſprucht eine Röhrenleitung von 150 Fuß Länge und 5 Zoll Weite, wenn dieſelbe in der Minute 25 Cubikfuß Waſſer fortleiten ſoll? Hier iſt $v = 1{,}2732 . \frac{25 . 12^2}{60 . 5^2} = 3{,}056$ Fuß, daher läßt ſich $\zeta = 0{,}0242$ ſetzen, und es folgt nun die Druckhöhe oder das totale Röhrengefälle $h = \left(1{,}505 + 0{,}0242 . \frac{150 . 12}{5}\right) . 0{,}016 . 3{,}056^2$

$= (1{,}505 + 8{,}712)\, 0{,}016 . 9{,}339 = 1{,}527$ Fuß.

2) Welche Waſſermenge wird eine Röhrenleitung von 48 Fuß Länge und 2 Zoll Weite bei 5 Fuß Druckhöhe liefern? Es iſt

$$v = \frac{7{,}906 \sqrt{5}}{\sqrt{1{,}505 + \zeta . \frac{48 . 12}{2}}} = \frac{17{,}678}{\sqrt{1{,}505 + 288 . \zeta}}$$

Vorläufig $\zeta = 0{,}020$ angenommen, erhält man $v = \frac{17{,}678}{\sqrt{7{,}26}} = \frac{17{,}678}{2{,}7} = 6{,}5$, aber $v = 6{,}5$ giebt richtiger $\zeta = 0{,}0211$, daher hat man genauer

$v = \frac{17{,}678}{\sqrt{1{,}505 + 288 . 0{,}0211}} = \frac{17{,}678}{\sqrt{7{,}582}} = 6{,}42$ Fuß, und das Waſſerquantum $Q = 0{,}7854 . \left(\frac{2}{12}\right)^2 . 6{,}42 = 0{,}140$ Cubikfuß $= 242$ Cubikzoll.

3) Welche Weite muß man einer 100 Fuß langen Röhrenleitung geben, die bei 5 Fuß Druckhöhe in jeder Secunde einen halben Cubikfuß Wasser liefert? Lange Röhren.

Es ist $d = 0{,}4817 \sqrt[5]{(1{,}505\,d + 100\,\zeta) \,.\, \frac{1}{5}(\frac{1}{2})^2} = 0{,}4817 \sqrt[5]{0{,}075\,d + 5\,\zeta}$.

Setze ich vorläufig $\zeta = 0{,}02$, so bekomme ich $d = 0{,}4817 \sqrt[5]{0{,}075\,d + 0{,}100}$, oder annähernd $= 0{,}4817 \sqrt[5]{0{,}100} = 0{,}30$, also genauer

$d = 0{,}4817 \sqrt[5]{0{,}0225 + 0{,}100} = 0{,}4817 \sqrt[5]{0{,}1225} = 0{,}3165$ Fuß $= 3{,}8$ Zoll.

Dieser Weite entspricht der Querschnitt $F = 0{,}7854 \,.\, 0{,}3165^2 = 0{,}0787$ Quadratfuß, die Geschwindigkeit $v = \frac{Q}{F} = \frac{0{,}5}{0{,}0787} = 6{,}35$ Fuß, und dieser wieder der Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}0211$. Führt man den letzteren genaueren Werth ein, so erhält man $d = 0{,}4817 \sqrt[5]{0{,}1280} = 0{,}319$ Fuß.

Anmerkung. Versuche mit $2\frac{1}{2}$ und $4\frac{1}{2}$ Zoll weiten ordinären Holzröhren haben dem Verfasser den Widerstandscoefficienten 1,75mal so groß gegeben, als bei den Metallröhren, auf die sich die in den Tabellen des vorigen §. aufgeführten Werthe beziehen. Während also z. B. für die Geschwindigkeit von 3 Fuß bei Metallröhren $\zeta = 0{,}0242$ ist, müssen wir ihn bei Holzröhren $= 0{,}0242 \,.\, 1{,}75 = 0{,}04235$ setzen; während wir im Beispiel 1. die Druckhöhe in einer 150 Fuß langen Metallröhre 1,527 Fuß gefunden haben, wird sie bei einer gleich weiten Holzröhre unter denselben Umständen

$h = (1{,}505 + 0{,}04235 \,.\, 360) \,.\, 0{,}016 \,.\, 9{,}339 = 16{,}75 \,.\, 0{,}1494 = 2{,}50$ Fuß

betragen müssen.

§. 368 *). Bei einer conischen Röhre AD, Fig. 532, läßt sich der Reibungswiderstand auf folgende Weise finden. Es sei der Convergenzwinkel ACB der Röhrenwand $= \delta$, der Durchmesser AB der Einmündung $= d_1$, der Durchmesser DE der Ausmündung $= d$, ferner die Länge KL der Röhre $= l$, und die Ausflußgeschwindigkeit (bei DE) $= v$. Conische Röhren.

Fig. 532.

In einem Abstande $KM = x$ von der Ausmündung ist der Durchmesser der Röhre

$$NO = y = DE + 2\,KM\ tang.\ \frac{\delta}{2}$$

$$= d + 2x\ tang.\ \frac{\delta}{2},$$

und daher die Geschwindigkeit daselbst, da sich $\frac{w}{v} = \frac{d^2}{y^2}$ setzen läßt,

$$w = \frac{d^2}{y^2}\,v = \frac{v}{\left(1 + \frac{2x}{d}\ tang.\ \frac{\delta}{2}\right)^2}.$$

Für ein Element $NOPR$ des Röhrenstückes von der Länge $MQ = dx$ ist daher die Widerstandshöhe der Reibung:

Coniſche Röhren

$$\partial h = \zeta \cdot \frac{\partial x}{y} \cdot \frac{w^2}{2g} = \zeta \cdot \frac{\partial x}{y\left(1 + \frac{2x}{d}\ tang\ \frac{\delta}{2}\right)^4} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

$$= \zeta \cdot \frac{\partial x}{d\left(1 + \frac{2x}{d}\ tang.\ \frac{\delta}{2}\right)^5} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und es folgt die Reibungswiderſtandshöhe für die ganze Röhre:

$$h = \zeta \cdot \frac{v^2}{2gd} \int_o^l \frac{\partial x}{\left(1 + \frac{2x}{d}\ tang.\ \frac{\delta}{2}\right)^5}.$$

Nun iſt aber

$$\int \frac{\partial x}{\left(1 + \frac{2x}{d}\ tang.\ \frac{\delta}{2}\right)^5}$$

$$= \frac{d}{2}\ cotang.\ \frac{\delta}{2} \int \left(1 + \frac{2x}{d}\ tang.\ \frac{\delta}{2}\right)^{-5} \partial\left(\frac{2x}{d}\ tang.\ \frac{\delta}{2}\right)$$

$$= \frac{d}{8}\ cotang.\ \frac{\delta}{2}\left(1 + \frac{2x}{d}\ tang.\ \frac{\delta}{2}\right)^{-4},\ \text{daher}$$

$$\int_o^l \frac{\partial x}{\left(1 + \frac{2x}{d}\ tang.\ \frac{\delta}{2}\right)^5}$$

$$= \frac{d}{8}\ cotang.\ \frac{\delta}{2}\left[1 - \left(1 + \frac{2l}{d}\ tang.\ \frac{\delta}{2}\right)^{-4}\right],\ \text{oder}$$

$$= \frac{d}{8}\ cotang.\ \frac{\delta}{2}\left[1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^{-4}\right] = \frac{d}{8}\ cotang.\ \frac{\delta}{2}\left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right],$$

da $d + 2l\ tang.\ \frac{\delta}{2}$ den Durchmeſſer d_1 der Einmündung ausdrückt.

Es iſt folglich die geſuchte Widerſtandshöhe

$$h = \zeta \cdot \frac{v^2}{2gd} \cdot \frac{d}{8}\ cotang.\ \frac{\delta}{2}\left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right]$$

$$= 1/8\ \zeta \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right] cotang.\ \frac{\delta}{2} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Iſt die Einmündung viel weiter als die Ausmündung, ſo kann man $\frac{d}{d_1}$ = Null ſetzen, und erhält hiernach

$$h = 1/8\ \zeta\ cotang.\ \frac{\delta}{2} \cdot \frac{v^2}{2g};$$

es hängt alſo in dieſem Falle der Reibungswiderſtand gar nicht von der Länge der Röhre ab.

Conische Röhren.

Beiſpiel. Bei einem Feuerſpritzenmundſtück AK, Fig. 533, iſt der Convergenzwinkel der Ausmündung LK, $\delta = 5°$, und der der Einmündung AK, $\delta_1 = 18°$, ferner die Weite der Ausmündung, $d = 7$ Linien, die Weite der Einmündung $d_1 = 1\frac{1}{2}$ Zoll $= 18$ Linien, und die ganze Länge des Gußſtückes $AK = l = 6$ Zoll 72 Linien, wie groß iſt der Widerſtandscoefficient deſſelben? Setzen wir die Länge des Ausmündungsſtückes $KL = l_1$, und die des Einmündungsſtückes $AL = l_2$, ſo haben wir

Fig. 533.

$$l_1 + l_2 = l \text{ und } l_1 \, tang. \frac{\delta}{2} + l_2 \, tang. \frac{\delta_1}{2} = \frac{d_1 - d}{2},$$

in Zahlen,

$l_1 + l_2 = 72$ und l_1 *tang.* $2\frac{1}{2}° + l_2$ *tang.* $9° = 11$,

oder $0{,}04362\ l_1 + 0{,}15838\ l_2 = 5{,}5$. Hieraus folgt

$l_1 = 49{,}44$ und $l_2 = 20{,}56$ Linien, und die Weite bei L, wo die Kegelflächen zuſammenſtoßen,

$$d_2 = d + 2l_1 \, tang. \frac{\delta}{2} = 7 + 2\ 49{,}44 \,.\, 0{,}04362 = 11{,}3$$

Linien. Da dieſe Stelle abzurunden iſt, möge aber $d_2 = 13$ Linien geſetzt werden. Nun folgt für das Ausmündungsſtück

$$\left[1 - \left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right] \, cotang. \frac{\delta}{2} = [1 - (7/13)^4] \,.\, cotang.\ 2\tfrac{1}{2}°$$
$$= 0{,}9159 \,.\, 22{,}904 = 20{,}98,$$

und für das Einmündungsſtück

$$\left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right] \, cotang. \frac{\delta_1}{2} = [1 - (13/18)^4] \,.\, cotang.\ 9°$$
$$= 0{,}7795 \,.\, 6{,}314 = 4{,}92,$$

daher iſt für das ganze Gußſtück die Widerſtandshöhe

$$h = \frac{\zeta}{8}\left[20{,}98 + 4{,}92 \,.\, \left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right] \,.\, \frac{v^2}{2g} = \frac{\zeta}{8}\left[20{,}98 + 4{,}92 \,.\, \left(\frac{7}{13}\right)^4\right] \frac{v^2}{2g}$$
$$= 22{,}41 \,.\, \frac{\zeta}{8} \,.\, \frac{v^2}{2g} = 2.8\zeta \,.\, \frac{v^2}{2g},$$ und wenn man $\zeta = 0{,}02$ annimmt,

$h = 0{,}056 \,.\, \frac{v^2}{2g}$, d. i. über $5\frac{1}{2}$ Procent der Geſchwindigkeitshöhe, womit auch die angeſtellten Verſuche übereinſtimmen.

Röhrenleitung.

§. 369. Eine Röhrenleitung mündet entweder in freier Luft oder unter Waſſer aus. Beide Fälle ſind in den Figuren 534 und 535 abgebildet. Im erſten Falle iſt als Druckhöhe h der Niveauabſtand BC beider Waſſerſpiegel, im zweiten aber die ſenkrechte Tiefe BO der Ausmün-

Fig. 534.

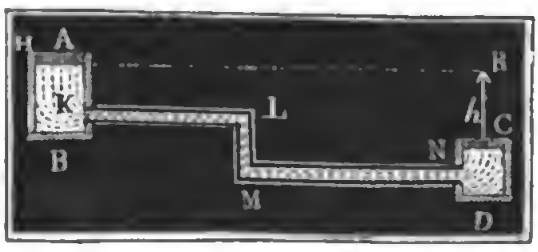
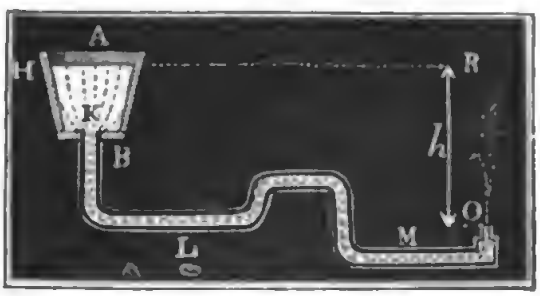


Fig. 535.



Röhrenleitung. dung O unter dem Waſſerſpiegel A des Zufluſsapparates anzunehmen. Behält nun die Röhre überall eine und dieſelbe Weite d, ſo finden in beiden Fällen die im §. 367 entwickelten Formeln ihre unmittelbare Anwendung, verengert oder erweitert ſich aber die Röhre an einer Stelle, ſo hat man es mit verſchiedenen Röhrengeſchwindigkeiten zu thun, und es iſt daher der Reibungswiderſtand für jede Röhre beſonders zu berechnen. Einen ſolchen Fall bietet z. B. die Waſſerleitung in Fig. 535 mit einem ſpringenden Strahle dar, wo das Mundſtück O enger iſt als die Zuleitungsröhre BLM. Setzen wir, wie gewöhnlich, die Ausflußgeſchwindigkeit $= v$, die Weite der Ausmündung $O = d$, die Weite der Röhre aber $= d_1$, ſo haben wir die Geſchwindigkeit des Waſſers in derſelben

$v_1 = \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 v$, und bezeichnet nun noch l_1 die Länge der Röhre ALM und ξ den Reibungscoefficienten, ſo folgt die entſprechende Reibungshöhe

$$k = \xi \frac{l_1 v_1^2}{d_1 2g} = \xi \frac{l_1}{d_1} \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Iſt nun noch ξ_1 der Widerſtandscoefficient für das Einmündungsſtück K und ξ_2 der für das Ausmündungsſtück, ſo iſt der Druckhöhenverluſt, welchen das erſtere verurſacht,

$$k_1 = \xi_1 \frac{v_1^2}{2g} = \xi_1 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

dagegen der, welcher aus der Bewegung durch das zweite entſpringt,

$$k_2 = \xi_2 \frac{v^2}{2g};$$

und hiernach hat man nun das ganze Gefälle

$$h = \frac{v^2}{2g} + k + k_1 + k_2 = \left[1 + \xi \frac{l_1}{d_1} \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \xi_1 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \xi_2\right] \frac{v^2}{2g},$$

und umgekehrt die Ausflußgeſchwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \left(\xi \frac{l_1}{d_1} + \xi_1\right)\left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \xi_2}}.$$

Die Mund- oder Ausgußſtücke müſſen zur Erzielung einer großen Steighöhe nicht bloß dem Waſſer einen möglichſt kleinen Widerſtand darbieten, ſondern auch das Ausſtrömen in möglichſt parallelen Fäden bewirken, damit dieſelben beim Aufſteigen einen langen zuſammenhängenden Strahl bilden, der durch die Luft weniger geſtört wird als ein zerriſſener Strahl. Aus dieſem Grunde zieht man die kurzen cylindriſchen oder wenig coniſchen Mundſtücke mit abgerundeter Einmündung den Ausmündungen in der dünnen Wand oder den nach der Geſtalt des contrahirten Waſſerſtrahles geformten Mundſtücken vor, obgleich ſie einen wenig grö-

ßeren Geſchwindigkeitsverluſt verurſachen als dieſe. Die Knoten und Röhrenleitung.
Bäuche, welche der aus den letzteren Mündungen kommende Strahl bildet oder zu bilden ſucht, geben der äußeren Luft mehr Gelegenheit zum Eindringen, als ein cylindriſcher Strahl.

§. 370. Aus der Geſchwindigkeit v, mit welcher das Waſſer aus einem Mundſtücke ausſtrömt, läßt ſich auch die Höhe berechnen, auf welche der Strahl aufſteigt. Iſt δ der Neigungswinkel des Strahles gegen den Horizont, ſo hätte man, wenn dem aufſteigenden Strahle keine Hinderniſſe entgegen ſtänden, die Steighöhe (ſ. §. 38): Springende Strahlen.

$$s = \frac{v^2 \sin.\delta^2}{2g};$$

da jedoch die Luft und, zumal bei einem ganz ſenkrechten Strahle, auch das zurückfallende Waſſer dem Aufſteigen des Strahles hinderlich ſind, ſo fällt die effective Steighöhe noch etwas kleiner aus.

Bei Strahlen, welche der Verfaſſer durch kreisförmige Mündungen in der dünnen Wand, oder durch kurze cylindriſche oder wenig coniſche Mundſtücke von 1 Centimeter Weite fließen und ohngefähr $13\frac{1}{2}$ Fuß, jedoch nicht ganz ſenkrecht in die Höhe ſteigen ließ, war der Widerſtand der Luft noch unmerklich, fiel wenigſtens die effective Steighöhe δ noch nicht $\frac{1}{4}$ Fuß kleiner aus als die Geſchwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$. Nach Mariotte, der hierüber mehrere Verſuche angeſtellt hat (ſ. deſſen Grundlehren der Hydroſtatik und Hydraulik, deutſch von Meinig, 1723), iſt für eine kreisförmige Mündung von 6 Linien Weite bei einer Druckhöhe von 26,08 Fuß die Steighöhe 24,21 Fuß, und bei einer Druckhöhe von 34,96 Fuß die Steighöhe 31,71 Fuß; nun beträgt aber der Widerſtandscoefficient für dieſe Mündung (ſ. §. 347) mindeſtens 5 Procent, folglich iſt die der erſten Druckhöhe entſprechende Geſchwindigkeitshöhe

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{26{,}08}{1{,}05} = 24{,}84 \text{ Fuß},$$

und die der zweiten

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{34{,}96}{1{,}05} = 33{,}30 \text{ Fuß},$$

und der Verluſt an Steighöhe, im erſten Falle

$$\frac{v^2}{2g} - s = 24{,}84 - 24{,}21 = 0{,}63 \text{ Fuß},$$

und im zweiten

$$\frac{v^2}{2g} - s = 33{,}30 - 31{,}71 = 1{,}59 \text{ Fuß};$$

Springende Strahlen.

oder im Verhältniß zur Steighöhe s:

$$\left(\frac{v^2}{2g} - s\right) : s = \frac{0{,}63}{24{,}21} = 0{,}026 \quad \text{und}$$

$$= \frac{1{,}59}{31{,}71} = 0{,}050.$$

Setzt man $\frac{v^2}{2g} = s\,(1 + \varkappa s)$, ſo erhält man nach dieſen Angaben für das Pariſer Fußmaaß im Mittel den Coefficienten

$$\varkappa = \left(\frac{v^2}{2g} - s\right) : s^2 = 0{,}0013, \text{ und daher}$$

$$\frac{v^2}{2g} = s\,(1 + 0{,}0013\,s),$$

und umgekehrt, annähernd

$$s = \frac{v^2}{2g}\left(1 - 0{,}0013 \,.\, \frac{v^2}{2g}\right).$$

Beiſpiel. Wenn bei einem Springbrunnen die Leitungsröhre 350 Fuß lang und 2 Zoll weit iſt, wenn ferner das coniſche Mundſtück deſſelben $\frac{1}{2}$ Zoll weit iſt, und den Widerſtandscoefficienten $\zeta_2 = 0{,}08$ hat, wie hoch wird bei einer Druckhöhe von 40 Fuß der Strahl ſpringen, vorausgeſetzt, daß außer der Reibung alle übrigen Röhrenwiderſtände klein genug ſind, um ſie vernachläſſigen zu können. Es iſt hier, wenn man $\zeta = 0{,}025$, $\zeta_1 = 0$, 0,

Fig. 536.

$$\zeta_2 = 0{,}08, \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 = (1/4)^4 = 1/256$$

$$\text{und } \frac{l_1}{d_1} = \frac{350}{2/12} = 2100 \text{ ſetzt,}$$

die Höhe der Ausflußgeſchwindigkeit

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{h}{1 + \zeta\,\frac{l_1}{d_1} \cdot \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \zeta_2}$$

$$= \frac{40}{1{,}08 + 0{,}025 \,.\, 2100 \,.\, 1/256} = \frac{40}{1{,}287}$$

$= 31{,}08$ Fuß, und daher die zu erwartende Steighöhe bei ruhiger Luft

$$s = 31{,}08\,(1 - 0{,}0013 \,.\, 31) = 31{,}08 - 1{,}25$$
$$= 29{,}83 \text{ Fuß.}$$

Anmerkung*). Unter der Vorausſetzung, daß die Luft dem aufſteigenden Waſſerſtrahl ebenſo entgegenwirkt, wie die Fläche einer Röhre, läßt ſich die Steighöhle s wie folgt beſtimmen. Iſt w die Geſchwindigkeit und y die Weite DE des Strahles ABC, Fig. 536. im Abſtande $KL = x$ von der Mündung, ſo hat man ohne Rückſicht auf die Störung der Luft

$$x = \frac{v^2}{2g} - \frac{w^2}{2g},$$

oder, da $v^2 d = w^2 y$ zu ſetzen iſt,

Springende Strahlen.

$$x = \left[1 - \left(\frac{d}{y}\right)^4\right] \frac{v^2}{2g},$$

Iſt ζ der Widerſtandscoefficient der Luft, ſo hat man aber den entſprechenden Verluſt an Steighöhe

$$= \int_0^x \frac{\vartheta x}{y} \cdot \frac{w^2}{y} = \zeta \int_0^x \frac{\vartheta x}{y} \cdot \left(\frac{d}{y}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ (Vergl. §. 368}^a\text{).}$$

und es iſt daher

$$x = \left[1 - \left(\frac{d}{y}\right)^4\right] \frac{v^2}{2g} - \int \frac{\vartheta x}{x} \cdot \left(\frac{d}{y}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ zu ſetzen.}$$

Nun iſt aber annähernd

$$\vartheta x = -\, d^4 \cdot \frac{v^2}{2g}\, \vartheta(y)^{-4} = 4d^4 \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot y^{-5}\, \vartheta y,$$

daher folgt nun ſchärfer

$$x = \left[1 - \left(\frac{d}{y}\right)^4\right] \frac{v^2}{2g} - \zeta \int_d^y 4 \cdot d^4 \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot y^{-6} \cdot \left(\frac{d}{y}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g}\, \vartheta y$$

$$= \left[1 - \left(\frac{d}{y}\right)^4\right] \frac{v^2}{2g} - 4\zeta d^8 \left(\frac{v^2}{2g}\right)^2 \cdot \int_d^y y^{-10}\, \vartheta y$$

$$= \left[1 - \left(\frac{d}{y}\right)^4\right] \frac{v^2}{2g} - \tfrac{4}{9}\, \zeta d^8 \left(\frac{v^2}{2g}\right)^2 \cdot \left(d^{-9} - y^{-9}\right).$$

$$= \frac{v^2}{2g} \left(1 - \left(\frac{d}{y}\right)^4 - \tfrac{4}{9}\, \zeta\, \frac{v^2}{2gd} \left[1 - \left(\frac{d}{y}\right)^9\right]\right).$$

Für den ganzen Strahl hat man aber $x = s$, und $\left(\frac{d}{y}\right)^4$ nahe $= 0$, weshalb nun

$$s = \left(1 - \tfrac{4}{9}\, \zeta\, \frac{v^2}{2gd}\right) \cdot \frac{v^2}{2g}, \text{ ſo wie umgekehrt}$$

$$\frac{v^2}{2g} = \left(1 + \tfrac{4}{9}\, \zeta\, \frac{s}{d}\right) s \text{ folgt.}$$

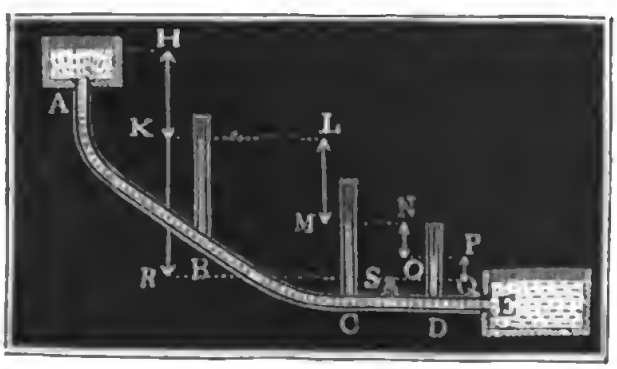
Bei den Verſuchen von Mariotte war $d = \frac{1}{2}$ Zoll $= \frac{1}{24}$ Fuß, daher iſt

$$\tfrac{4}{9}\, \zeta \cdot \frac{s}{d} = 24 \cdot \tfrac{4}{9}\, \zeta s = 0{,}0013\, s, \text{ d. i.}$$

$$\tfrac{4}{9}\, \zeta = \frac{0{,}0013}{24} = 0{,}000054, \text{ und}$$

$$\frac{v^2}{2g} = s \left(1 + 0{,}000054\, \frac{s}{d}\right) \text{ zu ſetzen.}$$

Fig. 537.



Piezometer.

§. 371. Die Druckverluſte, welche das Waſſer in einer Röhrenleitung *ABCDE*, Fig. 537, durch Verengungen, Reibung u. ſ. w. erleidet, kann man durch die Waſſerſäulen meſſen, welche ſich in ſenkrecht aufgeſetzten Röhren *BK*, *CM*, *DO* erhal-

Piëzometer. ten, die man, wenn ſie lediglich zu dieſem Zwecke dienen, Piëzometer nennt.

Iſt v die Geſchwindigkeit des Waſſers an der Stelle B, Fig. 537, wo ein Piëzometer einmündet, l die Länge, d die Weite des Röhrenſtückes AB, h die Druckhöhe oder die Tiefe des Punktes B unter dem Waſſerſpiegel, iſt ferner ξ_1 der Widerſtandscoefficient für den Eintritt aus dem Reſervoir in die Röhre, und ξ der Reibungscoefficient, ſo hat man für den, den Druck in B meſſenden Piëzometerſtand

$$z = h - \left(1 + \xi_1 + \xi \frac{l}{d}\right)\frac{v^2}{2g}.$$

Iſt die Länge eines Röhrenſtückes $BC = l_1$ und das Gefälle deſſelben $= h_1$, ſo hat man den Piëzometerſtand in C:

$$z_1 = h + h_1 - \left(1 + \xi_1 + \xi\frac{l}{d} + \xi \frac{l_1}{d}\right)\frac{v^2}{2g},$$

und daher die Differenz der Piëzometerſtände:

$z_1 - z = h_1 - \xi \frac{l_1}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$, umgekehrt folgt daher die Widerſtandshöhe des Röhrenſtückes BC:

$\xi \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = h_1 + z - z_1 =$ Gefälle des Röhrenſtückes plus Differenz der Piëzometerſtände.

Man erſieht hieraus, daß die Piëzometer dazu dienen können, die Widerſtände, welche das Waſſer in den Röhrenleitungen zu überwinden hat, zu meſſen. Befindet ſich in der Röhre ein beſonderes Hinderniß, hat ſich z. B. ein kleiner Körper in derſelben feſtgeſetzt, ſo wird dieſes ſogleich durch das Sinken des Piëzometerſtandes angezeigt und die Größe des erzeugten Widerſtandes ausgedrückt werden. Die Widerſtände, welche durch Regulirungsapparate, wie Hähne, Schieber u. ſ. w., von welchen im folgenden Kapitel die Rede iſt, erzeugt werden, laſſen ſich ebenfalls durch Piëzometerſtände ausdrücken. So ſteht z. B. das Piëzometer in D tiefer, als das in C, nicht allein wegen der Reibung des Waſſers in dem Röhrenſtücke CD, ſondern auch wegen der Verengung, welche der Schieber S in dieſer Röhre hervorbringt. Iſt bei völlig geöffnetem Schieber die Differenz NO der Piëzometerſtände $= h_1$, und bei eingeſtelltem Schieber aber $= h_2$, ſo giebt die neue Differenz oder Senkung $h_2 - h_1$ die Widerſtandshöhe, welche dem Durchgange des Waſſers durch den Schieber entſpricht. Endlich läßt ſich auch aus dem Piëzometerſtande die Ausflußgeſchwindigkeit berechnen. Iſt der Piëzometerſtand $PQ = z$, die Länge des letzten Röhrenſtückes $DE = l$ und die Weite deſſelben $= d$, ſo hat man:

$z = \xi \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$, und daher $v = \sqrt{\frac{2gz}{\xi \frac{l}{d}}} = \sqrt{\frac{d}{l} \cdot \frac{2gz}{\xi}}$.

Beiſpiel. Iſt der Piëzometerſtand $PQ = z$, Fig. 537, $^3/_4$ Fuß, und die Piëzometer.
Länge der Röhre DE, vom Piëzometer bis zur Ausmündung gemeſſen, = 150 Fuß, die Röhrenweite aber $3^1/_2$ Zoll, ſo folgt die Ausflußgeſchwindigkeit

$$v = 7{,}906 \sqrt{\frac{3{,}5}{150 \,.\, 12} \cdot \frac{0{,}75}{0{,}025}} = 7{,}906 \,.\, 0{,}2415 = 1{,}91 \text{ Fuß},$$ und die

Ausflußmenge $Q = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{3{,}5}{12}\right)^2 \,.\, 1{,}91 = 0{,}127$ Cubikfuß.

Anmerkung. Die Bewegung des Waſſers in einer Röhrenleitung kann ſehr leicht durch Luft geſtört werden, welche ſich entweder aus dem Waſſer entwickelt, oder von außen eindringt. Damit keines von beiden eintrete, muß bei der Anlage der Röhrenleitung dafür geſorgt werden, daß der Druck an jeder Stelle derſelben poſitiv bleibe, oder vielmehr den Atmoſphärendruck übertreffe, alſo in jedem der Piëzometer eine gewiſſe Waſſerſäule ſtehe. Hiernach iſt alſo ſtets nöthig, daß $h > \left(1 + \zeta_1 + \zeta \frac{l}{d}\right)\frac{v^2}{2g}$ ſei; daß z. B. der Waſſerſtand in Zuflußreſervoir mindeſtens die Geſchwindigkeitshöhe des Waſſers in der Röhre übertreffe. Außerdem iſt zu befürchten, daß die Röhre in einem Wirbel Luft nachſauge.

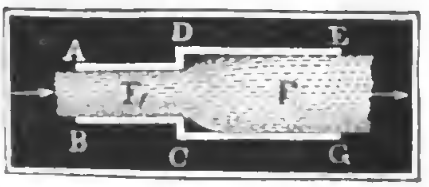
Viertes Kapitel.

Von den Hinderniſſen des Waſſers beim Durchgange durch Verengungen.

§. 372. Veränderungen in dem Querſchnitte einer Röhre oder eines anderen Ausflußreſervoirs geben auch Veränderungen in der Geſchwindigkeit des Waſſers. Die Geſchwindigkeit iſt dem Querſchnitte des Waſſerſtromes umgekehrt proportional; je weiter das Gefäß iſt, je kleiner iſt die Geſchwindigkeit, und je enger das Gefäß, je größer die Geſchwindigkeit des durchfließenden Waſſers. Aendert ſich der Querſchnitt eines Gefäßes plötzlich, wie z. B. bei der Röhre ACE, Fig. 538, ſo tritt auch eine plötzliche Geſchwindigkeitsveränderung ein, und hiermit iſt wieder ein Verluſt an lebendiger Kraft oder der entſprechenden Abnahme an Druck verbunden. Dieſer Verluſt läßt ſich genau ſo berechnen wie der Arbeitsverluſt beim Stoße unelaſtiſcher Körper (ſ. §. 275). Jedes Waſſerelement, welches aus der engeren Röhre BD in die weitere Röhre DG tritt, ſtößt gegen die langſamer gehende Waſſermaſſe in dieſer Röhre und geht nach dem Stoße mit dieſer vereinigt fort. Genau ſo iſt es aber auch bei dem Zuſammentreffen feſter und unelaſtiſcher Körper, auch dieſe Körper gehen nach dem Stoße mit einer gemeinſchaftli-

Plötzliche Erweiterung.

Fig. 538.



Plötzliche Erweiterung.

chen Geſchwindigkeit fort. Wenn wir nun gefunden haben, daß der Arbeitsverluſt beim Stoße dieſer Körper $L = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$ iſt, ſo können wir hier, da das ſtoßende Waſſerelement G_1 unendlich klein iſt gegen die geſtoßene Waſſermaſſe G_2, ſetzen: $L = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} G_1$, und folglich den entſprechenden Verluſt an Druckhöhe: $h = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$.

Es entſteht alſo durch die plötzliche Geſchwindigkeitsveränderung ein Druckhöhenverluſt, welcher durch die dieſer Veränderung entſprechende Geſchwindigkeitshöhe gemeſſen wird.

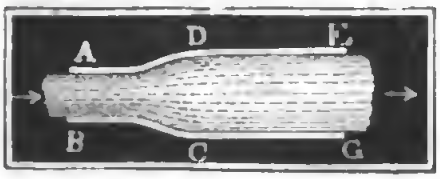
Iſt nun der Querſchnitt der einen Röhre $AC, = F_1$, und der Querſchnitt der andern Röhre $CE, = F$, die Geſchwindigkeit des Waſſers in der erſten Röhre $= v_1$ und die in der andern $= v$, ſo hat man $v_1 = \frac{Fv}{F_1}$, daher den Druckhöhenverluſt beim Uebergange aus einer Röhre in die andere

$$h_1 = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und den entſprechenden, ſchon von Borda gefundenen Widerſtandscoefficienten $\zeta = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2$.

Die hierüber angeſtellten Verſuche des Verfaſſers ſtimmen mit der Theorie gut überein. Damit die Röhre DG vom Waſſer ausgefüllt werde, iſt es nöthig, daß ſie nicht ſehr kurz und nicht ſehr viel weiter ſei, als die Röhre AC. Dieſer Verluſt verſchwindet, wenn, wie Fig. 539 repräſentirt, durch Abrundung der Kanten ein allmäliger Uebergang aus der einen Röhre in die andere herbeigeführt wird.

Fig. 539.



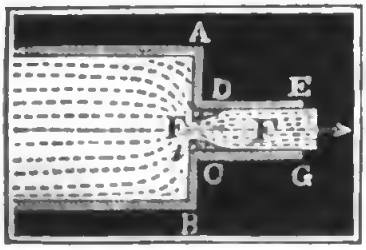
Anmerkung. Die gefundene Druckhöhe $h_1 = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$ kann natürlich nicht ſpurlos verloren gehen, man muß vielmehr annehmen, daß die ihr entſprechende mechaniſche Arbeit auf die Zertheilung und die wirbelnde Bewegung der vorher ein Continuum bildenden Waſſertheile verwendet wird.

Beiſpiel. Wenn der Durchmeſſer der einen Röhre in der Zuſammenſetzung von Fig. 538, noch einmal ſo groß iſt, als der der andern Röhre, ſo iſt $\frac{F}{F_1} = (2/1)^2 = 4$, daher der Widerſtandscoefficient $\zeta = (4-1)^2 = 9$ und die entſprechende Widerſtandshöhe für den Uebergang aus der engeren Röhre in die

weitere $= 9 \cdot \frac{v^2}{2g}$. Iſt die Geſchwindigkeit des Waſſers in der letzteren Röhre Verengung.
$= 10$ Fuß, ſo folgt die Widerſtandshöhe $= 9 \cdot 0{,}016 \cdot 10^2 = 14{,}4$ Fuß.

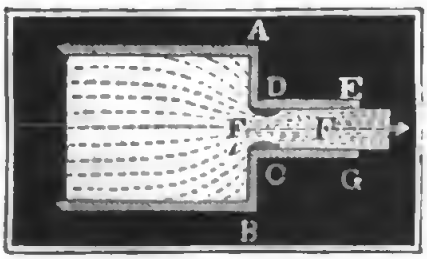
§. 373. Eine plötzliche Geſchwindigkeitsveränderung tritt auch dann ein, wenn das Waſſer aus einem Gefäße AB, Fig. 540, in eine engere Röhre DG tritt, zumal wenn an der Eintrittsſtelle CD ein Diaphragma ſitzt, deſſen Oeffnung noch kleiner iſt, als der Querſchnitt des Rohres DG. Iſt der Inhalt der Verengung $= F_1$, und α der Contractionscoefficient, ſo hat man den Querſchnitt F_2 des contrahirten Waſſerſtrahles $= \alpha F_1$, und iſt dagegen F der Querſchnitt des Rohres und v die Ausflußgeſchwindigkeit, ſo findet man die Geſchwindigkeit im contrahirten Querſchnitte F_2: $v_2 = \frac{F}{\alpha F_1} v$, daher den Druckhöhenverluſt beim Uebergange aus F_2 in F oder aus v_2 in v:

Fig. 540.



$h = \frac{(v_2 - v)^2}{2g} = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$, und den entſprechenden Widerſtandscoefficienten: $\zeta = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2$.

Fig. 541.



Ohne Diaphragma erhält man eine bloße Anſatzröhre, Fig. 541, daher iſt hier $F = F_1$ und $\zeta = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2$.

Nimmt man $\alpha = 0{,}64$, ſo erhält man $\zeta = \left(\frac{1 - 0{,}64}{0{,}64}\right)^2 = (9/16)^2 = 0{,}316$. Nun iſt aber der Widerſtandscoefficient für den Durchgang durch eine Mündung in der dünnen Wand ohngefähr 0,07, daher hier, wo das Waſſer $\frac{1}{\alpha}$mal ſo ſchnell ausfließt, als im contrahirten Querſchnitte, die entſprechende Widerſtandshöhe $= 0{,}07 \cdot \left(\frac{v}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{1}{2g} = 0{,}07 \cdot \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$

$\frac{0{,}07}{0{,}41} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0{,}171 \cdot \frac{v^2}{2g}$. Durch Vereinigung beider Widerſtände erhält man die ganze Widerſtandshöhe für den Ausfluß durch eine kurze Anſatzröhre $= 0{,}316 \frac{v^2}{2g} + 0{,}171 \frac{v^2}{2g} = 0{,}49 \cdot \frac{v^2}{2g}$, während wir oben $0{,}50 \frac{v^2}{2g}$ gefunden haben.

Verengung. Verſuche über den Ausfluß des Waſſers durch eine Anſatzröhre mit verengtem Eintritte, wie Fig. 540 vorſtellt, haben den Verfaſſer auf Folgendes geführt. Der Widerſtandscoefficient für den Durchgang durch ein Diaphragma und für den Anſchluß an die weitere Röhre kann durch die Formel $\zeta = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2$ ausgedrückt werden, es iſt aber zu ſetzen:

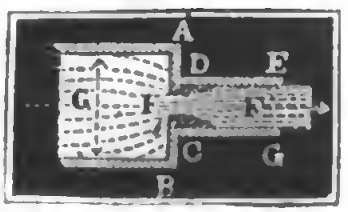
für $\frac{F_1}{F}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1.0
α	0,616	0,614	0,612	0,610	0,607	0,605	0,603	0,601	0,598	0,596
und folgt										
ζ	231,7	50,99	19,78	9,612	5,256	3,077	1,876	1,169	0,734	0,480

Hiernach iſt z. B. in dem Falle, wenn der verengte Querſchnitt halb ſo groß iſt, als der Querſchnitt der Röhre, der Widerſtandscoefficient $\zeta = 5{,}256$, d. h. der Durchgang durch dieſe Verengung nimmt eine Druckhöhe in Anſpruch, welche $5\frac{1}{4}$mal ſo groß iſt, als die Geſchwindigkeitshöhe.

Beiſpiel. Welche Ausflußmenge giebt der in Fig. 540 abgebildete Apparat, wenn die Druckhöhe $1\frac{1}{2}$ Fuß, die Weite der kreisförmigen Verengung $1\frac{1}{2}$ und die der Röhre 2 Zoll iſt? Hier hat man $\frac{F_1}{F} = \left(\frac{1\frac{1}{2}}{2}\right)^2 = (\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$ $= 0{,}56$, daher $\alpha = 0{,}606$, und $\zeta = \left(\frac{16}{9 \,.\, 0{,}606} - 1\right)^2 = \left(\frac{16 - 5{,}454}{5{,}454}\right)^2$ $= \left(\frac{10{,}546}{5{,}454}\right)^2 = 3{,}74$. Setzt man nun $h = (1 + \zeta)\frac{v^2}{2g}$, ſo erhält man die Ausflußgeſchwindigkeit $v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\zeta}} = \frac{7{,}906\sqrt{1{,}5}}{\sqrt{4{,}74}} = 4{,}45$ Fuß, und folglich das Ausflußquantum $Q = \frac{\pi d^2}{4} v = \frac{\pi}{4} \,.\, 4 \,.\, 12 \,.\, 4{,}45 = 53{,}4 \,.\, \pi = 168$ Cubikzoll.

Einfluß der unvollkommenen Contraction. §. 374. Bei dem im letzten Paragraphen betrachteten Falle kommt das Waſſer aus einem großen Gefäße, es konnte daher die Contraction als eine vollkommene angeſehen werden, iſt aber der Querſchnitt des Gefäßes oder des an der Verengung ankommenden Waſſerſtromes nicht ſehr groß in Anſehung auf den Querſchnitt F_1, Fig. 542, der Verengung, ſo iſt die Contraction eine unvollkommene

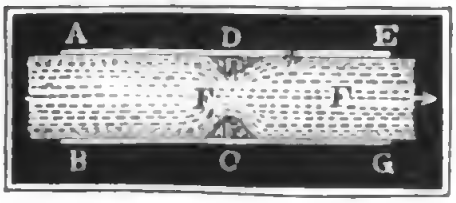
Fig. 542.



und daher auch der entſprechende Widerſtandscoefficient kleiner, als in dem oben unterſuchten Falle. Gelten die vorigen Bezeichnungen, ſo hat man auch hier die Widerſtandshöhe oder die durch den Durchgang durch F_1 verzehrte Druckhöhe $h = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$, nur hat man für α veränderliche, und zwar um ſo größere Zahlen einzuſetzen, je größer das Verhältniß $\frac{F_1}{G}$ zwiſchen dem Querſchnitte der Verengung und dem der Zuleitungsröhre AB iſt. Befindet ſich das Diaphragma CD in einer gleichweiten Röhre AG, Fig. 543, ſo findet ganz dieſelbe Beſtimmung ſtatt, nur hängt hier der Coefficient α von $\frac{F_1}{F}$ ab.

Einfluß der unvollkommenen Contraction.

Fig. 543.



Nach den vom Verfaſſer hierüber angeſtellten Verſuchen hat man in der Formel $\zeta = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2$ für die Widerſtandscoefficienten zu ſetzen.

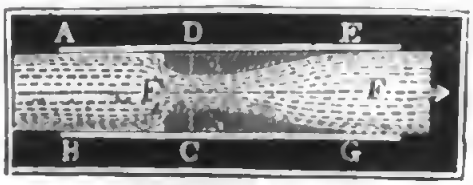
bei $\frac{F_1}{F}$ =	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
α	0,624	0,632	0,643	0,659	0,681	0,712	0,755	0,813	0,892	1,000

und es folgt

ζ	225,9	47,77	17,50	7,801	3,753	1,796	0,797	0,290	0,060	0,000

Dieſe Verluſte werden vermindert, wenn man durch Abrundung der Kanten die Contraction vermindert oder aufhebt, und ſie laſſen ſich faſt ganz beſeitigen, wenn man, wie Fig. 544 repräſentirt, ein ſich allmälig erweiterndes Rohr MN, einſetzt.

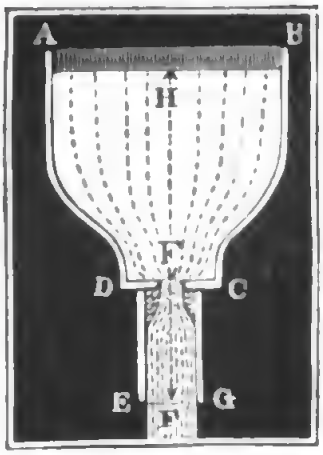
Fig. 544.



Beiſpiel. Welche Druckhöhe wird erfordert, damit der in Fig. 545 auf folgender Seite abgebildete Apparat in der Minute 8 Cubikfuß Waſſer liefere? Iſt die Weite des Diaphragma $F_1 = 1\frac{1}{2}$, die Weite der Ausflußröhre $DG = 2$ Zoll und die untere Weite der Zuflußröhre $AC = 3$ Zoll, ſo hat man $\frac{F_1}{G} = \left(\frac{1\frac{1}{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$, daher $\alpha = 0{,}637$, ferner $\frac{F}{F_1} = \left(\frac{2}{1\frac{1}{2}}\right)^2 = (\frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9}$,

Einfluß der unvollkommenen Contraction.

Fig. 545.



und den Widerſtandscoefficienten

$$\zeta = \left(\frac{16}{9 \,.\, 0{,}637} - 1\right)^2 = \left(\frac{10{,}267}{5{,}733}\right)^2 = 3.207.$$

Die Ausflußgeſchwindigkeit folgt nun

$$v = \frac{4Q}{n d^2} = \frac{4 \,.\, 8}{60 \,.\, n \,(1/6)^2} = \frac{19{,}2}{n}$$
$$= 6{,}112 \text{ Fuß},$$

daher die in Frage ſtehende Druckhöhe

$$h = (1+\zeta)\frac{v^2}{2g} = 4{,}207 \,.\, 0{,}016 \,.\, 6{,}112^2$$
$$= 2{,}51 \text{ Fuß}.$$

Knieröhren.

§. 375. Beſondere Hinderniſſe ſtellen ſich der Bewegung des Waſſers in Röhren entgegen, wenn dieſelben **gekrümmt** ſind oder gar **Kniee** bilden. Dieſe Widerſtände laſſen ſich nicht mit Sicherheit theoretiſch beſtimmen, und mußten daher, wie ſo viele andere Ausflußverhältniſſe auf dem Wege der Erfahrung unterſucht werden.

Bildet eine Röhre *ACB*, Fig. 546, ein **Knie**, ſo trennt ſich der Strahl in Folge der Centrifugalkraft von der innern Fläche des zweiten Röhrenſtückes; es hört, wenn dieſes Stück kurz iſt, der **volle Ausfuß** auf, und es fällt deshalb auch die Ausflußmenge kleiner aus, als bei einer

Fig. 546.

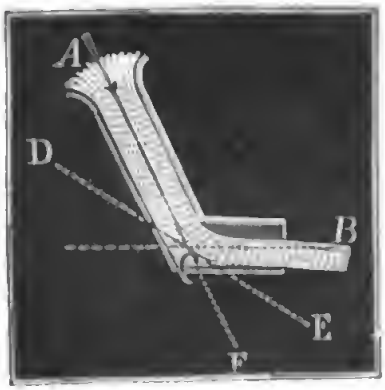


Fig. 57

gleich langen geraden Röhre. Iſt aber das äußere Stück *CB* der Knieröhre *ACB*, Fig. 547, länger, ſo bildet ſich hinter dem Knie *C* ein Wirbel *S*, und es tritt bei wieder gefülltem Querſchnitte eine verminderte Ausflußgeſchwindigkeit *v* ein. Dieſe Verminderung der Ausflußgeſchwindigkeit iſt genau ſo zu beurtheilen, wie der Widerſtand, welchen Verengungen in Röhren bewirken. Iſt *F* der Querſchnitt der Röhre und F_1 der Querſchnitt des contrahirten Strahles bei *S*, ſo hat man den Contractionscoefficienten deſſelben: $\alpha = \frac{F_1}{F}$,

und daher den entſprechenden Widerſtandscoefficienten: Knieröhren.

$$\zeta = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2.$$

Der Contractionscoefficient α und folglich auch der entſprechende Widerſtandscoefficient ζ, hängt von dem Bricol- oder halben Ablenkungswinkel $\delta = ACD = BCE = \frac{1}{2} BCF$, Fig. 546, ab, und es iſt nach den Verſuchen, welche der Verfaſſer in großer Anzahl hierüber angeſtellt hat:

$$\zeta = 0{,}9457 \sin.\delta^2 + 2{,}047 \sin.\delta^4$$

zu ſetzen.

Folgende kleine Tabelle enthält eine Reihe von nach dieſer Formel berechneten Widerſtandscoefficienten für verſchiedene Bricolwinkel:

δ^0	10	20	30	40	45	50	55	60	65	70
ζ	0,046	0,139	0,364	0,740	0,984	1,260	1,556	1,861	2,158	2,431

Man erſieht hieraus, daß durch die Knieröhren der lebendigen Kraft des Waſſers in Röhren bedeutende Verluſte erwachſen. Iſt z. B. das Knie ein rechtwinkeliges, alſo $\delta = 45^0$, ſo hat man hiernach den durch daſſelbe herbeigeführten Druckhöhenverluſt:

$$h = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} = 0{,}984 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

alſo ziemlich gleich der Geſchwindigkeitshöhe.

Stoßen an ein Knie ACB, Fig. 548, noch andere Kniee ohne längere Zwiſchenröhre, wie z. B. aus Fig. 549 und Fig. 550 zu erſehen iſt, ſo

Fig. 548.

Fig. 549

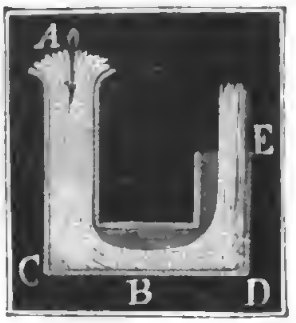
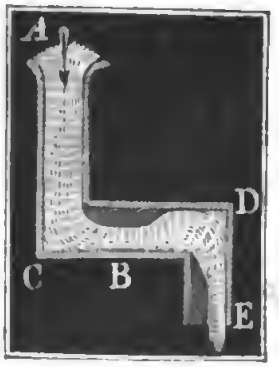


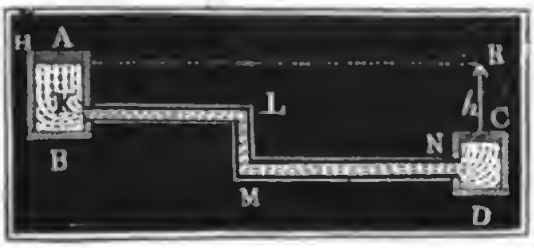
Fig. 550.



treten ganz beſondere, jedoch leicht erklärliche Ausflußverhältniſſe ein. Das zweite Knie BDE, Fig. 549, welches den Strahl nach derſelben Seite hin ablenkt, wie das erſte ACB, bringt keine weitere Contraction

Knieröhren. des Strahles hervor, es iſt daher auch bei vollem Ausfluſſe hier ζ nicht größer als für ein einfaches Knie ACB. Lenkt aber das Knie BDE, Fig. 550, den Strahl auf die entgegengeſetzte Seite, ſo iſt die Contraction eine doppelte, und daher auch der Widerſtandscoefficient doppelt ſo groß als bei einfachem Knie. Wird endlich BDE ſo an ACB geſetzt, daß DE rechtwinkelig auf $ACBD$ zu ſtehen kommt, ſo ſtellt ſich ζ ohngefähr $1^1/_2$ mal ſo groß aus als bei dem Knie ABC allein.

Fig. 551.



Beiſpiel. Wenn eine Röhrenleitung BLN, Fig. 551, von 150 Fuß Länge und 5 Zoll Weite, welche in der Minute 25 Cubikfuß Waſſer liefern ſoll, zwei rechtwinkelige Knie enthält, ſo hat man die nöthige Druckhöhe

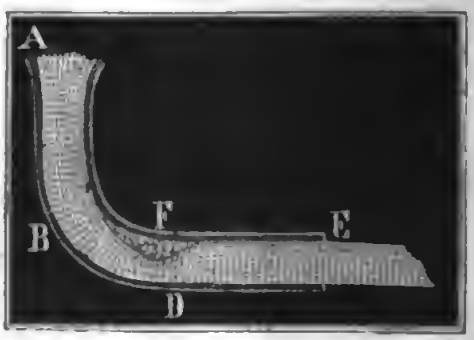
$$h=(1{,}505+8{,}712+2\cdot 0{,}984)\cdot\frac{v^2}{2g}$$
$$= 12{,}185\cdot 0{,}1494 = 1{,}82 \text{ Fuß}.$$

(Vergl. Beiſpiel 1 zu §. 367.)

Kropfröhren. §. 376. Gekrümmte Röhren geben unter übrigens gleichen Verhältniſſen viel kleinere Widerſtände als unabgerundete Knieröhren. Auch ſie veranlaſſen in Folge der Centrifugalkraft des Waſſers eine partielle Contraction des Waſſerſtrahles ABD, Fig. 552, ſo daß, wenn ſich an die krumme Röhre keine längere gerade Röhre anſchließt, der Querſchnitt F_1 des Strahles bei ſeinem Austritte kleiner iſt als der Querſchnitt F der Röhre.

Fig. 552.

Fig. 553.



Endigt ſich aber der Kropf ABD, Fig. 553, in einer längeren geraden Röhre BE, ſo bildet ſich wieder ein Wirbel S und es findet auf Unkoſten der lebendigen Kraft des Waſſers wieder ein voller Ausfluß des Waſſers ſtatt. Iſt der Contractionscoefficient $\frac{F_1}{F}=\alpha$, ſo haben wir auch den Coefficienten des Krümmungswiderſtandes $\zeta=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2$.

Der Contractionscoefficient α hängt von dem Verhältniſſe $\frac{a}{r}$ der halben Röhrenweite $BM = EM = a$, und dem Krümmungshalbmeſſer $CM = r$ der Röhrenaxe ab und läßt ſich annähernd auf folgende Weiſe theoretiſch beſtimmen. Iſt v die Geſchwindigkeit des Waſſers beim Eintritt in den Kropf und v_1 die des zuſammengezogenen Waſſerſtrahles, ſo hat man $v_1 F_1 = v F$, daher $v_1 = \frac{F}{F_1} v$, und demnach die den Druck in BE meſſende Druckhöhe $h = \frac{v_1^2 - v^2}{2g} = \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g}$. Dieſe Höhe mit 1 und γ multiplicirt, ergiebt ſich der Druck des Waſſerſtrahles bei E auf die Flächeneinheit nach allen Richtungen hin:

$$p = h\gamma = \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g} \gamma = \left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g} \gamma.$$

Da nun die Centrifugalkraft des Waſſers an der converen Seite dem Drucke p entgegenwirkt, ſo iſt es möglich, daß ſie denſelben hier ganz aufheben kann. In dieſem Falle wird aber auch die äußere Luft eindringen und ſich der Strahl ganz von der converen Seite losziehen, wie aus den Figuren 554 und 555 zu erſehen iſt. Die Centrifugalkraft eines Waſſer-

Fig. 554.

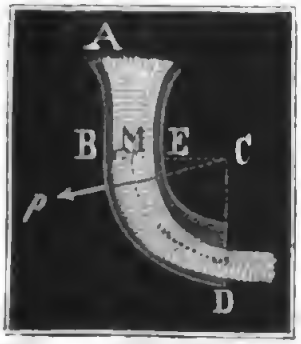
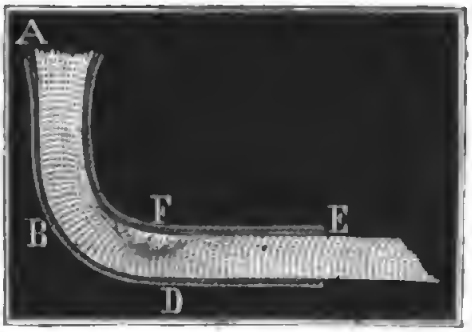


Fig. 555.



prismas von der Länge $BE = 2a$ und dem Querſchnitte 1 iſt bei dem Krümmungshalbmeſſer $CM = r$, $q = \frac{v^2}{gr} \cdot 2a\gamma$, ſetzt man daher $p = q$, ſo folgt die Bedingung des Losreißens: $\frac{1}{\alpha^2} - 1 = \frac{4a}{r}$, daher der Contractionscoefficient $\alpha = \sqrt{\frac{r}{r+4a}}$, und der Widerſtandscoefficient bei vollem Ausfluſſe:

$$\zeta = \left(\sqrt{\frac{r+4a}{r}} - 1\right)^2.$$

Kropfröhren. Da bei dieſer Entwicklung nur eine mittlere Geſchwindigkeit und ein mittlerer Krümmungshalbmeſſer zu Grunde gelegt wurde, ſo kann ſie natürlich auch nur auf eine annähernde Beſtimmung von α und ζ führen.

Aus den Verſuchen des Verfaſſers und aus einigen Beobachtungsreſultaten Du Buats hat aber der Verfaſſer für den Widerſtandscoefficienten beim Durchgange des Waſſers durch Kröpfe folgende empiriſche Formeln abgeleitet:

1) für Kröpfe mit kreisförmigem Querſchnitte:

$$\zeta = 0{,}131 + 1{,}847 \left(\frac{a}{r}\right)^{7/2};$$

2) für Kropfröhren mit rectangulären Querſchnitten:

$$\zeta = 0{,}124 + 3{,}104 \left(\frac{a}{r}\right)^{7/2}.$$

Nach dieſen Formeln ſind folgende Tabellen berechnet worden:

Tabelle I.

Coefficienten des Krümmungswiderſtandes bei Röhren mit kreisförmigen Querſchnitten.

$\frac{a}{r}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ζ	0,131	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440	0,661	0,977	1,408	1,978

Tabelle II.

Coefficienten des Krümmungswiderſtandes bei Röhren mit rectangulären Querſchnitten.

$\frac{a}{r}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ζ	0,124	0,135	0,180	0,250	0,398	0,643	1,015	1,546	2,271	3,228

Hiernach ſieht man, daß bei einer runden Röhre, deren Krümmungshalbmeſſer 2mal ſo groß iſt, als der Röhrenhalbmeſſer, der Widerſtandscoefficient $= 0{,}294$, und bei einer Röhre, deren Krümmungshalbmeſſer mindeſtens 10mal ſo groß iſt, als der Halbmeſſer des Querſchnittes, dieſer Coefficient $= 0{,}131$ ausfällt.

Um die Contraction des Waſſers in einer krummen Röhre *ABD*, Fig. 556 a. f. S., zu verhindern, iſt der Querſchnitt der Röhre allmälig

ſo zu verengern, daß der Querſchnitt $DH = F_1$ der Ausmündung zum Querſchnitte $BE = F$ der Einmündung im Verhältniſſe $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\zeta + 1}}$ zu ſtehen kommt. Kropfröhren.

Stößt an den Kropf BD, Fig. 554, noch ein anderer an, welcher den Strahl nach derſelben Seite noch weiter ablenkt, bildet z. B. die Röhrenaxe einen Halbkreis wie BDE, Fig. 557, ſo ändert ſich die Contraction

Fig. 556.

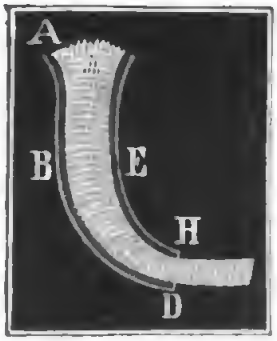


Fig. 557.

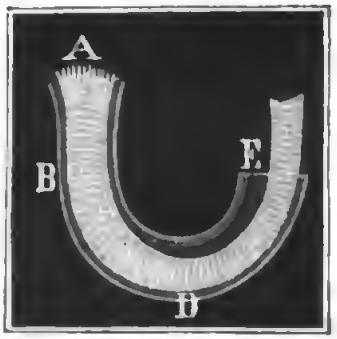
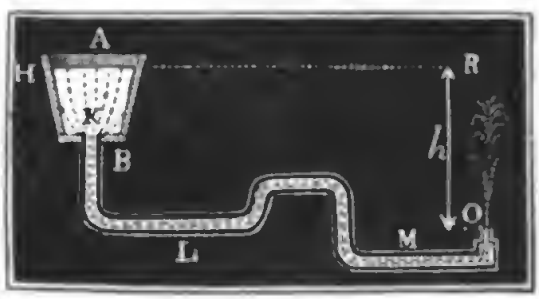


Fig. 558.

nicht, es behält alſo auch α und ζ nahe denſelben Werth wie bei der Röhre in Fig. 554, welche nur einen Quadranten einnimmt; ſchließt ſich dagegen ein Kropf DE, Fig. 558, an, welcher nach der entgegengeſetzten Seite ablenkt, ſo bildet ſich vor dieſem ein Wirbel S und es tritt in demſelben eine zweite Zuſammenziehung des Strahles ein, wodurch der Widerſtand (ζ) nahe verdoppelt wird.

Beiſpiel. Wenn die Röhrenleitung BLM, Fig. 559, im zweiten Beiſpiele des §. 367 noch fünf Kröpfe zu je 90° enthält, und der Krümmungshalbmeſſer eines jeden 2 Zoll beträgt, ſo hat man $\frac{a}{r} = \frac{1}{2}$ und nach der erſten der obigen Tabellen der entſprechende Widerſtandscoefficient $\zeta = 0{,}294$; folglich für alle 5 Kröpfe $5\zeta = 1{,}47$, und daher die Geſchwindigkeit des ausfließenden Waſſers ſtatt

Fig. 559.



$$v = \frac{17{,}678}{\sqrt{7{,}582}} = 6{,}42 \text{ Fuß},$$

$$v = \frac{17{,}678}{\sqrt{7{,}582 + 1{,}47}} = \frac{17{,}678}{\sqrt{9{,}052}} = 5{,}876 \text{ Fuß},$$

und es iſt nun die Ausflußmenge pro Secunde:

$$Q = 0{,}7854 \,.\, \tfrac{1}{36} \,.\, 5{,}876 = 0{,}1282 \text{ Cub.-Fuß} = 221 \text{ Cub.-Zoll}.$$

Schieber, Hähne, Klappen.

§. 377. Um den Ausfluß des Waſſers aus Röhren und Gefäßen zu reguliren, werden Schieber, Hähne, Klappen und Ventile angewendet, wodurch ſich Verengungen erzeugen laſſen, welche dem Durchgange des Waſſers Widerſtände entgegenſetzen, die ſich auf ähnliche Weiſe wie die in den letzten Paragraphen abgehandelten Verluſte beſtimmen laſſen. Da aber hier das Waſſer noch beſondere Richtungsänderungen, Zertheilungen u. ſ. w. erleidet, ſo laſſen ſich die Coefficienten α und ζ nicht unmittelbar beſtimmen, ſondern es war zu deren Ermittelung die Ausführung beſonderer Verſuche nöthig. Dieſe Verſuche ſind aber von dem Verfaſſer ebenfalls angeſtellt worden *), und die Hauptergebniſſe derſelben mögen in folgenden Tabellen mitgetheilt werden.

Tabelle I.

Die Widerſtandscoefficienten für den Durchgang des Waſſers durch Schieber oder Schubventile (franz. tiroirs; engl. slide-valves) im parallelepipediſchen Rohre.

Querſchnittsverhältniß $\frac{F_1}{F}$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
Widerſtandscoefficient ζ	0,00	0,09	0,39	0,95	2,08	4,02	8,12	17,8	44,5	193

Tabelle II.

Die Widerſtandscoefficienten für den Durchgang des Waſſers durch Schieber im cylindriſchen Rohre.

Stellhöhe s	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$
Querſchnittsverhältniß	1,000	0,948	0,856	0,740	0,609	0,466	0,315	0,159
Widerſtandscoefficient ζ	0,00	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8

*) Verſuche über den Ausfluß des Waſſers durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile, angeſtellt und berechnet von Jul. Weisbach, oder unter dem Titel »Unterſuchungen im Gebiete der Mechanik und Hydraulik« u. ſ. w. Leipzig 1842.

Tabelle III.

Die Widerſtandscoefficienten für den Durchgang des Waſſers durch einen Hahn (franz. robinet; engl. cock) im parallelepipediſchen Rohre.

Stellwinkel.	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	66¾
Querſchnittsverhältniß.	0,926	0,849	0,769	0,687	0,604	0,520	0,436	0,352	0,269	0,188	0,110	0
Widerſtandscoefficient.	0,05	0,31	0,88	1,84	3,45	6,15	11,2	20,7	41,0	95,3	275	∞

Tabelle IV.

Die Widerſtandscoefficienten für den Durchgang des Waſſers durch einen Hahn im cylindriſchen Rohre.

Stellwinkel.	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
Querſchnittsverhältniß.	0,926	0,850	0,772	0,692	0,613	0,535	0,458
Widerſtandscoefficient.	0,05	0,29	0,75	1,56	3,10	5,47	9,68

Stellwinkel.	40°	45°	50°	55°	60°	65°	82½°
Querſchnittsverhältniß.	0,385	0,315	0,250	0,190	0,137	0,091	0
Widerſtandscoefficient.	17,3	31,2	52,6	106	206	486	∞

Tabelle V.

Schieber, Hähne, Klappen.

Die Widerſtandscoefficienten für den Durchgang des Waſſers durch Drehklappen oder Droſſelventile (franz. valves; engl. throttle-valves) im parallelepipediſchen Rohre.

Stellwinkel.	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
Querſchnittsverhältniß.	0,913	0,826	0,741	0,658	0,577	0,500	0,426
Widerſtandscoefficient.	0,28	0,45	0,77	1,34	2,16	3,54	5,72

Stellwinkel.	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	90°
Querſchnittsverhältniß.	0.357	0,293	0.234	0,181	0,134	0,094	0.060	0
Widerſtandscoefficient.	9,27	15,07	24,9	42,7	77,4	158	368	∞

Tabelle VI.

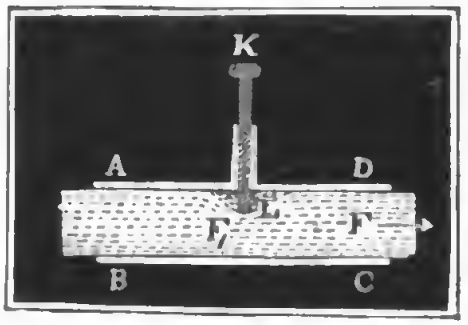
Die Widerſtandscoefficienten für den Durchgang des Waſſers durch Drehklappen im cylindriſchen Rohre.

Stellwinkel.	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
Querſchnittsverhältniß.	0,913	0,826	0,741	0,658	0,577	0,500	0,426
Widerſtandscoefficient.	0,24	0,52	0,90	1,54	2,51	3,91	6,22

Stellwinkel.	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	90°
Querſchnittsverhältniß.	0,357	0,293	0.234	0,181	0,134	0,094	0,060	0
Widerſtandscoefficient.	10,8	18,7	32,6	58,8	118	256	751	∞

§. 378. Mit Hülfe der in den vorſtehenden Tabellen aufgeführten Widerſtandscoefficienten kann man nicht nur den einer gewiſſen Schieber-, Hahn- oder Klappenſtellung entſprechenden Druckhöhenverluſt angeben, ſondern auch beſtimmen, welche Stellung dieſen Apparaten zu geben iſt, damit die Ausflußgeſchwindigkeit oder der Widerſtand ein gewiſſer werde. Schieber, Hähne, Klappen.

Fig. 560.



Allerdings wird aber eine ſolche Beſtimmung um ſo ſicherer, je mehr dieſe regulirenden Vorrichtungen den bei den Verſuchen angewendeten gleichen. Uebrigens gelten die in den Tabellen angegebenen Zahlenwerthe nur für den Fall, wenn das Waſſer nach dem Durchgange durch die mittels dieſer Apparate hervorgebrachten Verengungen das Rohr wieder ausfüllt. Damit dieſer volle Ausfluß bei kleinen Verengungen noch eintrete, muß das Rohr eine beträchtliche Länge haben. Die Querſchnitte der parallelepipediſchen Röhren waren 5 Centim. breit und $2\frac{1}{2}$ Cent. hoch, die Querſchnitte von den cylindriſchen Röhren hatten aber eine Weite von 4 Centimetern. Bei dem Schieber, Fig. 560, entſteht eine einfache Verengung, deren Querſchnitt bei dem einen Rohre ein bloßes Rechteck F_1, F. 561, bei dem zweiten aber ein Mondchen F_1, Fig. 562, bildet. Bei den Hähnen, Fig. 563, ſtellen ſich zwei Verengungen und auch zwei Richtungsabänderungen heraus, deshalb ſind auch die Widerſtände ſehr groß. Die Querſchnitte der größten Verengungen haben ganz eigenthümliche Geſtalten. Bei den Drehklappen, Fig. 564, theilt ſich der Strom in zwei Theile, wovon jeder durch eine Verengung hindurchgeht. Die Querſchnitte dieſer Verengungen ſind bei der Drehklappe im parallelepipediſchen Rohre rectangulär und im cylindriſchen mondförmig. — Zur Anwendung der oben mitgetheilten Tabellen wird durch folgende Beiſpiele hinreichende Anleitung gegeben werden.

Fig. 561.

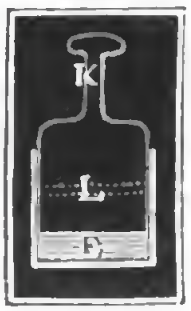


Fig. 562.

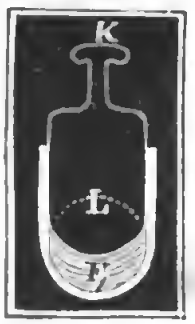


Fig. 563.

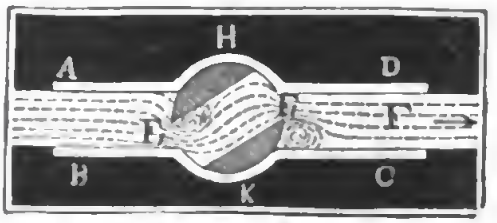
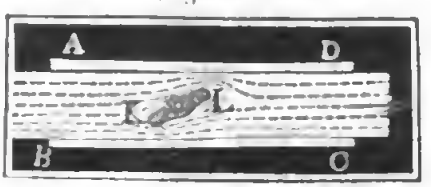


Fig. 564.



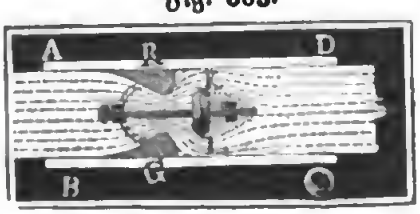
Schieber, Hähne, Klappen.

Beiſpiele. 1) Wenn in einer cylindriſchen Röhrenleitung von 3 Zoll Weite und 500 Fuß Länge ein Schubventil angebracht iſt, und dieſes $^3/_4$ der ganzen Höhe gezogen wird, alſo $^1/_4$ derſelben verſchließt, welche Waſſermenge liefert dieſelbe unter einem Drucke von 4 Fuß? Der Widerſtandscoefficient ζ für den Eintritt in die Röhre läßt ſich nach dem Früheren 0,505, und der Widerſtandscoefficient ζ_1 für den Schieber nach Tabelle II., $= 5{,}52$ ſetzen, es folgt daher für die Ausflußgeſchwindigkeit $v = \frac{7{,}906 \cdot \sqrt{4}}{\sqrt{1{,}505 + 5{,}52 + \zeta_2 \frac{l}{d}}} = \frac{7{,}906 \cdot 2}{\sqrt{7{,}025 + 500 \cdot 4\zeta_2}}$

$= \frac{15{,}812}{\sqrt{7{,}025 + 2000\,\zeta_2}}$. Setzen wir den Reibungscoefficienten $\zeta_2 = 0{,}025$, ſo erhalten wir $v = \frac{15{,}812}{\sqrt{57{,}025}} = 2{,}09$ Fuß. Nun entſpricht aber der Geſchwindigkeit $v = 2{,}1$ Fuß genauer $\zeta_2 = 0{,}026$, daher iſt richtiger $v = \frac{15{,}812}{\sqrt{59{,}025}}$ $= 2{,}06$ Fuß und die Ausflußmenge pro Secunde $= \frac{\pi}{4} . 9 . 12 . 2{,}06 = 55{,}62 . \pi$ $= 175$ Cubikzoll. 2) Eine Röhrenleitung von 4 Zoll Weite liefert bei einer Druckhöhe von 5 Fuß in der Minute 10 Cubikfuß Waſſer, welche Stellung hat man dem angebrachten Droſſelventile zu geben, damit ſie nachher nur 8 Cubikfuß liefert? Die Geſchwindigkeit iſt anfangs $= \frac{10 . 4}{60 . \pi (^1/_3)^2} = \frac{6}{\pi} = 1{,}91$ Fuß, und nach der Klappenſtellung $^9/_{10} . 1{,}91 = 1{,}528$ Fuß. Der Ausflußcoefficient für den erſten Fall des Ausfluſſes iſt $\frac{v}{\sqrt{2gh}} = \frac{1{,}91}{7{,}906\sqrt{5}} = 0{,}108$, daher der Widerſtandscoefficient $= \frac{1}{\mu^2} - 1 = \frac{1}{0{,}108^2} - 1 = 84{,}7$; der Ausflußcoefficient für den zweiten Fall iſt $= {}^9/_{10} . 0{,}108 = 0{,}0864$, daher der Widerſtandscoefficient $= \frac{1}{0{,}0864^2} - 1 = 133{,}0$, und demnach der Coefficient für den vom Droſſelventile zu erzeugenden Widerſtand: $\zeta = 133{,}0 - 84{,}7 = 48{,}3$. Nun giebt aber nach Tabelle VI. der Stellwinkel $\alpha = 50°$, $\zeta = 32{,}6$ und der Stellwinkel $\delta = 55°$, $\zeta = 58{,}8$; es läßt ſich daher annehmen, daß bei einer Stellung von $50° + \frac{15{,}7}{26{,}2} . 5° = 53°$ das gewünſchte Ausflußquantum erhalten werde. Berückſichtigt man noch, daß bei dem Geſchwindigkeitswechſel von 1,91 Fuß auf 1,528 Fuß der Reibungscoefficient von 0,0266 in 0,0281 übergeht, ſo iſt noch genauer $\zeta = 133{,}0 - 84{,}7 . \frac{281}{266} = 133{,}0 - 89{,}5$ $= 43{,}5$, und ſonach der Stellwinkel $= 50° + \frac{10{,}9}{26{,}2} . 5° = 52°$.

Ventile.

Fig. 565.



§. 379. Von beſonderer Wichtigkeit iſt die Kenntniß der durch **Ventile** (franz. soupapes; engl. valves) hervorgebrachten Widerſtände. Auch über dieſe ſind vom Verfaſſer Verſuche angeſtellt wor-

Fig. 566.

den. Am häufigſten kommen die ſogenannten Kegel- und nächſtdem die Klappenventile, wie in den Figuren 565 (vorig. S.) und 566 abgebildet ſind, zur Anwendung. Bei beiden geht das Waſſer durch die von einem Ringe *RG* gebildete Apertur; das Kegelventil *KL* hat einen Stiel, womit es in einer Führung liegt, die ihm nur einen Ausſchub in der Axenrichtung geſtattet; das Klappenventil *KL* oder die Ventilklappe hingegen öffnet ſich drehend wie eine Thüre. Man ſieht leicht ein, daß bei beiden Apparaten dem Waſſer nicht nur durch den Ventilring, ſondern auch durch die Ventilplatte ein Hinderniß entgegengeſetzt wird. Ventile.

Bei dem Kegelventile, womit die Verſuche angeſtellt wurden, war das Verhältniß zwiſchen der Apertur im Ventilringe zum Querſchnitte der ganzen Röhre: 0,356, und dagegen das Verhältniß zwiſchen der Ringfläche um das geöffnete Ventil herum zu dem Röhrenquerſchnitte = 0,406; es läßt ſich daher im Mittel $\frac{F_1}{F} = 0{,}381$ ſetzen. Indem man den Ausfluß bei verſchiedenen Ventilſtellungen beobachtete, ergab ſich, daß der Widerſtandscoefficient zwar abnahm, wenn der Ventilſchub größer wurde, daß aber dieſe Abnahme ſchon höchſt unbedeutend ausfiel, wenn der Ventilſchub die halbe Weite der Apertur übertraf. Seine Größe war für dieſen Stand = 11, alſo die Widerſtandshöhe oder der Druckhöhenverluſt $= 11 \cdot \frac{v^2}{2g}$, wenn v die Geſchwindigkeit des Waſſers in der vollen Röhre bezeichnet. Dieſe Zahl kann man auch benutzen, um die anderen Querſchnittsverhältniſſen entſprechenden Widerſtandscoefficienten zu beſtimmen. Setzen wir allgemein $\zeta = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2$, ſo erhalten wir für den beobachteten Fall $\frac{F_1}{F} = 0{,}381$, $\zeta = 11$, und $11 = \left(\frac{1}{0{,}381\,\alpha} - 1\right)^2$, daher $\alpha = \frac{1}{0{,}381\,(1+\sqrt{11})} = \frac{1}{4{,}317 \cdot 0{,}381} = 0{,}608$ und endlich allgemein $\zeta = \left(\frac{F}{0{,}608\,F_1} - 1\right)^2 = \left(1{,}645 \cdot \frac{F}{F_1} - 1\right)^2$. Iſt z. B. der Querſchnitt der Apertur die Hälfte von dem der Röhre, ſo fällt hiernach der Widerſtandscoefficient $= (1{,}645 \cdot 2 - 1)^2 = 2{,}29^2 = 5{,}24$ aus.

Bei dem Klappenventile war das Querſchnittsverhältniß zwiſchen der Apertur und der Röhre, d. i. $\frac{F_1}{F}$, = 0,535, wie aber die Widerſtands-

Ventile. coefficienten mit der Größe der Eröffnung abnehmen, führt folgende Tabelle vor Augen.

Tabelle der Widerſtandscoefficienten für die Ventilklappe.

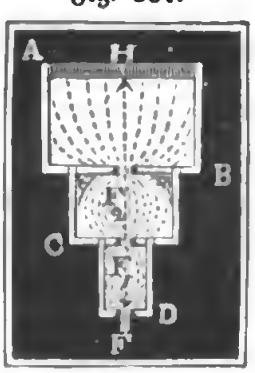
Oeffnungswinkel.	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
Widerſtandscoefficient.	90	62	42	30	20	14	9,5	6,6	4,6	3,2	2,3	1,7

Mit Hülfe dieſer Tabelle laſſen ſich die Widerſtandscoefficienten für Klappen auch dann noch annähernd berechnen, wenn das Querſchnittsverhältniß ein anderes ſein ſollte. Es iſt derſelbe Weg zu betreten, welchen man bei den Kegelventilen verfolgt hat.

Beiſpiel. Eine Druckpumpe liefert bei jedem Niedergange des Kolbens in 4 Secunden 5 Cubikfuß Waſſer, die Weite des Steigrohres, worin das kegelförmige Steigventil ſitzt, beträgt 6 Zoll, die Apertur des Ventilringes $3\frac{1}{2}$ Zoll und der größte Ventildurchmeſſer $4\frac{1}{2}$ Zoll, welchen Widerſtand hat das Waſſer beim Durchgang durch das Ventil zu überwinden? Das Querſchnittsverhältniß für die Apertur iſt $\left(\frac{3,5}{6}\right)^2 = (\frac{7}{12})^2 = 0,34$ und das Verhältniß der ringförmigen Verengung zum Querſchnitte des Rohres iſt $= 1 - \left(\frac{4,5}{6}\right)^2 = 1 - (\frac{3}{4})^2 = 0,44$, daher das mittlere Querſchnittsverhältniß $= \frac{0,34 + 0,44}{2} = 0,39$ und der entſprechende Widerſtandscoefficient $= \left(\frac{1,645}{0,39} - 1\right)^2 = 3,22^2 = 10,4$. Die Geſchwindigkeit des Waſſers iſt $v = \frac{5}{4 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (\frac{1}{2})^2} = \frac{20}{\pi} = 6,37$ Fuß, die Geſchwindigkeitshöhe $= 0,649$ Fuß, und folglich die Widerſtandshöhe $= 10,4 \cdot 0,649 = 6,75$ Fuß. Die in der Secunde gehobene Waſſermenge wiegt $\frac{5}{4} \cdot 66 = 82,5$ Pfd.; daher iſt die mechaniſche Arbeit, welche der Durchgang des Waſſers durch das Ventil in eben dieſer Zeit conſumirt $= 6,75 \cdot 82,5 = 557$ Fußpf.

Zuſammengeſetzte Gefäße.

Fig. 567.



§. 380. Die vorſtehenden Lehren über den Widerſtand des Waſſers beim Durchgang deſſelben durch Verengungen finden ihre Anwendung auch noch bei dem Ausfluſſe durch zuſammengeſetzte Gefäße. Der in Fig. 567 abgebildete Apparat AD iſt durch zwei, die Mündungen F_1 und F_2 enthaltende Scheidewände abgetheilt und bildet deshalb drei communicirende Gefäße. Wären die Scheidewände nicht vorhanden und die Kanten bei den Uebergängen aus einem Gefäße in das andere abgerundet, ſo hätte man, wie bei

einem einfachen Gefäße, die Ausflußgeſchwindigkeit durch F:

Zuſammengeſetzte Gefäße.

$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\zeta}}$, inſofern h die Tiefe FH unter dem Waſſerſpiegel und ζ den Widerſtandscoefficienten für den Durchgang durch die Ausflußöffnung F bezeichnen.

Da aber nach dem Durchgange des Waſſers durch die Mündungen F_1 und F_2 die Querſchnitte αF_1 und αF_2 plötzlich in die Querſchnitte G und G_1 der Gefäße CD und BC übergehen, und nach §. 373 die daraus erwachſenden Widerſtände

$$\zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = \left(\frac{G}{\alpha F_1} - 1\right)^2 \left(\frac{\alpha F}{G}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{F}{F_1} - \frac{\alpha F}{G}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ und}$$

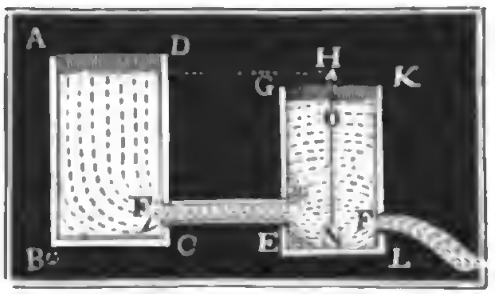
$$\zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} = \left(\frac{G_1}{\alpha F_2} - 1\right)^2 \left(\frac{\alpha F}{G_1}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{F}{F_2} - \frac{\alpha F}{G_1}\right)^2 \frac{v^2}{2g}$$

betragen, ſo hat man

$$(1+\zeta)\frac{v^2}{2g} + \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} = \left[1 + \zeta + \left(\frac{F}{F_1} - \frac{\alpha F}{G}\right)^2 + \left(\frac{F}{F_2} - \frac{\alpha F}{G_1}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}$$

und daher $v = \dfrac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\zeta+\left(\frac{F}{F_1} - \frac{\alpha F}{G}\right)^2 + \left(\frac{F}{F_2} - \frac{\alpha F}{G_1}\right)^2}}$ zu ſetzen.

Fig. 568.



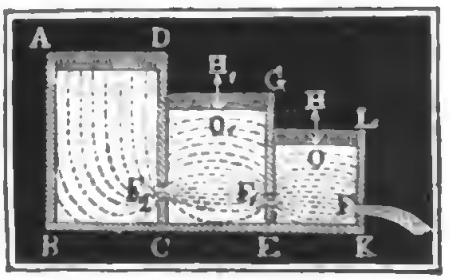
Bei dem zuſammengeſetzten Ausflußapparate, welchen Fig. 568 repräſentirt, findet ganz daſſelbe Verhältniß ſtatt, nur iſt vielleicht noch die Reibung des Waſſers in dem Communicationsrohre CE zu berückſichtigen. Iſt l die Länge und d die Weite dieſes Rohres, ζ_1 aber der Reibungscoefficient, und v_1 die Geſchwindigkeit des Waſſers in demſelben, ſo hat man die Höhe, welche das Waſſer beim Uebergange von AC nach GL verliert: $h_1 = \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta_1 \frac{l}{d}\right]\frac{v_1^2}{2g}$, oder, da die Geſchwindigkeit $v_1 = \frac{\alpha F}{F_1} v$ zu ſetzen iſt,

$h_1 = \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta_1 \frac{l}{d}\right]\left(\frac{\alpha F}{F_1}\right)^2 \frac{v^2}{2g}$. Zieht man nun dieſe Höhe von der ganzen Druckhöhe h ab, ſo bleibt die Druckhöhe im zweiten Gefäße $h_2 = h - h_1$ und daher die Ausflußgeſchwindigkeit

Zuſammengeſetzte Gefäße

$$v = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{1+\zeta}} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\zeta+\left[1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2+\zeta_1\frac{l}{d}\right]\left(\frac{\alpha F}{F_1}\right)^2}}.$$

Fig. 569.



Dieſe Beſtimmung wird bei dem Apparate, welchen Fig. 569 repräſentirt, ſehr einfach, weil man die Querſchnitte G, G_1 G_2 der Gefäße unendlich groß ſetzen kann in Anſehung der Mündungsquerſchnitte F, F_1, F_2. Es iſt daher die erſte Niveaudifferenz OH oder Widerſtandshöhe für den Durchgang durch F_1, $h_1 = \frac{1}{2g}\left(\frac{v_1}{\alpha_1}\right)^2 = \left(\frac{\alpha F}{\alpha_1 F_1}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g}$, und ebenſo die zweite Niveaudifferenz O_1H_1 oder die Widerſtandshöhe für den Durchgang durch F_2, $h_2 = \left(\frac{\alpha F}{\alpha_2 F_2}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g}$, wofern nur α, α_1 und α_2 die Contractionscoefficienten für die Mündungen F, F_1 und F_2 bezeichnen.

Hiernach folgt $v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha F}{\alpha_1 F_1}\right)^2+\left(\frac{\alpha F}{\alpha_2 F_2}\right)^2}}$ und das Ausflußquantum

$$Q = \frac{\alpha F\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha F}{\alpha_1 F_1}\right)^2+\left(\frac{\alpha F}{\alpha_2 F_2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha F}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha_1 F_1}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha_2 F_2}\right)^2}}.$$

Es iſt leicht zu ermeſſen, daß zuſammengeſetzte Ausflußbehälter weniger Waſſer liefern, als einfache unter übrigens gleichen Verhältniſſen.

Beiſpiel. Wenn bei dem Apparate in Fig. 568 die totale Druckhöhe oder die Tiefe des Mittelpunktes der Mündung F unter dem Waſſerſpiegel des erſten Gefäßes $= 6$ Fuß beträgt, die Mündung 8 Zoll breit und 4 Zoll hoch, der die beiden Reſervoirs verbindende Lutten aber 10 Fuß lang, 12 Zoll breit und 6 Zoll hoch iſt, welches Ausflußquantum wird dieſes Reſervoir geben? Die mittlere Weite des Lutten iſt $= \frac{4 \cdot 1 \cdot 0.5}{2 \cdot 1{,}5} = \frac{2}{3}$ Fuß, daher $\frac{l}{d} = \frac{3 \cdot 10}{2} = 15$, ſetzen wir nun noch den Reibungscoefficienten $\zeta_1 = 0{,}025$, ſo folgt $\zeta_1 \cdot \frac{l}{d} = 0{,}025 \cdot 15 = 0{,}375$; hierzu den Widerſtandscoefficienten 0,505 für den Eintritt in prismatiſche Röhren geſetzt, erhält man $1 + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2 + \zeta_1\frac{l}{d} = 1+0{,}505+0{,}375$

$= 1{,}88$. Da $\frac{\alpha F}{F_1} = \frac{0{,}64 \cdot 8 \cdot 4}{12 \cdot 6} = 0{,}2845$, ſo folgt der Widerſtandscoefficient für den ganzen Lutten $= 1{,}88 \cdot 0{,}2845^2 = 0{,}152$, und den Widerſtandscoefficient für den Durchgang durch F, $= 0{,}07$ geſetzt, erhält man die Ausflußgeſchwindigkeit $v = \frac{7{,}906\sqrt{6}}{\sqrt{1{,}07 + 0{,}152}} = \frac{7{,}906\sqrt{6}}{\sqrt{1{,}222}} = 17{,}52$ Fuß. Der contrahirte Querſchnitt iſt $0{,}64 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}32$ Quadratfuß, daher das Ausflußquantum $Q = 0{,}32 \cdot 17{,}52 = 5{,}61$ Cubikfuß. Zuſammengeſetzte Gefäße.

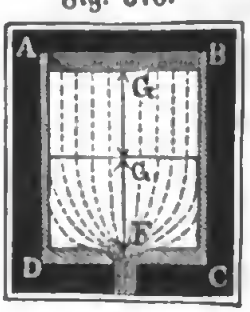
Fünftes Kapitel.

Von dem Ausfluſſe des Waſſers unter veränderlichem Drucke.

§. 381. Erhält ein Gefäß, aus welchem das Waſſer durch eine Seiten- oder Bodenöffnung ausfließt, von einer anderen Seite her keinen Zufluß, ſo tritt ein allmäliges Sinken des Waſſerſpiegels und endlich Ausleerung des Gefäßes ein. Wenn ferner die Zuflußmenge Q größer oder kleiner iſt, als das Ausflußquantum $\mu F\sqrt{2gh}$, ſo ſteigt oder ſinkt der Waſſerſpiegel, bis die Druckhöhe $h = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{\mu F}\right)^2$ wird, und nach dieſem bleiben Druckhöhe und Ausflußgeſchwindigkeit unveränderlich. Unſere Aufgabe iſt nun, zu ermitteln, in welcher Abhängigkeit die Zeit, das Steigen und Sinken des Waſſers und das Sichleeren von Gefäßen bei gegebener Form und Größe zu einander ſtehen. Prismatiſche Gefäße.

Den einfachſten Fall bietet der Ausfluß aus einem prismatiſchen Gefäße dar, wenn derſelbe durch eine Oeffnung im Boden erfolgt, und wenn dabei kein Zufluß von oben ſtatt hat. Iſt x die veränderliche Druckhöhe FG_1, F der Inhalt der Mündung und G der Querſchnitt des Gefäßes AC, Fig. 570, ſo hat man die theoretiſche Ausflußgeſchwindigkeit $v = \sqrt{2gx}$, die theoretiſche Geſchwindigkeit des ſinkenden Waſſerſpiegels $= \frac{F}{G}v = \frac{F}{G}\sqrt{2gx}$, und die effective $v_1 = \frac{\mu F}{G}\sqrt{2gx}$. Anfänglich iſt $x = FG = h$, und am Ende des Ausfluſſes $x = 0$, alſo die Anfangsgeſchwindigkeit iſt $c = \frac{\mu F}{G}\sqrt{2gh}$ und die Endgeſchwindigkeit $c_1 = 0$. Man erſieht aus

Fig. 570.



Prismatiſche Gefäße.

der Formel $v_1 = \sqrt{2\left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 gx}$, daß die Bewegung des Waſſerſpiegels gleichförmig verzögert und daß das Verzögerungsmaaß $p = \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 g$ iſt; wir wiſſen daher auch (§. 14.), daß dieſe Geſchwindigkeit = Null wird und mithin der Ausfluß beendigt iſt, nach der Zeit

$$t = \frac{v_1}{p} = \frac{\mu F}{G}\sqrt{2gh} : \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 g = \frac{G}{\mu F}\sqrt{\frac{2gh}{g^2}}, \text{ d. i. } t = \frac{2G\sqrt{h}}{\mu F\sqrt{2g}}$$

Auch kann man $t = \frac{2Gh}{\mu F\sqrt{2gh}} = \frac{2Gh}{Q}$ ſetzen, und dieſemnach annehmen, daß zum Ausfluſſe der Waſſermenge Gh durch die Bodenöffnung F bei einer von h bis 0 abnehmenden Druckhöhe doppelt ſoviel Zeit nothwendig iſt, als bei unveränderlicher Druckhöhe.

Da der Ausflußcoefficient μ nicht ganz conſtant iſt, ſondern bei Abnahme des Druckes größer wird, ſo muß man bei Berechnungen dieſer Art einen mittleren Werth dieſes Coefficienten einführen.

Beiſpiel. In welcher Zeit leert ſich ein parallelepipediſcher Kaſten von 14 Quadratfuß Querſchnitt durch eine runde Bodenöffnung von 2 Zoll Weite, wenn die anfängliche Druckhöhe 4 Fuß beträgt? Theoretiſch wäre die Ausflußzeit $t = \frac{2 \,.\, 14\sqrt{4}}{7{,}906 \,.\, \frac{\pi}{4}\cdot(\frac{1}{6})^2} = \frac{2\,.\,14\,.\,144\,.\,2}{7{,}906\,.\,\pi} = \frac{8064}{7{,}906\,.\,\pi} = 324'',7 = 5\text{M}.24{,}7\text{Sec}.$

Am Ende der halben Ausflußzeit iſt die Druckhöhe $= (\frac{1}{6})^2 . h = \frac{1}{4} . 4 = 1$ Fuß; nun iſt der Ausflußcoefficient, welcher der Druckhöhe = 1 Fuß entſpricht, für eine Mündung in der dünnen Wand = 0,613, daher läßt ſich die effective Ausflußzeit $= \frac{324'',7}{0{,}613}$ = 529″,6 = 8 Minuten 49,6 Secunden ſetzen.

Communicirende Gefäße.

§. 382. Da bei einer anfänglichen Druckhöhe h_1 die Ausflußzeit $t_1 = \frac{2G\sqrt{h_1}}{\mu F\sqrt{2g}}$ und bei einer anfänglichen Druckhöhe h_2 dieſe Zeit $t_2 = \frac{2G\sqrt{h_2}}{\mu F\,.\sqrt{2g}}$ iſt, ſo folgt durch Subtraction die Zeit, innerhalb welcher die Druckhöhe aus h_1 in h_2 übergeht, oder der Waſſerſpiegel um $h_1 - h_2$ ſinkt:

$$t = \frac{2G}{\mu F\,.\,\sqrt{2g}}(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}), \text{ oder für Fußmaaß:}$$

$$t = 0{,}253\,\frac{G}{\mu F}(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}).$$

Umgekehrt iſt die einer gegebenen Ausflußzeit entſprechende Senkung $s = h_1 - h_2$ des Waſſerſpiegels gegeben durch die Formel:

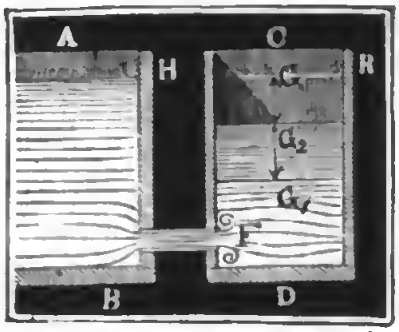
Communicirende Gefäße.

$$h_2 = \left(\sqrt{h_1} - \frac{\mu\sqrt{2g}\,.\,F}{2G}\,t\right)^2, \text{ oder}$$

$$s = \frac{\mu\sqrt{2g}\,.\,Ft}{G}\left(\sqrt{h_1} + \frac{\mu\sqrt{2g}}{4G}\,.\,Ft\right).$$

Dieselben Formeln finden auch dann noch ihre Anwendung, wenn ein Gefäß CD, Fig. 571, durch ein anderes Gefäß AB, in welchem das Wasser einen unveränderlichen Stand hat, gefüllt wird. Ist der Querschnitt der Communicationsröhre oder der Mündung $= F$, der Querschnitt des zu füllenden Gefäßes $= G$, und der anfängliche Niveauabstand GG_1 beider Wasserspiegel $= h$, so hat man, da hier der Wasserspiegel G_1 im zweiten Gefäße gleichförmig verzögert steigt, ebenfalls die Zeit zum Füllen oder die Zeit, innerhalb welcher der zweite Wasserspiegel in das Niveau HR des ersten kommt:

Fig. 571.



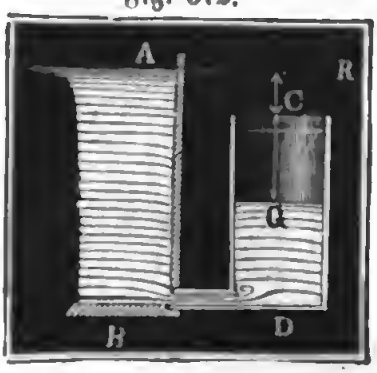
$$t = \frac{2G\sqrt{h}}{\mu F\,.\,\sqrt{2g}},$$

und ebenso die Zeit, in welcher der Niveauabstand h_1 in h_2 übergeht, also der Wasserspiegel um $GG_1 = s = h_1 - h_2$ steigt:

$$t = \frac{2G}{\mu F\,.\,\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}\right).$$

Beispiele. 1) Um wie viel sinkt der Wasserspiegel in dem Gefäße des letzten Beispieles binnen 2 Minuten? Es ist $h_1 = 4$, $t = 2\,.\,60 = 120$, $\frac{F}{G} = \frac{\pi}{14\,.\,144}$, und nimmt man noch $\mu = 0{,}605$, so folgt $h_2 = \left(\sqrt{h_1} - \mu\,.\,\sqrt{2g}\,.\,\frac{Ft}{2G}\right)^2$ $= \left(2 - \frac{0{,}605\,.\,7{,}906\,.\,\pi\,.\,120}{2\,.\,14\,.\,144}\right)^2 = \left(2 - 0{,}605\,.\,7{,}906\,.\,\frac{5\,.\,\pi}{168}\right)^2 = 1{,}5523^2$ $= 2{,}412$ Fuß, und die gesuchte Senkung $s = 4 - 2{,}412 = 1{,}589$ Fuß.

Fig. 572.



2) Welche Zeit braucht das Wasser, um in der 18 Zoll weiten Röhre CD, Fig. 572, überzulaufen, wenn es mit einem Gefäße AB durch eine kurze, $1\frac{1}{2}$ Zoll weite Röhre communicirt, und der steigende Wasserspiegel G anfänglich 6 Fuß unter dem unveränderlichen Wasserspiegel A und $4\frac{1}{2}$ Fuß unter dem Kopfe C der Röhre steht? Es ist in

$$t = \frac{2G}{\mu\sqrt{2g}\,.\,F}\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}\right),$$

$h_1 = 6$, $h_2 = 6 - 4.5 = 1.5$, $\frac{G}{F} = \left(\frac{18}{1{,}5}\right)^2$ $= 144$ und $\mu = 0{,}81$ zu setzen, weshalb folgt

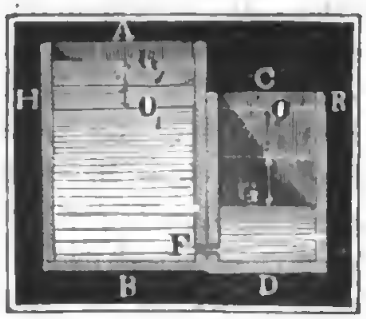
$$t = \frac{2\,.\,144}{0{,}81\,.\,7{,}906}\left(\sqrt{6} - \sqrt{1{,}5}\right) = \frac{288\,.\,1{,}2248}{0{,}81\,.\,7{,}906} = 55{,}1 \text{ Sec.}$$

Digitized by Google

Communicirende Gefäße.

§. 383. Wenn das erſte Gefäß AB, Fig. 573, aus welchem das Waſſer in das andere läuft, keinen Zufluß hat, und ſein Querſchnitt G_1 auch nicht als unendlich groß angeſehen werden kann in Hinſicht auf den Querſchnitt G des folgenden Gefäßes CD, ſo hat man die Beſtimmung zu modificiren. Iſt der veränderliche Abſtand G_1O_1 des erſten Waſſerſpiegels von dem Niveau HR, in welchem beide Waſſerſpiegel bei Beendigung des Ausfluſſes ſtehen, $= x$ und der Abſtand GO des zweiten Waſſerſpiegels von eben dieſer Ebene $= y$, ſo hat man die veränderliche Druckhöhe $= x + y$ und die entſprechende Ausflußgeſchwindigkeit $v = \sqrt{2g(x+y)}$, oder, da das Waſſerquantum $G_1x = Gy$ iſt, $v = \sqrt{2g\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)y}$. Die Geſchwindigkeit, mit welcher der Waſſerſpiegel im zweiten Gefäße ſteigt, iſt nun

Fig. 573.



$v_1 = \frac{\mu F}{G} v = \frac{\mu F}{G}\sqrt{2g\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)y}$, folglich die Retardation $p = \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)g$ und die Ausflußzeit

$$t = \frac{\mu F}{G}\sqrt{2g\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)y} : \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)g$$

$$= \frac{2G\sqrt{y}}{\mu F\sqrt{2g\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)}}.$$

Führen wir ſtatt x und y den anfänglichen Niveauabſtand h ein, ſetzen wir alſo $x + y = h$, oder $\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)y = h$, ſo bekommen wir $y = \frac{h}{1 + \frac{G}{G_1}}$, und die Zeit, binnen welcher die beiden Waſſerſpiegel in ein Niveau kommen:

$$t = \frac{2G\sqrt{h}}{\mu F\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)\sqrt{2g}} = \frac{2GG_1\sqrt{h}}{\mu F(G+G_1)\sqrt{2g}}.$$

Die Zeit, innerhalb welcher der Niveauabſtand von h auf h_1 ſinkt, iſt dagegen:

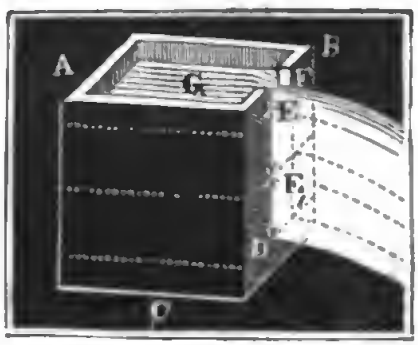
$$t = \frac{2GG_1(\sqrt{h} - \sqrt{h_1})}{\mu\sqrt{2g}\,F\,(G + G_1)}.$$

Beiſpiel. Wenn der Querſchnitt G_1 des Kaſtens, aus welchem das Waſſer zufließt, 10 Quadratfuß und der Querſchnitt G des Kaſtens, welcher das Waſſer aufnimmt, 4 Quadratfuß mißt, wenn ferner der anfängliche Niveauabſtand h der beiden Waſſerſpiegel 3 Fuß beträgt und die cylindriſche Communicationsröhre 1 Zoll Weite hat, ſo iſt die Zeit, in welcher das Waſſer in beiden Gefäßen auf gleiches Niveau kommt: Communicirende Gefäße.

$$t = \frac{2 \,.\, 10 \,.\, 4 \,.\, \sqrt{3}}{0{,}82 \,.\, 7{,}906 \,.\, \frac{\pi}{4} \,.\, \frac{14}{144}} = \frac{320 \,.\, 72 \,.\, \sqrt{3}}{0{,}82 \,.\, 7{,}906 \,.\, 7\,\pi} = 280 \text{ Sec.}$$

§. 384. Fließt das Waſſer durch einen Wandeinſchnitt oder Ueberfall DE aus einem prismatiſchen Gefäße ABC, Fig. 574, welches keinen Zufluß erhält, ſo iſt die Ausflußzeit auf folgende Weiſe zu ermitteln. Bezeichnen wir den Querſchnitt des Gefäßes durch G, die Breite EF des Einſchnittes durch b und die Höhe DE durch h, und theilen wir die ganze Ausflußmündung durch Horizontalen in lauter ſchmale Streifen, jeden von der Breite b und Höhe $\frac{h}{n}$. Bei conſtantem Drucke iſt die Ausflußmenge auf die Secunde bezogen, $Q = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2gh^3}$, dividiren wir dieſe in den Inhalt $\frac{Gh}{n}$ einer Waſſerſchicht, ſo erhalten wir die entſprechende Ausflußzeit $\tau = \frac{Gh}{\frac{2}{3}\mu nb\sqrt{2gh^3}}$, wofür wir $\frac{3Gh}{2\mu nb\sqrt{2g}} \,.\, h^{-\frac{3}{2}}$ ſchreiben wollen. Wandeinſchnitt.

Fig. 574.



Um nun die Ausflußzeit t für ein Waſſerquantum $G\,(h - h_1)$ zu erhalten, oder um die Zeit zu beſtimmen, innerhalb welcher der Waſſerſtand über der Schwelle von $DE = h$ auf $DE_1 = h_1$ herabſinkt, ſetzen wir $h_1 = \frac{m}{n}h$, laſſen alſo h_1 aus m Theilen beſtehen, führen nun in der letzten Gleichung ſtatt $h^{-\frac{3}{2}}$, ſucceſſiv

$$\left(\frac{m}{n}h\right)^{-\frac{3}{2}}, \left(\frac{m+1}{n}h\right)^{-\frac{3}{2}}, \left(\frac{m+2}{n}h\right)^{-\frac{3}{2}} \ldots \left(\frac{nh}{n}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

ein, und addiren endlich die erhaltenen Ergebniſſe. Auf dieſem Wege bekommen wir die geſuchte Zeit:

Wandeinſchnitt.

$$t = \frac{3Gh}{2\mu n b\sqrt{2g}}\left[\left(\frac{mh}{n}\right)^{-3/2} + \left(\frac{m+1}{n}h\right)^{-3/2} + \ldots + \left(\frac{nh}{n}\right)^{-3/2}\right]$$

$$= \frac{3Gh}{2\mu n b\sqrt{2g}} \cdot \frac{h^{-3/2}}{n^{-3/2}}\left(m^{-3/2} + (m+1)^{-3/2} + \ldots + n^{-3/2}\right)$$

$$= \frac{3Gh^{-1/2}}{2\mu n^{-1/2} b\sqrt{2g}}\left[\left(1^{-3/2} + 2^{-3/2} + 3^{-3/2} + \ldots + n^{-3/2}\right) - \left(1^{-3/2} + 2^{-3/2} + 3^{-3/2} + \ldots m^{-3/2}\right)\right],$$

oder nach dem »Ingenieur«, Arithmetik §. 28.:

$$t = \frac{3Gh^{-1/2}}{2\mu n^{-1/2} b\sqrt{2g}}\left(\frac{n^{-3/2}+1}{-3/2+1} - \frac{m^{-3/2}+1}{-3/2+1}\right)$$

$$= \frac{3Gn^{1/2}}{2\mu b\sqrt{2gh}} \cdot 2\left(m^{-1/2} - n^{-1/2}\right)$$

$$= \frac{3G}{\mu b\sqrt{2gh}}\left[\left(\frac{m}{n}\right)^{-1/2} - 1\right]$$

$$= \frac{3G}{\mu b\sqrt{2g}}\left[\left(\frac{m}{n}h\right)^{-1/2} - h^{-1/2}\right] = \frac{3G}{\mu b\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{\sqrt{h_1}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\right).$$

Setzt man $h_1 = 0$, ſo erhält man $\frac{1}{\sqrt{h_1}}$ und alſo auch $t = \infty$; damit alſo das Waſſer bis zur Schwelle abläuft, iſt eine unendliche Zeit nothwendig.

Beiſpiel. Wenn das Waſſer durch einen Wandeinſchnitt von 8 Zoll Breite aus einem Reſervoir von 110 Fuß Länge und 40 Fuß Breite ausfließt, welche Zeit braucht es, um aus dem Waſſerſtande von 15 Zoll in den Waſſerſtand von 6 Zoll überzugehen? Es iſt

$$t = \frac{3 \cdot 110 \cdot 40}{\mu \cdot \frac{2}{3} \cdot 7{,}906}\left(\frac{1}{\sqrt{0{,}5}} - \frac{1}{\sqrt{1{,}25}}\right) = \frac{19800}{\mu \cdot 7{,}906}\left(\sqrt{2} - \sqrt{\tfrac{4}{5}}\right)$$

$$= \frac{19800}{7{,}906\,\mu}(1{,}4142 - 0{,}8944) = \frac{19800 \cdot 0{,}5198}{7{,}906\,\mu} = \frac{1302}{\mu}\ \text{Sec.}$$

Nimmt man den Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}60$, ſo folgt die effective Ausflußzeit $t = \frac{1302}{0{,}6} = 2170$ Sec. $= 36$ Min. 10 Sec.

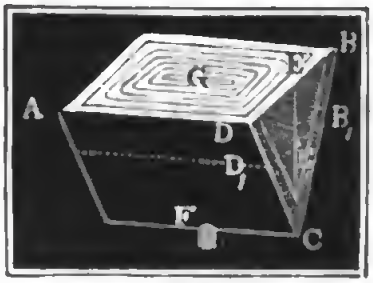
Anmerkung. Für eine rectanguläre Seitenöffnung läßt ſich annähernd ſetzen:

$$t = \frac{2G}{\mu F\sqrt{2g}}\left[\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}\right) - \frac{a^2}{288}\left(\sqrt{h_1^{-3}} - \sqrt{h_2^{-3}}\right)\right],$$

und es bezeichnen F und G die Querſchnitte der Oeffnung und des Gefäßes, a die Oeffnungshöhe, h_1 die Druckhöhe am Anfange, h_2 aber die am Ende des Ausfluſſes. Wird $h_2 = \frac{a}{2}$, ſo geht die Oeffnung in einen Wandeinſchnitt über und es iſt nun die Formel für dieſen anzuwenden.

§. 385. Bildet das Ausflußgefäß ABF, Fig. 575, ein horizontales, dreiſeitiges Prisma, ſo findet man die Ausflußzeit auf folgende Weiſe. Keil- und pyramidenförmige Gefäße.

Fig. 575.



Theilen wir die Höhe $CE = h$ in n gleiche Theile und legen wir durch die Theilpunkte Horizontalebenen, ſo zerlegen wir das ganze Waſſerquantum in lauter gleich dicke Schichten von gleicher Länge $AD = l$ und von nach unten zu abnehmenden Breiten. Iſt die Breite DB der oberen Schicht $= b$, ſo hat man die Breite D_1B_1 einer anderen Schicht, welche um $CE_1 = x$ über der in der unteren Kante liegenden Mündung F ſteht, $y = \frac{x}{h}\,b$, und ihr Volumen $= yl\,.\,\frac{h}{n} = \frac{b\,l\,x}{n}$. Nun iſt aber die Ausflußmenge auf die Zeiteinheit bezogen: $Q = \mu F\sqrt{2gx}$, daher folgt denn die kleine Zeit, innerhalb welcher der Waſſerſpiegel um $\frac{h}{n}$ ſinkt, $\tau = \frac{bl}{n}\,x : \mu F\sqrt{2gx} = \frac{bl}{n\mu F\sqrt{2g}}\,.\,x^{1/2}$. Da endlich die Summe aller $x^{1/2}$ von $x = \frac{h}{n}$ bis $x = \frac{nh}{n}$ genommen,

$= \left(\frac{h}{n}\right)^{1/2}\,.\,\frac{n^{3/2}}{3/2} = 2/3\;nh^{1/2}$ iſt, ſo hat man die Zeit zum Ausfluſſe des ganzen Waſſerprisma's:

$$t = \frac{b\,l}{n\mu F\sqrt{2g}}\,.\,2/3\,nh^{1/2} = 2/3\;\frac{b\,l}{\mu F\sqrt{2g}}\,.\,h^{1/2} = 4/3\;\frac{1/2\;b\,l\,h}{\mu F\sqrt{2\,g\,h}}$$

$= 4/3\,.\,\frac{V}{\mu\,F\,c}$, wenn V das ganze Waſſerquantum und c die anfängliche Ausflußgeſchwindigkeit iſt. Es braucht alſo hier das Waſſer um 1/3 mehr Zeit, als wenn die Ausflußgeſchwindigkeit unveränderlich c wäre.

Bildet das Gefäß ABF, Fig. 576, ein aufrechtſtehendes Paraboloid,

Fig. 576.

ſo hat man für das Verhältniß zwiſchen den Halbmeſſern $KM = y$ und $CD = b$, $\frac{y}{b} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{h}}$, und daher das Verhältniß des Horizontalſchnittes G_1 durch K zur Grundfläche $ADB = G$: $\frac{G_1}{G} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h}$, folglich $G_1 = \frac{Gx}{h}$ und den Inhalt einer Waſſerſchicht $= G_1 : \frac{h}{n} = \frac{Gx}{n}$. Die vollſtändige

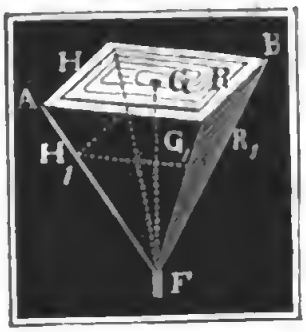
Keil- und pyramidenförmige Gefäße.

Uebereinſtimmung dieſes Ausdruckes mit dem für das dreiſeitige Prisma gefundenen geſtattet daher auch hier $t = \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2} G h}{\mu F \sqrt{2gh}}$ zu ſetzen, oder, da hier $V = \frac{1}{2} Gh$ iſt (§. 118), auch $t = \frac{4}{3} \cdot \frac{V}{\mu F c}$.

Dieſe Formel läßt ſich in vielen anderen Fällen zur angenäherten Beſtimmung der Ausflußzeit namentlich auf das Ausleeren von Teichen anwenden. Sie gilt überhaupt auch in allen den Fällen, wenn die Horizontalſchnitte wie die Abſtände von dem Boden wachſen.

Hat man es endlich mit einem pyramidenförmigen Gefäße ABF, Fig. 577, zu thun, ſo iſt $G_1 : G = x^2 : h^2$, und daher $G_1 = \frac{G x^2}{h^2}$

Fig. 577.



ferner der Inhalt der Schicht $H_1 R_1$, $\frac{G_1 h}{n}$, $= \frac{G x^2}{nh}$, und die Zeit zu ihrem Ausfluſſe:

$$\tau = \frac{Gx^2}{nh} : \mu F \sqrt{2gx} = \frac{G}{n \mu F h \sqrt{2g}} \cdot x^{3/2}.$$

Da aber die Summe aller $x^{3/2}$ von $x = \frac{h}{n}$ bis $x = \frac{nh}{n}$ genommen, $= \left(\frac{h}{n}\right)^{3/2} \cdot \frac{n^{5/2}}{5/2}$ $= \frac{2}{5} n h^{3/2}$ iſt, ſo folgt die Zeit zum Leeren der ganzen Pyramide:

$$t = \frac{G}{n \mu F h \sqrt{2g}} \cdot \frac{2}{5} n h^{3/2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{G h^{1/2}}{\mu F \sqrt{2g}} = \frac{6}{5} \cdot \frac{\frac{1}{3} Gh}{\mu F \sqrt{2gh}},$$

oder $\frac{1}{3} Gh = V$ geſetzt: $t = \frac{6}{5} \cdot \frac{V}{\mu F c}$.

Da bei dieſem Ausfluſſe die anfängliche Ausflußgeſchwindigkeit von c allmälig bis Null abnimmt, ſo iſt die Ausflußzeit $\frac{1}{5}$ größer, als wenn die Geſchwindigkeit unveränderlich $= c$ bliebe.

Beiſpiel. In welcher Zeit wird ſich ein Teich, deſſen Waſſerſpiegel 765000 Quadratfuß Inhalt hat, leeren, wenn das in der tiefſten Stelle einmündende Fiſchgerinne 15 Fuß unter dem Waſſerſpiegel ſteht und eine Röhre von 15 Zoll Weite und 50 Fuß Länge bildet? Theoretiſch iſt die Ausflußzeit $t = \frac{4}{3} \cdot \frac{V}{F \sqrt{2gh}}$

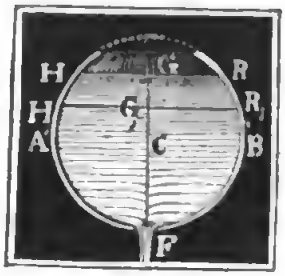
$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{765000 \cdot 15}{\frac{\pi}{4}\left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot 7{,}906 \sqrt{15}} = \frac{19584000}{\pi \cdot 7{,}906 \sqrt{15}} = 203586 \text{ Sec.}$$

Nun iſt aber der Widerſtandscoefficient für den Eintritt in das etwa um 45° abgeſchrägte Gerinne: $\zeta = 0{,}505 + 0{,}327$ (ſ. §. 360) $= 0{,}832$, und der Rei-

bungswiderstand für das Gerinne $= 0{,}025\,\frac{l}{d}\,.\,\frac{v^2}{2g} = 0{,}025\,.\,\frac{50}{3/4}\,.\,\frac{v^2}{2g}$ $= \frac{v^2}{2g}$; es folgt daher der vollständige Ausflußcoefficient für das Teichgerinne: $\mu = \frac{1}{\sqrt{1+0{,}832+1}} = \frac{1}{\sqrt{2{,}832}} = 0{,}594$ und die in Frage stehende Ausflußzeit: $t = 203586 : 0{,}594 = 342670$ Sec. $= 95$ Stund. 11 Min. Keil- und pyramidenförmige Gefäße.

§. 386. Mit Hülfe der im letzten §. aufgefundenen Formeln kann man nun auch die Ausflußzeiten für viele andere Gefäße, z. B. für kugel-, ponton-, pyramidenförmige u. s. w. finden. Für das Leeren eines gefüllten Kugelsegmentes AB, Fig. 578, erhält man Kugel- und obeliskenförmige Gefäße.

Fig. 578.



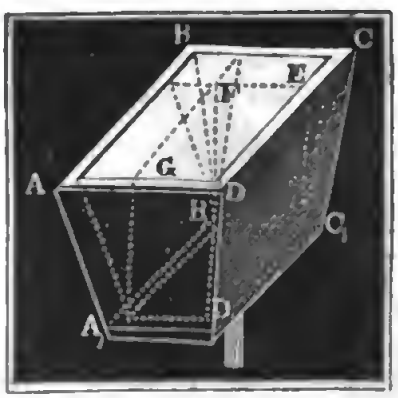
$$t = \tfrac{4}{3}\,\frac{\pi r h^2}{\mu F\sqrt{2gh}} - \tfrac{2}{5}\,.\,\frac{\pi h^3}{\mu F\sqrt{2gh}}$$

$$= \tfrac{2}{15}\pi\,\frac{(10r-3h)\,h^{3/2}}{\mu F\sqrt{2g}},$$ also für das Leeren einer vollen Kugel, wo $h = 2r$,

$$t = \frac{16\pi r^2\sqrt{2r}}{15\,\mu F\sqrt{2g}},$$ und für das einer halben Kugel, wo $h = r$, $t = \frac{14\,\pi r^2\sqrt{r}}{15\,\mu F\sqrt{2g}}$.

Es ist nämlich hier die der Tiefe $FG_1 = x$ entsprechende Horizontalschicht $H_1R_1 = G_1 = \pi x\,(2r-x)\,.\,\frac{h}{n} = \frac{2\pi r h x}{n} - \frac{\pi h x^2}{n}$, also $\tau = \frac{2\pi r h}{n\,\mu F\sqrt{2g}}\,.x^{1/2} - \frac{\pi h}{n\mu F\sqrt{2g}}\,.x^{3/2}$; da der erste Theil dieses Ausdruckes mit der Formel für das Leeren des prismatischen und der zweite Theil für das Leeren des pyramidalen Gefäßes übereinstimmt, wenn man nur das eine Mal $2\pi r h$ statt $b\,l$ und das zweite Mal πh^2 statt G setzt, so erhält man mit Hülfe der Differenz für die im vorigen Paragraphen gefundenen Ausleerungszeiten eines prismatischen und eines pyramidalen Gefäßes: $t = \tfrac{2}{3}\,.\,\frac{b\,l\,h}{\mu F\sqrt{2gh}}$ und $t = \tfrac{2}{5}\,.\,\frac{Gh}{\mu F\sqrt{2gh}}$ auch die Ausleerungszeit des Kugelsegmentes.

Fig. 579.



Für das obelisk- oder pontonförmige Gefäß ACD_1, Fig. 579, lassen sich, da dasselbe aus einem Parallelepipede, aus zwei Prismen und einer Pyramide zusam-

Digitized by Google

Kugel- und obeliskenförmige Gefäße.

mengeſetzt iſt, die obigen Formeln ebenfalls anwenden. Iſt b die obere Breite AD, b_1 die untere Breite A_1D_1, ferner l die obere Länge AB und l_1 die untere Länge A_1B_1, und iſt endlich h die Höhe des Gefäßes, ſo hat man für die Fläche des Waſſerſpiegels AC, $bl = b_1l_1 + b_1(l-l_1) + l_1(b-b_1) + (l-l_1)(b-b_1)$, und davon gehört b_1l_1 dem Parallelepipede A_1C_1EG, $b_1(l-l_1) + l_1(b-b_1)$ den beiden Prismen CFB_1C_1 und AFB_1A_1 und $(l-l_1)(b-b_1)$ der Pyramide BFB_1 an. Nun iſt aber die Ausflußzeit für das Parallelepiped mit der Baſis b_1l_1:

$t_1 = \frac{2b_1l_1\sqrt{h}}{\mu F\sqrt{2g}}$, ferner die Ausflußzeit für die beiden dreiſeitigen Prismen

$t_2 = \frac{2}{3}\frac{[b_1(l-l_1)+l_1(b-b_1)]\sqrt{h}}{\mu F\sqrt{2g}}$, und endlich die für die Pyramide

$t_3 = \frac{2}{3}\frac{(l-l_1)(b-b_1)\sqrt{h}}{\mu F\sqrt{2g}}$; es folgt daher die Ausflußzeit für das ganze Gefäß: $t = t_1 + t_2 + t_3$

$$= [30b_1l_1 + 10b_1(l-l_1) + 10l_1(b-b_1) + 6(l-l_1)(b-b_1)]\frac{\sqrt{h}}{15\mu F\sqrt{2g}}$$

$$= [3bl + 8b_1l_1 + 2(bl_1 + b_1l)]\frac{2\sqrt{h}}{15\mu F\sqrt{2g}}.$$

Iſt $\frac{b_1}{l_1} = \frac{b}{l}$, ſo hat man es mit einer abgekürzten Pyramide zu thun. Setzen wir für dieſe die Grundfläche $bl = G$ und die Grundfläche $b_1l_1 = G_1$, ſo erhalten wir:

$$t = (3G + 8G_1 + 4\sqrt{GG_1})\frac{2\sqrt{h}}{15\mu F\sqrt{2g}}.$$

Uebrigens iſt leicht zu ermeſſen, daß dieſe Formel auch für jede drei- oder vielſeitige Pyramide gilt.

Beiſpiel. Ein obeliskenförmiger Waſſerkaſten iſt oben 5 Fuß lang und 3 Fuß breit, und 4 Fuß tiefer, nämlich im Niveau der 1 Zoll weiten und 3 Zoll langen horizontalen Anſatzröhre, 4 Fuß lang und 2 Fuß breit, wie viel Zeit braucht das den Kaſten anfangs ganz füllende Waſſer, um $2\frac{1}{2}$ Fuß zu ſinken? Die Zeit zum Leeren iſt, $\mu = 0{,}815$ angenommen:

$$t = [8.4.2 + 3.5.3 + 2(3.4 + 5.2)]\frac{2\sqrt{4}}{15 \cdot 0{,}815 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 \cdot 7{,}906}$$

$$= \frac{153 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 144}{15 \cdot 0{,}815 \cdot 7{,}906 \cdot \pi} = 153 \cdot \frac{2304}{12{,}225 \cdot 7{,}906\,\pi} = 153 \cdot 7{,}588 = 1161 \text{ Sec.}$$

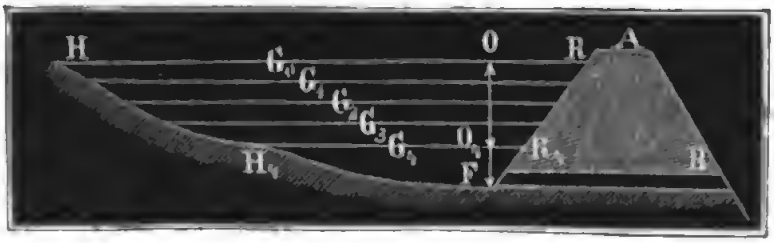
Im Niveau $4 - 2\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ Fuß über der Röhre iſt $l = l_1 + \frac{3}{8} = 4\frac{3}{8}$ und $b = b_1 + \frac{3}{8} = 2\frac{3}{8}$ Fuß, daher die Zeit zum Leeren, wenn das Gefäß nur bis zu dieſem Niveau gefüllt iſt,

$$t_1 = [8.4.2+3.{}^{3}/_{8}.{}^{1}/_{8}+2(2.{}^{3}/_{8}+4.{}^{1}/_{8})] \cdot \frac{1152\sqrt{1,5}}{15.0,815.7906\,\pi}$$

$= 131,672 . 4,6465 = 612$ Sec. Die Differenz der gefundenen Zeiten giebt die Zeit, innerhalb welcher der anfänglich bis zum Kopfe des Gefäßes reichende Waſſerſpiegel um $2^1/_8$ Fuß ſinkt.

§. 387. Iſt die Ausflußzeit für ein ungeſetzmäßig geformtes Gefäß *HFR*, Fig. 580, zu finden, ſo hat man eine Annäherungsmethode, z. B. Ungeſetzmäßige Gefäße.

Fig. 580.



die Simpſon'ſche Regel, anzuwenden. Hat man die ganze Waſſermaſſe in vier gleich hohe Schichten getheilt, und die den Horizontalſchnitten G_0, G_1, G_2, G_3, G_4 entſprechenden Druckhöhen durch h_0, h_1, h_2, h_3, h_4 bezeichnet, ſo ergiebt ſich die Ausflußzeit durch die Simpſon'ſche Regel:

$$t = \frac{h_0-h_4}{12\mu F\sqrt{2g}}\left(\frac{G_0}{\sqrt{h_0}}+\frac{4G_1}{\sqrt{h_1}}+\frac{2G_2}{\sqrt{h_2}}+\frac{4G_3}{\sqrt{h_3}}+\frac{G_4}{\sqrt{h_4}}\right).$$

Bei Annahme von 6 Schichten erhält man:

$$t = \frac{h_0-h_6}{18\mu F\sqrt{2g}}\left(\frac{G_0}{\sqrt{h_0}}+\frac{4G_1}{\sqrt{h_1}}+\frac{2G_2}{\sqrt{h_2}}+\frac{4G_3}{\sqrt{h_3}}+\frac{2G_4}{\sqrt{h_4}}+\frac{4G_5}{\sqrt{h_5}}+\frac{G_6}{\sqrt{h_6}}\right).$$

Das Ausflußquantum iſt im erſten Falle:

$$Q = \frac{h_0-h_4}{12}(G_0+4G_1+2G_2+4G_3+G_4),$$ im zweiten:

$$Q = \frac{h_0-h_6}{18}(G_0+4G_1+2G_2+4G_3+2G_4+4G_5+G_6).$$

Iſt die Geſtalt und Größe des Ausflußgefäßes nicht bekannt, ſo kann man durch die in gleichen Zeitintervallen beobachteten Waſſerſtände die Ausflußmenge gleichwohl berechnen. Iſt t dieſes Zeitintervall, ſo hat man bei Boden- und Seitenöffnungen:

$$Q = \frac{\mu F t\sqrt{2g}}{3}(\sqrt{h_0}+4\sqrt{h_1}+2\sqrt{h_2}+4\sqrt{h_3}+\sqrt{h_4}),$$

und für Ueberfälle oder Wandeinſchnitte

$$Q = {}^2/_3\mu b t\sqrt{2g}(\sqrt{h^3_0}+4\sqrt{h^3_1}+2\sqrt{h^2_2}+4\sqrt{h^3_3}+\sqrt{h^3_4}).$$

Beiſpiel. In welcher Zeit ſinkt der Waſſerſpiegel eines Teiches um 6 Fuß, wenn das Teichgerinne einen halben Cylinder von 18 Zoll Weite, 9 Zoll Tiefe und 60 Fuß Länge bildet, und die Waſſerſpiegel folgende Inhalte haben:

Ungeſetzmäßige Gefäße.

G_0, bei 20 Fuß Druckhöhe = 600000 Quadratfuß.
G_1, » 18,5 » » = 495000 »
G_2, » 17,0 » » = 410000 »
G_3, » 15,5 » » = 325000 »
G_4, » 14,0 » » = 265000 »

Es iſt $F = \frac{\pi}{8} \cdot (\frac{3}{2})^2 = \frac{9\pi}{32} = 0{,}8836$ Quadratfuß. Setzen wir, wie im Beiſpiel zu §. 385, den Widerſtandscoefficienten für den Eintritt = 0,832, und den für die Reibung $= 0{,}025 \cdot \frac{l}{d} = 0{,}025 \cdot 60 \cdot 1{,}091 = 1{,}6356$, ſo iſt der Ausflußcoefficient $\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}832 + 1{,}6365}} = \frac{1}{\sqrt{3{,}4685}} = 0{,}537$, und $\mu F \sqrt{2g} = 0{,}537 \cdot 0{,}8836 \cdot 7{,}906 = 3{,}7518$. Nun hat man

$$\frac{G_0}{\sqrt{h_0}} = \frac{600000}{\sqrt{20}} = 134170, \quad \frac{G_1}{\sqrt{h_1}} = \frac{495000}{\sqrt{18{,}5}} = 115090,$$

$$\frac{G_2}{\sqrt{h_2}} = \frac{410000}{\sqrt{17}} = 99440, \quad \frac{G_3}{\sqrt{h_3}} = \frac{325000}{\sqrt{15{,}5}} = 82550,$$

$\frac{G_4}{\sqrt{h_4}} = \frac{265000}{\sqrt{14}} = 70830$, daher folgt die Ausflußzeit:

$$t = \frac{6}{12 \cdot 3{,}7518}(134170 + 4 \cdot 115090 + 2 \cdot 99440 + 4 \cdot 82550 + 70830)$$
$$= \frac{1194440}{7{,}5036} = 159190 \text{ Sec.} = 44 \text{ Stunden } 13 \text{ Minuten.}$$

Das Ausflußquantum iſt:

$$Q = \tfrac{1}{12} \cdot (600000 + 4 \cdot 495000 + 2 \cdot 410000 + 4 \cdot 325000 + 265000)$$
$$= \frac{4965000}{2} = 2482500 \text{ Cubikfuß.}$$

Zu- und Abfluß.

§. 388. Erhält das Gefäß während des Ausfluſſes von unten noch Zufluß von oben, ſo wird die Beſtimmung der Zeit, innerhalb welcher der Waſſerſpiegel auf eine gewiſſe Höhe ſteigt oder ſinkt, viel verwickelter, ſo daß man ſich meiſt mit einer angenäherten Beſtimmung begnügen muß. Iſt das Zuflußquantum pr Sec. $Q_1 > \mu F \sqrt{2gh}$, ſo findet ein Steigen und iſt $Q_1 < \mu F \sqrt{2gh}$, ſo findet ein Sinken des Waſſerſpiegels ſtatt. Uebrigens tritt hier alle Mal Beharrungszuſtand ein, wenn die Druckhöhe auf $k = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q_1}{\mu F}\right)^2$ angewachſen oder herabgeſunken iſt. Die Zeit τ, innerhalb welcher die veränderliche Druckhöhe x um die kleine Größe ξ wächſt, iſt beſtimmt durch die Gleichung $G_1 \xi = Q_1 \tau - \mu F \sqrt{2gx} \cdot \tau$, und dagegen die Zeit, innerhalb welcher der Waſſerſpiegel um ξ ſinkt, durch

$$G_1 \xi = \mu F \sqrt{2gx} \cdot \tau - Q_1 \tau.$$

Man hat daher im erſten Falle $\tau = \frac{G_1 \xi}{Q_1 - \mu F \sqrt{2gx}}$ und im zweiten

$\tau = \frac{G_1 \xi}{\mu F \sqrt{2gx} - Q_1}$. Durch Anwendung der Simpſon'ſchen Regel erhält man ſo die Ausflußzeit, innerhalb welcher der Waſſerſpiegel ſinkend aus G_0 in G_1, G_2 . . . und die Druckhöhe aus h_0 in h_1, h_2 . . . übergeht: Zu- und Abfluß.

$$t = \frac{h_0 - h_4}{12}\left[\frac{G_0}{\mu F\sqrt{2gh_0} - Q_1} + \frac{4G_1}{\mu F\sqrt{2gh_1} - Q_1} + \frac{2G_2}{\mu F\sqrt{2gh_2} - Q_1} + \right.$$
$$\left. + \frac{4G_3}{\mu F\sqrt{2gh_3} - Q_1} + \frac{G_4}{\mu F\sqrt{2gh_4} - Q_1}\right]$$

oder einfacher, wenn man $\frac{Q_1}{\mu F\sqrt{2g}}$ durch $\sqrt{k}$ bezeichnet,

$$t = \frac{h_0 - h_4}{12\mu F\sqrt{2g}}\left[\frac{G_0}{\sqrt{h_0} - \sqrt{k}} + \frac{4G_1}{\sqrt{h_1} - \sqrt{k}} + \frac{2G_2}{\sqrt{h_2} - \sqrt{k}} + \right.$$
$$\left. + \frac{4G_3}{\sqrt{h_3} - \sqrt{k}} + \frac{G_4}{\sqrt{h_4} - \sqrt{k}}\right].$$

Iſt das Gefäß prismatiſch und hat es den unveränderlichen Querſchnitt G, ſo hat man

$$t = \frac{2G}{\mu F\sqrt{2g}}\left[\sqrt{h} - \sqrt{h_1} + \sqrt{k}\ .\ log.nat.\left(\frac{\sqrt{h} - \sqrt{k}}{\sqrt{h_1} - \sqrt{k}}\right)\right],$$

die Zeit, innerhalb welcher die Druckhöhe aus h in h_1 übergeht. Da für $h_1 = k$, $\frac{\sqrt{h} - \sqrt{k}}{\sqrt{h_1} - \sqrt{h}} = \frac{\sqrt{h} - \sqrt{k}}{0} = \infty$ wird, ſo folgt, daß der Beharrungszuſtand erſt unendlich ſpät eintritt.

Bei einem Wandeinſchnitte ſtellt ſich folgende Formel heraus:

$$t = \frac{Gk}{3Q_1}\left[log.nat.\frac{(\sqrt{h} - \sqrt{k})^2\,(h_1 + \sqrt{h_1 k} + k)}{(\sqrt{h_1} - \sqrt{k})^2\,(h + \sqrt{h\,k} + k)}\right.$$
$$\left. + \sqrt{12}\ .\ arc\left(tang. = \frac{(\sqrt{h} - \sqrt{h_1})\sqrt{12k}}{3k + (2\sqrt{h} + \sqrt{k})(2\sqrt{h_1} + \sqrt{k})}\right)\right],$$

wo $k = \left(\frac{Q_1}{{}^2/_3\,\mu\,b\sqrt{2g}}\right)^{2/3}$, *log. nat.* den natürlichen Logarithmen und *arc* (*tang.* $= y$) den der Tangente y entſprechenden Kreisbogen bezeichnet. Je nachdem $k \lessgtr h$, oder das zufließende Waſſerquantum $Q_1 \lessgtr {}^2/_3\mu\,b\sqrt{2gh^3}$ iſt, findet ein Steigen oder ein Fallen des Waſſerſpiegels ſtatt. Der Beharrungszuſtand tritt ein, wenn $h_1 = k$ iſt, die entſprechende Zeit t fällt aber ∞ aus.

Zu- und Abfluß.

Beiſpiel. In welcher Zeit ſteigt das Waſſer in einem 12 Fuß langen und 6 Fuß breiten parallelepipediſchen Kaſten von Null auf 2 Fuß Höhe über der Schwelle eines ½ Fuß beiten Wandeinſchnittes, wenn in der Secunde 5 Cubikfuß Waſſer zufließen? Man hat hier $h = 0$, daher einfacher

$$t = \frac{Gk}{3Q_1}\left[log.\,nat.\frac{h_1+\sqrt{h_1 k}+k}{(\sqrt{h_1}-\sqrt{k})^2}+\sqrt{12}\;arc\left(tang.=\frac{-\sqrt{3h_1}}{2\sqrt{k}+\sqrt{h_1}}\right)\right].$$

Nun iſt $G = 12.6 = 72$, $Q_1 = 5$, $h_1 = 2$, $b = ½$ und $\mu = 0{,}6$,

$$k = \left(\frac{5}{⅔ . 0{,}6 . ½ . 7{,}906}\right)^{⅔} = 2{,}1544,$$ daher folgt die geſuchte Zeit

$$t = \frac{72.2{,}1544}{3.5}\left[log.\,nat.\frac{4{,}1544+\sqrt{4{,}3088}}{(1{,}4142-1{,}4678)^2}-\sqrt{12}\,arc\left(tang.=\frac{\sqrt{6}}{1{,}4142+2{,}9357}\right)\right]$$

$$= 10{,}341\left[log.\,nat.\;\frac{6{,}2302}{0{,}002873}-\sqrt{12}\,.\,arc\left(tang.=\frac{\sqrt{6}}{4{,}3499}\right)\right]$$

$$= 10{,}341\;(7{,}682-1{,}778) = 10{,}341\,.\,5{,}90 = 61\;\text{Secunden}.$$

Schleuſen.

§. 389. Eine ſehr nützliche Anwendung der eben abgehandelten Lehren läßt ſich auf das Füllen und Leeren der Schleuſen (franz. écluses; engl. sluices) machen. Man unterſcheidet zweierlei Schleuſen (Schifffahrtsſchleuſen), nämlich einfache und doppelte. Die einfache Schleuſe, Fig. 581, beſteht aus einer Kammer B, welche durch das Oberthor HF vom Oberwaſſer A und durch das Unterthor RS vom Unterwaſſer C getrennt wird. Die doppelte Schleuſe, Fig. 582, hingegen beſteht aus zwei Kammern, mit dem Oberthore KL, Mittelthore HF und Unterthore RS.

Fig. 581.

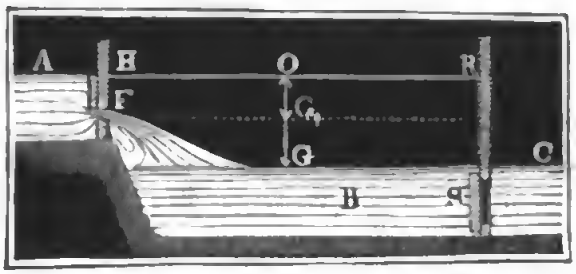
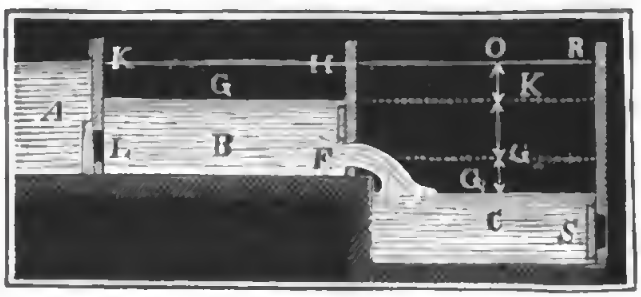


Fig. 582.



Setzen wir den mittleren horizontalen Querſchnitt einer einfachen Schleuſenkammer $= G$, den Abſtand der Mitte der Schutzöffnung im Oberthore von der Oberfläche HR des Oberwaſſers $= h_1$ und von der des Unterwaſſers $= h_2$, und endlich den Inhalt der Schutzöffnung $= F$, ſo erhalten wir die Zeit des Füllens bis zur Mitte der Mündung:

$t_1 = \frac{G h_2}{\mu F \sqrt{2 g h_1}}$ und die Zeit zum Füllen des übrigen Raumes, wo ein

allmäliges Abnehmen der Druckhöhe ſtatt hat, $t_2 = \frac{2Gh_1}{\mu F\sqrt{2gh_1}}$; es iſt Schleuſen.
folglich die Zeit zum Füllen der einfachen Schleuſe

$$t = t_1 + t_2 = \frac{(h_2 + 2h_1)G}{\mu F\sqrt{2gh_1}}.$$

Befindet ſich die Mündung im Unterthor ganz unter Waſſer, ſo nimmt beim Leeren die Druckhöhe allmälig von $h_1 + h_2$ bis Null ab, es iſt daher die Zeit des Leerens oder Ablaſſens: $t = \frac{2G\sqrt{h_1 + h_2}}{\mu F\sqrt{2g}}$.

Steht hingegen ein Theil der Mündung aus dem Unterwaſſer hervor, ſo hat man zwei Ausflußmengen, eine über und eine unter Waſſer ausfließend, zu berückſichtigen. Setzen wir die Höhe des Theiles der Mündung über dem Waſſer $= a_1$ und die Höhe des Theiles unter dem Waſſer $= a_2$, die Breite der Mündung aber $= b$, ſo erhält man die Ausflußzeit durch den Ausdruck:

$$t = \frac{2G(h_1 + h_2)}{\mu b\sqrt{2g}\left(a_1\sqrt{h_1 + h_2 - \frac{a_1}{2}} + a_2\sqrt{h_1 + h_2}\right)}.$$

Bei den doppelten Schleuſen nimmt die Druckhöhe in der vom Oberwaſſer abgeſchloſſenen Kammer während des Ausfluſſes in die zweite Kammer immer mehr und mehr ab. Iſt G der horizontale Querſchnitt der erſten Kammer und ſinkt die anfängliche Druckhöhe h_1 in dieſer Kammer auf x herab, während das Waſſer in der zweiten Kammer bis zur Mitte der Schutz- oder Ausflußöffnung ſteigt, ſo hat man die entſprechende Zeit $t_1 = \frac{2G}{\mu F\sqrt{2g}}(\sqrt{h_1} - \sqrt{x})$. Nun iſt aber Waſſerquantum $G(h_1 - x) = G_1h_2$, daher $x = h_1 - \frac{G_1}{G}h_2$ und

$$t_1 = \frac{2G}{\mu F\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_1 - \frac{G_1h_2}{G}}\right) = \frac{2\sqrt{G}}{\mu F\sqrt{2g}}(\sqrt{Gh_1} - \sqrt{Gh_1 - G_1h_2}).$$

Die Zeit, in welcher das Waſſer in der zweiten Kammer ſo hoch ſteigt, als in der erſten Kammer, nach welcher alſo das Waſſer in beiden in einerlei Niveau kommt, beſtimmt ſich nach §. 383:

$$t_2 = \frac{2GG_1\sqrt{x}}{\mu F(G + G_1)\sqrt{2g}} = \frac{2G_1\sqrt{G}\sqrt{Gh_1 - G_1h_2}}{\mu F(G + G_1)\sqrt{2g}}$$

und die ganze Füllungszeit:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{2\sqrt{G}}{\mu F\sqrt{2g}}\left(\sqrt{Gh_1} - \frac{G}{G + G_1}\sqrt{Gh_1 - G_1h_2}\right).$$

Schleuſen. **Beiſpiel.** Welche Zeit iſt zum Füllen und Ablaſſen folgender einfachen Schleuſenkammer nöthig? Mittlere Schleuſenlänge = 200 Fuß, mittlere Breite = 24 Fuß, alſo $G = 200 \cdot 24 = 4800$ Quadratfuß, Abſtand des Mittelpunktes der Schutzöffnung im Oberthore von beiden Waſſerſpiegeln 5 Fuß, Breite beider Oeffnungen $2\frac{1}{2}$ Fuß, Höhe der Oeffnung im Oberthore 4 Fuß, und Höhe der Oeffnung im Unterthore (ganz unter Waſſer) 5 Fuß. Setzen wir in

$$t = \frac{(2h_1 + h_2)G}{\mu F\sqrt{2gh_1}},\quad h_1 = 5,\ h_2 = 5,\ G = 4800,\ \mu = 0{,}615,\ F = 4 \cdot 2^1{}_2$$

$= 10$ und $\sqrt{2g} = 7{,}906$, ſo bekommen wir die Zeit zum Füllen:

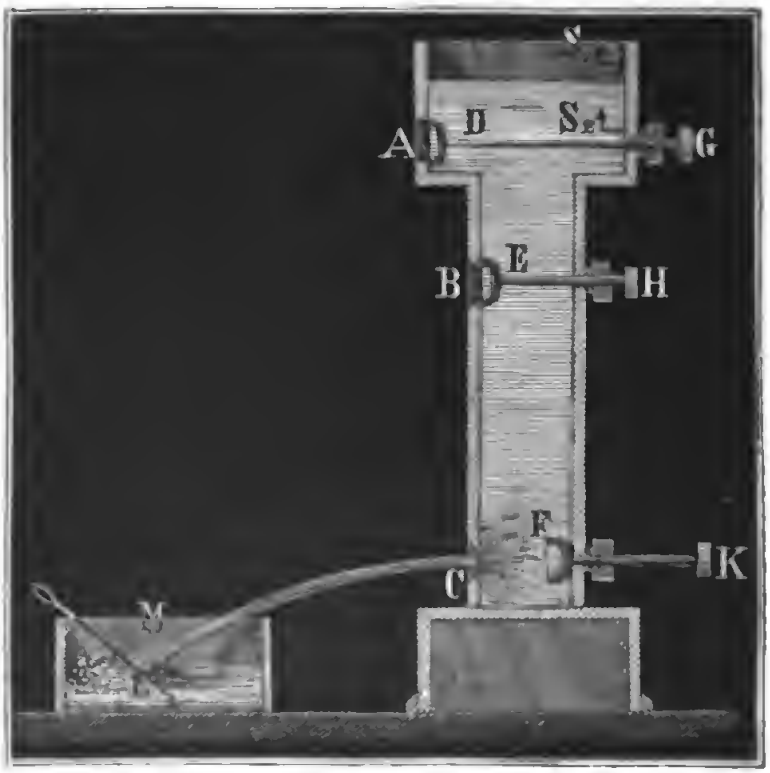
$$t = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4800}{6{,}15 \cdot 7{,}906\sqrt{5}} = \frac{14400}{1{,}23 \cdot 7{,}906\sqrt{5}} = 662 \text{ Sec.} = 11 \text{ Min. } 2 \text{ Sec.}$$

Setzen wir in der Formel $t = \frac{2G\sqrt{h_1 + h_2}}{\mu F\sqrt{2g}}$, $G = 4800$, $h_1 + h_2 = 10$, $F = 5 \cdot 2^1{}_2 = 12{,}5$, ſo erhalten wir die Zeit zum Leeren der Schleuſe:

$$t = \frac{2 \cdot 4800\sqrt{10}}{0{,}615 \cdot 12{,}5 \cdot 7{,}906} = 500 \text{ Sec.} = 8 \text{ Min. } 20 \text{ Sec.}$$

Hydrauliſcher Verſuchsapparat. §. 390. Durch einen in Fig. 583 abgebildeten **hydrauliſchen Verſuchsapparat** kann man nicht allein durch mehr als 100 Verſuche die wichtigſten Erſcheinungen des Ausfluſſes vor Augen führen, ſondern auch die hauptſächlichſten Geſetze derſelben in Zahlen nachweiſen. Dieſer

Fig. 583.



Apparat beſteht in einem Ausflußgefäße mit drei Mündungen *A*, *B*, *C*, deren Abſtände von dem mittleren Waſſerſpiegel *HR* um Höhen abſtehen,

welche gegen einander in dem Verhältniſſe wie 1 zu 4 zu 9 zu einander ſtehen. In dieſe Mündungen laſſen ſich die verſchiedenartigſten Mundſtücke und Röhren einſetzen, und damit dies ohne Störung durch das Waſſer geſchehen könne, hat man beſondere Verſchließungsklappen D, E, F, deren Stiele G, H, K durch Stopfbüchſen in der Rückwand des Apparates hindurchgehen, angebracht. In dem oberen und weiteren Theile des Apparates befinden ſich noch zwei zugeſpitzte und nach oben gerichtete Haken S_1 und S_2, welche als Anhaltepunkte bei den Verſuchen dienen, indem der Durchgang des ſinkenden Waſſerſpiegels durch dieſe Spitzen den Anfang und das Ende eines jeden Verſuches beſtimmt. Das ausfließende Waſſer wird in einem Gefäße M aufgefangen, das vor dem folgenden Verſuche auf das Ausflußreſervoir geſetzt wird und durch ein mit einem Stöpſel verſehenes Loch L ſeinen Inhalt in das Reſervoir zurückführt. Hydraulischer Verſuchsapparat.

Um mit Hülfe dieſes Apparates die Ausflußcoefficienten μ verſchiedener Mundſtücke und Röhren zu finden, hat man mittels einer guten Secundenuhr die Zeit t zu beobachten, innerhalb welcher während des Ausfluſſes der Waſſerſpiegel von der einen Spitze bis zur anderen ſinkt, oder die Druckhöhe h_1 in die Druckhöhe h_2 übergeht; iſt dann noch F der Querſchnitt der Ausflußmündung und G der Inhalt des ſinkenden Waſſerſpiegels, ſo hat man den Ausflußcoefficienten (ſ. §. 382):

$$\mu = \frac{2G\,(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}}{F\,t\,\sqrt{2g}},$$

und die entſprechende mittlere Druckhöhe:

$$h = \left(\frac{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}{2}\right)^2.$$

Zu dieſem Apparate gehört noch eine Sammlung von Mundſtücken und Röhren, nämlich quadratiſche, rectanguläre, kreisförmige und trianguläre Mündungen in dünnem Blech, mit oder ohne innerer Einfaſſung, kurze cylindriſche und coniſche Röhren, längere gerade Röhren von verſchiedenen Weiten, Kropf- und Knieröhren u. ſ. w., welche ſich in die verſchiedenen Ausflußlöcher A, B, C einſetzen laſſen. Mittels dieſes ſo ausgerüſteten Apparates kann man in wenig Stunden faſt alle Erſcheinungen und Geſetze des Ausfluſſes vor Augen führen; man kann an demſelben nicht nur die vollkommene und unvollkommene, die vollſtändige und unvollſtändige, ſondern auch die verſchiedenen Grade der Contraction der Waſſerſtrahlen ſtudiren, ferner die Reibungs-, Knie- und Krümmungswiderſtände in Röhren, ſo wie auch den poſitiven und negativen Druck des Waſſers, durch Springen und Anſaugen u. ſ. w kennen lernen. Immer wird man auf recht leidliche, zum Theil aber auch auf überraſchend gute Uebereinſtimmungen mit den mitgetheilten Erfahrungsgrößen

Hydraulischer Verſuchsapparat.

(μ, φ, α, ξ) ſtoßen. Bei unſerem Apparate iſt $G = 0{,}080$ Quadratmeter, die gewöhnliche Mündungs- und Röhrenweite ohngefähr 1 Centimeter, und für die untere Mündung $h_1 = 0{,}81$ und $h_2 = 0{,}69$ Meter. (Eine ausführliche Beſchreibung dieſes Apparates iſt im polytechniſchen Centralblatte Nr. 4, 1848, enthalten.)

Ein Beiſpiel, wie gut die Beobachtungen an dieſem Apparate mit den bekannten Verſuchen im Großen übereinſtimmen, iſt Folgendes. Für eine kurze cylindriſche Anſatzröhre im unteren Loche wurde $t = 33$, für eine längere Glasröhre mit dem Längenverhältniſſe $\frac{l}{d} = 124$ aber $t = 56$ Secunden gefunden; hieraus berechnet ſich für die eine $\mu_1 = 0{,}815$ und $\xi_1 = \frac{1}{\mu_1^2} - 1 = 0{,}504$, und für die andere $\mu_2 = 0{,}480$ und $\xi_2 = \frac{1}{\mu_1^2} - 1 = 3{,}332$, es folgt hiernach $\xi_2 - \xi_1 = 3{,}332 - 0{,}504 = 2{,}828$, und daher der Reibungscoefficient der Röhre:

$$\xi = \frac{d}{l}(\xi_2 - \xi_1) = \frac{2{,}828}{124} = 0{,}0228.$$

Nach der Tabelle in §. 366 iſt aber für die mittlere Geſchwindigkeit $v = 1{,}84$ Meter, mit welcher das Waſſer aus der Röhre ausfloß, $\xi = 0{,}0215$, alſo die Uebereinſtimmung eine ganz gute. Bei dieſen Verſuchen läßt ſich auch auf das Ueberzeugendſte nachweiſen, daß die Ausflußgeſchwindigkeit durch Röhren nicht von der Neigung derſelben, ſondern nur von der Druckhöhe der Ausmündung abhängt. Es fällt z. B. die Ausflußzeit gleich groß aus, die lange Röhre mag im mittleren oder im unteren Loche ſtecken, wenn nur die Ausmündung derſelben gleich tief unter dem Waſſerſpiegel im Reſervoir ſteht.

Schlußanmerkung. Die Literatur über den Ausfluß des Waſſers und über die Bewegung des Waſſers in Röhren wird am vollſtändigſten mitgetheilt in der allgemeinen Maſchinenencyclopädie, Band 1, Art. Ausfluß. Von den neueren Schriften iſt hier nur anzuführen: Gerſtner, Handbuch der Mechanik, Band 2, Prag 1832; ferner D'Aubuisson's Traité d'Hydraulique à l'usage des Ingénieurs. II. édit. 1840. Die erſte Ausgabe iſt auch deutſch erſchienen. Eytelwein's Handbuch der Mechanik feſter Körper und der Hydraulik, dritte Auflage, 1842; ferner Scheffler's Principien der Hydroſtatik und Hydraulik, Braunſchweig 1847. Wegen ihrer praktiſchen Haltung behalten die älteren hydrauliſchen Schriften von Boſſut und Du Buat immer einen gewiſſen Werth.

Sechstes Kapitel.

Von dem Ausfluſſe der Luft aus Gefäßen und Röhren.

Ausfluß der ruhigen Luft.

§. 391. Die verdichtete Luft fließt nicht genau nach dem Geſetze aus Gefäßen wie das Waſſer, weil mit dem Ausfluſſe derſelben eine Ausdehnung verbunden iſt, die ſich beim Ausfluſſe des Waſſers nicht vorfindet. Um aber ein ſolches Geſetz für die Luft und andere Gasarten aufzufinden, ſetzen wir die Arbeit $Q\gamma\frac{v^2}{2g}$, welche ein Luftquantum Q von der Dichtigkeit γ in Anſpruch nimmt, um aus der Ruhe in die Geſchwindigkeit v überzugehen, gleich der in §. 330 gefundenen Arbeit $Qp\ Log.nat.\left(\frac{p_1}{p}\right)$, welche daſſelbe Luftquantum verrichtet, wenn es aus der größeren Preſſung p_1 in die kleinere Preſſung p übergeht. Iſt alſo p_1 die Expanſivkraft der in einem Gefäße eingeſchloſſenen Luft, v die Ausflußgeſchwindigkeit derſelben, p die Spannung der Luft außerhalb des Gefäßes, und γ die Dichtigkeit derſelben, ſo läßt ſich ſetzen:

$$Q\gamma\,.\,\frac{v^2}{2g} = Qp\ Log.\ nat.\left(\frac{p_1}{p}\right),$$ alſo die Geſchwindigkeitshöhe

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{p}{\gamma}Log.nat.\left(\frac{p_1}{p}\right) = 2{,}3026\,\frac{p}{p}Log.\left(\frac{p_1}{p}\right),$$

und die Geſchwindigkeit ſelbſt

$$v = \sqrt{2g\,\frac{p}{\gamma}\,Log.\,nat.\left(\frac{p_1}{p}\right)}.$$

Nur dann, wenn die Spannungen p und p_1 wenig von einander verſchieden ſind, wenn $p_1 - p < \frac{1}{10}p$ iſt, läßt ſich

$Log.\ nat.\left(\frac{p_1}{p}\right) = Log.\,nat.\left(1 + \frac{p_1-p}{p}\right) = \frac{p_1-p}{p}$, und daher

$v = \sqrt{2g\left(\frac{p_1-p}{\gamma}\right)}$ ſetzen. Nun iſt aber die Höhe einer äußeren Luftſäule, welche durch ihr Gewicht dem Drucke $p_1 - p$ das Gleichgewicht hält (ſ. §. 327), $h = \frac{p_1-p}{\gamma}$; es läßt ſich daher die Ausflußgeſchwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ ſetzen, und man erhält hierdurch eine vollſtändige Ueber-

einſtimmig mit dem Ausfluſſe des Waſſers. Bei höheren Preſſungen reicht allerdings dieſe Formel nicht mehr aus, hier iſt mindeſtens

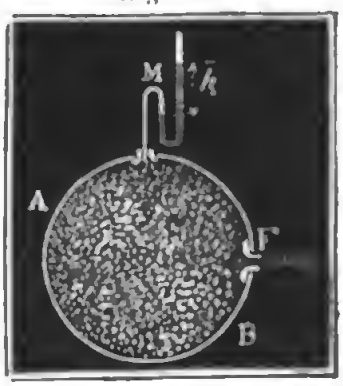
$Log.\,nat.\left(\frac{p_1}{p}\right) = \frac{p_1 - p}{p} - \frac{1}{2}\left(\frac{p_1 - p}{p}\right)^2$ zu ſetzen, weshalb man denn auch ſchon weit genauer $v = \sqrt{2g\left(\frac{p_1 - p}{\gamma} - \frac{1}{2}\,\frac{(p_1 - p)^2}{p\gamma}\right)}$

$= \sqrt{2g\left(1 - \frac{p_1 - p}{2p}\right)h}$, oder, wenn man den Luftbarometerſtand der äußeren Luft $= b$, alſo $p = b\gamma$ ſetzt,

$$v = \sqrt{2g\left(1 - \frac{h}{2b}\right)h} = \left(1 - \frac{h}{4b}\right)\sqrt{2gh}$$ hat.

Iſt die Ausflußöffnung F des Gefäßes AB, Fig. 584, immer genau und glatt abgerundet, ſo fließen die Luftelemente in parallelen Linien aus und es iſt daher die durch die Oeffnung in jeder Secunde ausfließende und unter dem äußeren Barometerſtande gemeſſene Luftmenge:

Fig. 584.



$$Q = Fv = F\left(1 - \frac{h}{4b}\right)\sqrt{2gh},$$

oder genauer

$$= F\sqrt{2\,g\,b\;Log.\;nat.\left(\frac{b+h}{b}\right)}.$$

§. 392. Die im vorigen §. gefundenen Formeln laſſen ſich nicht unmittelbar zur Anwendung bringen, da man weder den inneren noch den äußeren Druck durch die Längen $b + h$ und b von Luftſäulen zu meſſen vermag. In der Regel mißt man dieſe Drücke vielmehr durch Queckſilber- oder Waſſerſäulen. Was nun den Quotienten $\frac{p_1}{p} = \frac{b+h}{b}$ anlangt, ſo iſt es allerdings einerlei, ob man b und h in Luft-, Waſſer- oder Queckſilberſäulen ausdrückt, weil jede Reduction von b und h den Bruch $\frac{b+h}{b}$ unverändert läßt, allein der Quotient $\frac{p}{\gamma} = b$ iſt noch von der Temperatur der ausſtrömenden Luft abhängig und auch bei verſchiedenen Luftarten verſchieden. Für atmoſphäriſche Luft hat man (ſ. §. 333), wenn man unter p den Druck der Luft auf 1 Quadratcentimeter, unter γ das Gewicht eines Cubikmeters Luft, und unter t die Temperatur der Luft verſteht, $\frac{p}{\gamma} = \frac{1 + 0{,}00367\,.\,t}{1{,}2572}$, dagegen für Waſſerdampf

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{1 + 0{,}00367\,t}{0{,}7857}$$

Setzt man dieſe Werthe in der Hauptformel für v ein, ſo erhält man für atmoſphäriſche Luft: Ausfluß der ruhigen Luft.

$$v = 395 \sqrt{(1 + 0{,}00367 \,.\, t)\, Log.\, nat. \left(\frac{b+h}{b}\right)} \text{ Meter,}$$

oder bei kleinen $\frac{h}{b}$,

$$v = 395 \sqrt{(1 + 0{,}00367 \,.\, t)\frac{h}{b}} \text{ Meter, u. für Waſſerdämpfe:}$$

$$v = 500{,}6 \sqrt{(1 + 0{,}00367 \,.\, t)\, Log.\, nat. \left(\frac{b+h}{b}\right)} \text{ Meter.}$$

Die unter dem äußeren Drucke zu meſſende theoretiſche Ausflußmenge iſt $Q = Fv$, will man aber dieſelbe unter dem inneren Drucke meſſen, ſo hat man zu ſetzen $Q_1 p_1 = Qp$, daher folgt $Q_1 = \frac{p}{p_1} Q = \frac{bQ}{b+h}$. Auf Null Grad Wärme zurückgeführt, ſtellt ſich endlich das Ausflußquantum $Q_2 = \frac{Q}{1 + 0{,}00367 \,.\, t}$, alſo für atmoſphäriſche Luft

$$Q_2 = 395 F \sqrt{\frac{Log.nat.\,(b+h) - Log.nat.\,b}{1 + 0{,}00367 \,.\, t}} \text{ Cubikmeter heraus.}$$

Sollen bei verſchiedenen Temperaturen aus verſchiedenen Mündungen F und F_1 bei gleicher Spannung gleiche Luftmaſſen ausſtrömen, ſo muß hiernach ſein: $\frac{F_1}{F} = \sqrt{\frac{1 + 0{,}00367\, t_1}{1 + 0{,}00367\, t}}$. Iſt z. B. $t = 0$ und $t_1 = 150^0$, ſo hat man $F_1 = \sqrt{1{,}5505} \,.\, F = 1{,}245\, F$. Wenn man alſo bei einem Eiſenhohofen mit erhitzter Luft von 150° Wärme ſchmelzen will, ſo muß man Düſen anwenden, welche um ein Viertel mehr Querſchnitt in der Ausmündung haben, als bei Anwendung von kalter Luft.

Für das preuß. Fußmaaß hat man bei Luft

$$v = 1258 \,.\, \sqrt{(1 + 0{,}00367\, t)\, Log.\, nat. \left(\frac{b+h}{b}\right)}, \text{ und bei Dampf}$$

$$v = 1595 \,.\, \sqrt{(1 + 0{,}00367\, t)\, Log.\, nat. \left(\frac{b+h}{b}\right)}.$$

Beiſpiel. In einem großen Behälter iſt Luft von 120° Wärme eingeſchloſſen, welcher ein Queckſilbermanometerſtand von 5 Zoll entſpricht, während der äußere Barometerſtand 27,2 Zoll beträgt, welche Windmenge wird aus demſelben durch eine 1½ Zoll weite runde Mündung ausſtrömen? Es iſt

$Log.\, nat. \left(\frac{b+h}{b}\right) = Log.\, nat. \left(\frac{32{,}2}{27{,}2}\right) = Log.\, nat.\, 322 - Log.nat.\, 272$
$= 5{,}77455 - 5{,}60580 = 0{,}16875$, daher die Ausflußgeſchwindigkeit

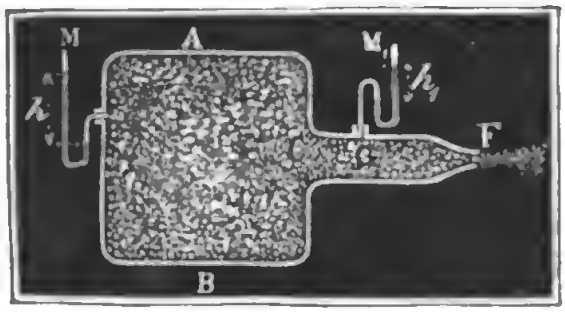
Ausfluß der ruhigen Luft.

$v = 1258 \cdot \sqrt{(1 + 0{,}00367 \cdot 120) \cdot 0{,}16875} = 1258 \cdot \sqrt{1{,}4404 \cdot 016875}$ $= 620{,}2$ Fuß. Nun iſt aber der Inhalt der Mündung $= \frac{\pi}{4}(\frac{1}{8})^2 = \frac{\pi}{256}$ $= 0{,}01227$ Quadratfuß, daher folgt die Ausflußmenge $Q = 0{,}01227 \cdot 620{,}2$ $= 7{,}61$ Cubikfuß Unter dem inneren Drucke gemeſſen, iſt dieſelbe $= \frac{272}{322} \cdot 7{,}61 = 6{,}43$ Cubikfuß, und auf den mittleren Barometerſtand von 28 Zoll und auf 0° Wärme reducirt, iſt das Ausflußquantum $= 7{,}61 \cdot \frac{272}{280} \cdot \frac{1}{1{,}4404} = 5.13$ Cubikfuß.

Ausfluß der bewegten Luft.

§. 393. Die gefundenen Ausflußformeln ſetzen voraus, daß die Preſſung p_1 oder der Manometerſtand h an einer Stelle gemeſſen worden ſei, wo die Luft in Ruhe befindlich iſt, oder eine ſehr ſchwache Bewegung hat, mißt man aber p_1 oder h_1 an einem Orte, wo die Luft in Bewegung iſt, communicirt z. B. das Manometer M_1 mit der in einer Leitungsröhre CF. Fig. 585 befindlichen Luft, ſo hat man auch noch die lebendige Kraft der ankommenden Luft zu berückſichtigen. Iſt nun c die Geſchwindigkeit der vor der Manometermündung vorbeigehenden Luft, ſo hat man demnach zu ſetzen: $Q\gamma \cdot \frac{v^2}{2g} = Q\gamma \cdot \frac{c^2}{2g} + Qp\ Log.\ nat. \left(\frac{p_1}{p}\right)$, oder, da wenn F der Querſchnitt der Mündung und G der der Röhre oder des an der Manometermündung vorbeigehenden Stromes bezeichnet, nach dem Mariotte'ſchen Geſetze $\frac{Gc}{Fv} = \frac{p}{p_1}$, oder $Gcp_1 = Fvp$,

Fig. 585.



also $c = \frac{F}{G} \cdot \frac{p}{p_1} v$ iſt, $Q\gamma \left[1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2 \left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}$ $= Qp\ Log.\ nat. \left(\frac{p_1}{p}\right)$, und die in Frage ſtehende Ausflußgeſchwindigkeit

$$v = \frac{\sqrt{2g\frac{p}{\gamma} Log.\ nat. \left(\frac{p_1}{p}\right)}}{\sqrt{1 - \left(\frac{Fp}{Gp_1}\right)^2}}.$$

Es ſtellt ſich alſo auch hier, genau wie beim Ausfluſſe des Waſſers aus Gefäßen, die Ausflußgeſchwindigkeit um ſo größer heraus, je größer das Verhältniß $\frac{F}{G}$ zwiſchen dem Querſchnitte der Mündung und dem der Röhre oder des

ankommenden Luftſtromes iſt. Man erſieht auch hieraus, daß unter übrigens gleichen Verhältniſſen der Manometerſtand p_1 um ſo kleiner ausfällt, je enger die Leitungsröhre oder je größer die Geſchwindigkeit der durch ſie fortgeführten Luft iſt. Ausfluß der bewegten Luft.

Beiſpiel. 1) Ein auf einer $3\frac{1}{2}$ Zoll weiten Windleitung ſitzendes Queckſilbermanometer ſteht auf $2\frac{1}{2}$ Zoll, während der Wind vom coniſch zulaufenden Ende derſelben durch eine runde 2 Zoll weite Mündung ausſtrömt, mit welcher Geſchwindigkeit findet dieſes Ausſtrömen ſtatt? Iſt der äußere Barometerſtand $27\frac{1}{4}$ Zoll, ſo hat man $\frac{p_1}{p} = \frac{27\frac{1}{4}+2\frac{1}{2}}{27\frac{1}{4}} = \frac{30}{27,5} = {}^{12}/_{11}$ und $\frac{Fp}{Gp_1} = \left(\frac{2}{3,5}\right)^2 \cdot \frac{11}{12} = \frac{16 \cdot 11}{49 \cdot 12} = \frac{44}{147}$; es iſt daher die theoretiſche Ausflußgeſchwindigkeit bei 10° Windtemperatur:

$$v = \frac{1258 \cdot \sqrt{1,0367 \cdot Log.\ nat.\ ({}^{12}/_{11})}}{\sqrt{1-({}^{44}/_{147})^2}} = \frac{1258\sqrt{1,0367 \cdot 0,087}}{\sqrt{0,9104}} = 396 \text{ Fuß.}$$

2) Die Spannung p_2 im Windregulator, wo der Wind ohne Bewegung iſt, ergiebt ſich durch die Formel $Log.\ nat.\left(\frac{p_2}{p}\right) = \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{\gamma}{p}$, oder $Log.\ nat.\ p_2$

$$= Log.\ nat\ p + \frac{Log.\ nat.\left(\frac{p_1}{p}\right)}{1-\left(\frac{Fp}{Gp_1}\right)^2}, \text{ alſo in dem vorliegenden Falle}$$

$= Log.\ nat.\ 27,5 + \frac{0,087}{0,9104} = 3,3142 + 0,0965 = 3,4107$. Hieraus folgt $p_2 = 30,3$ Zoll.

§. 394. Wenn ein Windreſervoir keinen Zufluß erhält, während durch eine Mündung in demſelben ununterbrochenes Ausſtrömen ſtatt hat, ſo nimmt die Dichtigkeit und Spannung allmälig ab, und es fällt daher auch die Ausflußgeſchwindigkeit während des Ausfluſſes immer kleiner und kleiner aus. In welchem Verhältniſſe nun dieſe Abnahme zur Zeit und zur Ausflußmenge in derſelben ſteht, läßt ſich auf folgende Weiſe ermitteln. Ausfluß unter abnehmendem Drucke.

Es ſei das Volumen des Reſervoirs V, der anfängliche Manometerſtand $= h_0$, und der Manometerſtand am Ende einer gewiſſen Zeit t, $= h_n$, der äußere Barometerſtand aber $= b$. Dann iſt das auf den äußeren Druck reducirte Luft- oder Windquantum im Reſervoir anfangs $= \frac{V(b+h_0)}{b}$ und am Ende der Zeit t, $= \frac{V(b+h_n)}{b}$, und folglich das innerhalb der Zeit t ausgefloſſene und unter dem äußeren Drucke gemeſſene Windquantum:

$$V_n = \frac{V(b+h_0)}{b} - \frac{V(b+h_n)}{b} = \frac{V(h_0-h_n)}{b}; \text{ umgekehrt iſt aber der}$$

dem Ausflußquantum V_n entſprechende Manometerſtand

$$h_n = h_0 - \frac{V_n}{V} \cdot b.$$

Ausfluß unter abnehmendem Druck.

Nehmen wir vier Intervalle an, ſetzen wir den anfänglichen Manometerſtand h_0, den am Ende der Zeit $t = h_4$, und ſetzen wir

$h_1 = h_0 - \frac{h_0 - h_4}{4}$, $h_2 = h_0 - {}^2/_4 (h_0 - h_4)$ und

$h_3 = h_0 - {}^3/_4 (h_0 - h_4)$, ſo erhalten wir mittels der Simpſon'ſchen Regel die Zeit

$$t = \frac{V(h_0 - h_4)}{12 F b \sqrt{2g\frac{p}{\gamma}}}\left(\frac{1}{\sqrt{Log.nat.\left(\frac{b+h_0}{b}\right)}} + \frac{4}{\sqrt{Log.nat.\left(\frac{b+h_1}{b}\right)}} + \frac{2}{\sqrt{Log.nat.\left(\frac{b+h_2}{b}\right)}} + \frac{4}{\sqrt{Log.nat.\left(\frac{b+h_3}{b}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{Log.nat.\left(\frac{b+h_4}{b}\right)}}\right).$$

Bei mäßigen Preſſungen oder Manometerſtänden läßt ſich

$$Log.nat\left(\frac{b+h}{b}\right) = \frac{h}{b}\left(1 - \frac{h}{2b}\right),$$

$$\text{folglich } \sqrt{Log.nat.\left(\frac{b+h}{b}\right)} = \left(1 - \frac{h}{4b}\right)\sqrt{\frac{h}{b}}$$

$$\text{und } \frac{1}{\sqrt{Log.nat.\left(\frac{b+h}{b}\right)}} = \left(1 + \frac{h}{4b}\right)\sqrt{\frac{b}{h}} \text{ ſetzen.}$$

Nehmen wir nun n Intervalle an, ſetzen wir alſo die Ausflußmenge für ein Intervall: $\frac{V_1}{n} = \frac{V(h_0 - h_n)}{nb}$, ſo bekommen wir das entſprechende

Zeitelement $\tau = \frac{V(h_0 - h_n)}{nb} : F\sqrt{2g\frac{p}{\gamma} Log.nat.\left(\frac{b+h}{b}\right)}$

$$= \frac{V(h_0 - h_n)}{nb} \cdot \frac{\left(1 + \frac{h}{4b}\right)\sqrt{\frac{b}{h}}}{F\sqrt{2g\frac{p}{\gamma}}}$$

$$= \frac{V(h_0 - h_n)}{n.F\sqrt{2gb\frac{p}{\gamma}}} \cdot \frac{\left(h^{-1/2} + \frac{h^{1/2}}{4b}\right)}{}.$$

Setzen wir nun ſtatt h; h_0, h_1, h_2 . . . . h_n ein, ſo erhalten wir die

Summe aller $\left(\frac{h_0-h_n}{n}\right)h^{-1/2} = 2(h_0^{1/2}-h_n^{1/2}) = 2\left(\sqrt{h_0}-\sqrt{h_n}\right)$ Ausfluß unter abnehmendem Drucke.

und die Summe aller $\left(\frac{h_0-h_n}{n}\right)h^{1/2} = \frac{2}{3}(h_0^{3/2}-h_n^{3/2})$

$= \frac{2}{3}(\sqrt{h_0^3}-\sqrt{h_n^3})$, weshalb die Summe aller Zeittheilchen oder die ganze Zeit, innerhalb welcher h_n in h_0 übergeht, und die Windmenge $V_n = \frac{V(h_0-h_n)}{b}$ ausſtrömt,

$$t = \frac{2V}{F\sqrt{2gb\frac{p}{\gamma}}}\left[\left(\sqrt{h_0}-\sqrt{h_n}\right)+\frac{1}{12b}\left(\sqrt{h_0^3}-\sqrt{h_n^3}\right)\right], \text{ oder}$$

$$= \frac{2V}{F\sqrt{2gb\frac{p}{\gamma}}}\left(\sqrt{h_0}-\sqrt{h_n}\right)\left(1+\frac{h_0+\sqrt{h_0h_n}+h_n}{12b}\right), \text{ annähernd}$$

$$= \frac{2V}{F\sqrt{2gb\frac{p}{\gamma}}}\left(\sqrt{h_0}-\sqrt{h_n}\right)\left(1+\frac{h_0+h_n}{8b}\right).$$

Beiſpiel. Der 50 Fuß lange und 5 Fuß weite cylindriſche Windregulator eines Gebläſes iſt mit Wind angefüllt, deſſen Manometerſtand $h = 10$ Zoll und Thermometerſtand 6° beträgt. Wenn nun ein Ausſtrömen des Windes in einem Raume, deſſen Barometerſtand 27 Zoll iſt, durch eine 1 Zoll weite runde Mündung ſtattfindet, ſo entſteht die Frage, in welcher Zeit der Manometerſtand auf 7 Zoll herabſinkt, und welches die entſprechende Ausflußmenge iſt? Das Volumen des Keſſels iſt $= \frac{\pi}{4}\cdot 5^2\cdot 50 = 1250\cdot\frac{\pi}{4} = 981{,}75$ Cubikfuß, daher die unter dem äußeren Drucke gemeſſene Ausflußmenge $V_1 = \left(\frac{h_0-h_n}{b}\right)V = \left(\frac{10-7}{27}\right)\cdot 981{,}75$

$= 109{,}08$ Cubikfuß. Nun iſt $\sqrt{2g\frac{p}{\gamma}} = 1258\sqrt{1+0{,}00367\cdot t}$

$= 1258\sqrt{1{,}02202} = 1272$, und $F = \frac{\pi}{4}(1/12)^2 = \frac{\pi}{576} = 0{,}005454$ Quadratfuß, daher folgt die in Frage ſtehende Ausflußzeit

$$t = \frac{2.981{,}75}{0{,}005454\cdot 1272}\left(\sqrt{\frac{10}{27}}-\sqrt{\frac{7}{27}}\right)\cdot\left(1+\frac{10+7}{8\cdot 27}\right)$$

$$= \frac{1963{,}5}{5{,}454\cdot 1{,}272}\cdot 0{,}0994\cdot 1{,}079 = 30{,}3 \text{ Secunden.}$$

§. 395. Die Contractionserſcheinungen, welche wir beim Ausfluſſe des Waſſers aus Gefäßen kennen gelernt haben, finden ſich auch beim Ausſtrömen der Luft aus Gefäßen vor. Iſt die Ausflußöffnung in einer dünnen Wand ausgeſchnitten, ſo hat der durch ſie gehende Luft- oder Windſtrahl einen kleineren Querſchnitt, als die Mündung ſelbſt, und es iſt deshalb auch die Ausflußmenge kleiner als das Product Fv aus Querſchnitt Ausflußcoefficienten.

Ausfluß-coefficienten.

F der Mündung und theoretiſche Geſchwindigkeit v. Setzen wir wieder das Verhältniß $\frac{F_1}{F}$ des Querſchnittes F_1 vom Strahle zu dem der Mündung F, $= \mu$, ſo haben wir auch wie beim Waſſer die effective Ausflußmenge $Q_1 = \mu Q = F_1 v = \mu F v = \mu F \sqrt{2g \frac{p}{\gamma} Log.nat.\left(\frac{p_1}{p}\right)}$.

Nach des Verfaſſers Berechnungen der Koch'ſchen Verſuche iſt bei Manometerſtänden von $\frac{1}{200}$ bis $\frac{1}{3}$ Atmoſphäre im Mittel $\mu = 0{,}58$ zu ſetzen.

Ebenſo iſt auch das effective Ausflußquantum beim Ausſtrömen der Luft durch kurze cylindriſche Anſatzröhren kleiner als das theoretiſch beſtimmte, man hat alſo auch hier das letztere durch eine Erfahrungszahl, den Ausflußcoefficienten μ, zu multipliciren, um das erſtere zu erhalten; nur iſt hier μ nicht das Querſchnittsverhältniß $\frac{F_1}{F}$, ſondern das Verhältniß $\frac{v_1}{v}$ der effectiven Ausflußgeſchwindigkeit v_1 zur theoretiſchen v. Die Koch'ſchen Verſuche geben bei den oben angegebenen Preſſungen für das Ausſtrömen durch cylindriſche Anſatzröhren, welche höchſtens 6mal ſo lang als weit ſind, im Mittel $\mu = 0{,}74$.

Coniſch convergente Anſatzröhren, ähnlich wie Düſen bei Gebläſen, geben noch größere Ausflußcoefficienten; nach den Koch'ſchen Verſuchen giebt eine Röhre von 6° Seitenconvergenz, wenn ſie 5mal ſo lang als im Mittel weit iſt, den mittleren Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}85$.

Hiernach iſt für den Ausfluß der Luft durch Mündungen in der dünnen Wand die effective Ausflußmenge, gemeſſen unter dem äußeren Drucke:

$Q_1 = 729{,}6\, F\left(1 - \frac{h}{4b}\right)\sqrt{(1 + 0{,}00367\, t)\, \frac{h}{b}}$ Cubikfuß, für den Ausfluß durch kurze cylindriſche Anſatzröhren:

$Q_1 = 931\, F\left(1 - \frac{h}{4b}\right)\sqrt{(1 + 0{,}00367\, t)\, \frac{h}{b}}$ Cubikfuß, und für den durch die coniſche Anſatzröhre von 6° Convergenz:

$Q_1 = 1069\, F\left(1 - \frac{h}{4b}\right)\sqrt{1 + 0{,}00367\, t)\, \frac{h}{b}}$ Cubikfuß.

Beiſpiel. Wenn bei einem Gebläſe die Mündungen der beiden coniſchen Düſen zuſammen 3 Quadratzoll Inhalt haben, wenn ferner der Manometerſtand 3 Zoll, der äußere Barometerſtand aber 27½ Zoll und die Temperatur des Windes 15° beträgt, ſo iſt das Ausflußquantum

$Q_1 = 1069 \,.\, {}^3/_{144} \left(1 - \frac{3}{4\,.\,27{,}5}\right)\sqrt{(1 + 0{,}00367\,.\,15)\,\frac{3}{27{,}5}}$

$= 22{,}27\,.\,\frac{107}{110}\sqrt{1{,}055\,.\,{}^3/_{55}} = 21{,}66\sqrt{0{,}1151} = 7{,}34$ Cubikfuß.

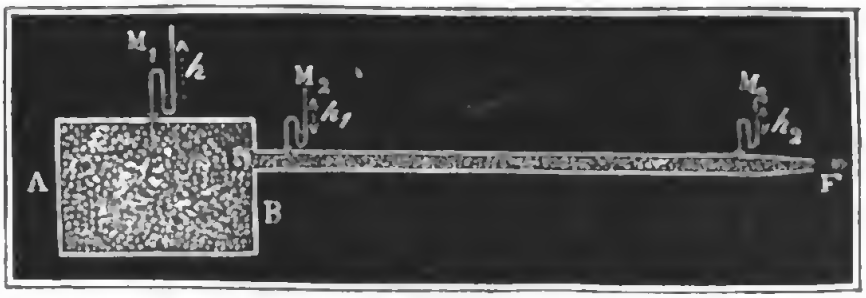
Ausfluß-coefficienten.

Anmerkung. Verſuche über den Ausfluß der Luft ſind angeſtellt worden von Young, Schmidt, Lagerhjelm, Koch, D'Aubuiſſon, Buſſ, und in neueſter Zeit von Pecqueur, Saint-Venant und Wantzel. In Betreff der Verſuche von Young und Schmidt iſt nachzuſehen in Gilbert's Annalen Band 22, 1801, und Band 6, 1820, und in Poggendorff's Annalen, Band 2, 1824, in Betreff derjenigen von Koch und Buſſ aber in den Studien des göttingſchen Vereines bergmänniſcher Freunde, Bd. 1, 1824; Bd. 3, 1833; Bd. 4, 1837 und Bd. 5, 1838; ferner in Poggendorff's Annalen, Bd. 27, 1836 und Bd. 40, 1837. Die Lagerhjelm'ſchen Verſuche werden behandelt in dem ſchwediſchen Werke Hydrauliska Försök af Lagerhjelm, Forselles och Kallstenius, 1 Delen, Stockholm 1818. Die Verſuche D'Aubuiſſon's lernt man kennen in den Annales des Mines, Tome 11, 1825, Tome 13, 1826, Tome 34, 1827, dann aber auch in D'Aubuiſſon's Traité d'Hydraulique. Von den neueſten in Frankreich angeſtellten Verſuchen handelt Poncelet in einer Note sur les expériences de M. Pecqueur relatives à l'écoulement de l'air dans les tubes etc. der Comptes rendus und hiervon im Auszuge das polytechniſchen Centralblatt, Band 6, 1845. Aus dieſen Verſuchen folgert Poncelet, daß die Luft bei ihrem Ausfluſſe denſelben Geſetzen folge, wie das Waſſer. Die meiſten dieſer Verſuche ſind mit ſehr engen Mündungen angeſtellt worden, weshalb ſie wohl ſchwerlich den Anſprüchen der Praxis Genüge leiſten. Am meiſten Beachtung verdienen die Verſuche von D'Aubuiſſon und Koch, und nächſtdem vielleicht die noch von Pecqueur, und am ausgedehnteſten ſind die von Koch. Leider findet aber unter den Ergebniſſen aller dieſer Verſuche nicht die erwünſchte Uebereinſtimmung ſtatt, namentlich weichen auch die von D'Aubuiſſon gefundenen Ausflußcoefficienten von denen, welche ſich aus den Koch'ſchen berechnen laſſen, bedeutend ab. Die Gründe, weswegen ich den Koch'ſchen Coefficienten am meiſten Zutrauen ſchenke, ſind beſonders in der Allgemeinen Maſchinenencyclopädie, Artikel »Ausfluß« und dann auch in einem hiermit verwandten Aufſatze des Verfaſſers in Poggendorff's Annalen, Bd. 51, 1840, auseinandergeſetzt worden. Einige Verſuche des Verfaſſers über den Ausfluß der Luft theilt Herr Bornemann in der Zeitſchrift »der Ingenieur« mit.

Ausfluß durch Röhren.

§. 396. Bewegt ſich die Luft durch eine lange Röhre *CF*, Fig. 586, ſo hat ſie einen Reibungswiderſtand wie das Waſſer zu überwinden, auch

Fig. 586.



läßt ſich dieſer Widerſtand durch die Höhe einer Luftſäule meſſen, die der Ausdruck $h_n = \zeta \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$, worin genau, wie bei den Waſſerleitungen, v die Geſchwindigkeit, l die Länge, d die Weite der Röhre und ζ den

Ausfluß durch Röhren.

durch Verſuche zu beſtimmenden Widerſtandscoefficienten bezeichnen, angiebt. Vielfältige Verſuche von Girard, D'Aubuiſſon, Buff und Pecqueur führen auf den mittleren Werth $\zeta = 0{,}024$. Es iſt alſo hiernach der durch die Reibung der Luft in den Röhren erzeugte Widerſtand durch die Höhe $h_n = 0{,}024 \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$ einer Luft- oder durch die Höhe $h_n = 0{,}0000023 \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$ einer Queckſilberſäule zu meſſen, und es wird der Manometerſtand am Ende einer Windleitung um die letzte Höhe tiefer ſein als am Anfange der Leitung.

Steht am Ende einer Windleitung von der Weite d ein Manometer auf h_2, während der Wind durch eine Oeffnung von der Weite d_1 ausſtrömt, ſo iſt nach dem Früheren die Ausflußgeſchwindigkeit

$$v = \frac{\sqrt{2g \frac{p}{\gamma} Log.\,nat. \left(\frac{b + h_2}{b}\right)}}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{b + h_2}\right)^2 \left(\frac{d_1}{d}\right)^4}};$$ iſt aber h_1 der Manometerſtand am Anfange der Leitung, ſo hat man

$$\frac{p}{\gamma} Log.\,nat. \left(\frac{b+h_1}{b}\right) = \left[1 - \left(\frac{b}{b+h_1}\right)^2 \left(\frac{d_1}{d}\right)^4 + 0{,}024 \frac{l}{d} \left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right] \frac{v^2}{2g},$$

weil die Geſchwindigkeit in der Röhre $= \frac{d_1^2}{d^2} v$ iſt; daher folgt in dieſem Falle

$$v = \frac{\sqrt{2g \frac{p}{\gamma} Log.\,nat. \left(\frac{b+h_1}{b}\right)}}{\sqrt{1 + \left[0{,}024 \frac{l}{d} - \left(\frac{b}{b+h_1}\right)^2\right] \left(\frac{d_1}{d}\right)^4}}.$$

Wird endlich der Manometerſtand h im Reſervoir am Anfange der Leitung gemeſſen, wo die Luft in Ruhe befindlich angenommen werden kann, ſo hat man

$$v = \frac{\sqrt{2g \frac{p}{\gamma} Log.\,nat. \left(\frac{b+h}{b}\right)}}{\sqrt{1 + 0{,}024 \frac{l d_1^4}{d^5}}}.$$

Nehmen wir noch mit auf die Widerſtände beim Ein- und Austritt Rückſicht, und ſetzen wir den Widerſtandscoefficienten für den Eintritt in die Leitung $= \zeta_1$, den für den Austritt oder für das Mundſtück am Ende derſelben aber $= \zeta_2$, ſo erhalten wir

$$\frac{p}{\gamma} Log.\,nat. \left(\frac{b+h}{b}\right) = \left[1 + \zeta_2 + \left(\zeta_1 + \zeta \frac{l}{d}\right) \left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right] \frac{v^2}{2g},$$

Ausfluß durch Röhren

und daher umgekehrt, $v = \sqrt{\frac{2g\frac{p}{\gamma}\ Log.nat.\left(\frac{b+h}{b}\right)}{1+\zeta_2+\left(\zeta_1+\zeta\frac{l}{d}\right)\left(\frac{d_1}{d}\right)^4}}$

$$= 1258\sqrt{\frac{(1+0{,}00367\ t)\ Log.\ nat.\left(\frac{b+h}{b}\right)}{1+\zeta_2+\left(\zeta_1+0{,}024\ \frac{l}{d}\right)\left(\frac{d_1}{d}\right)^4}}\ \text{Fuß.}$$

Je nachdem der Einmündungspunkt um s tiefer oder höher liegt, als der Ausmündungspunkt, hat man unter der Wurzelgröße im Nenner noch $\pm s$ zu addiren. Uebrigens können noch andere Hinderniſſe in der Röhre, wie Krümmungen, Verengungen und Erweiterungen u. ſ. w. vorkommen. Ueber dieſe Hinderniſſe liegen genügende Erfahrungen zwar nicht vor, allein es läßt ſich doch mit großer Wahrſcheinlichkeit annehmen, daß dieſe Widerſtände nicht bedeutend anders ausfallen, als beim Waſſer, weil auch die Ausflußcoefficienten und der Reibungscoefficient bei der Luft und beim Waſſer ziemlich dieſelben ſind. So lange alſo neue ausführliche Verſuche hierüber nicht angeſtellt worden ſind, kann man von den für das Waſſer gefundenen Widerſtandscoefficienten bei Unterſuchungen über die Bewegung und den Ausfluß der Luft mit ziemlicher Sicherheit Gebrauch machen.

Beiſpiel. In dem Regulator am Kopfe einer 320 Fuß langen und 4 Zoll weiten Windleitung ſteht das Queckſilbermanometer auf 3,1 Zoll, während der äußere Barometerſtand 27,2 Zoll beträgt, es iſt ferner die Mündungsweite des coniſch zuſammengezogenen Endes der Leitung 2 Zoll und die Temperatur des Windes 20°, welches Windquantum liefert dieſe Leitung? Es iſt

$(1+0{,}00367\ t)\ Log.\ nat.\left(\frac{b+h}{b}\right) = (1+0{,}00367\ .\ 20)\ Log.\ nat.\left(\frac{30{,}3}{27{,}2}\right)$
$= 1{,}0734\ (5{,}7137 - 5{,}6058) = 0{,}1158$, ſetzen wir ferner $\zeta_1 = 0{,}83$ und $\zeta_2 = \frac{1}{\mu^2} - 1 - \frac{1}{0{,}85^2} - 1 = 0.384$, ſo erhalten wir $1+\zeta_2+\left(\zeta_1+0{,}024\frac{l}{d}\right)\left(\frac{d_1}{d}\right)^4$
$= 1{,}384 + \left(0{,}83+0{,}024\ .\ \frac{320}{1/3}\right)\left(\frac{2}{4}\right)^4 = 1{,}384 + 23{,}87\ .\ \frac{1}{16} = 2{,}876$, daher die Ausflußgeſchwindigkeit $v = 1285\sqrt{\frac{0{,}1'58}{2{,}876}} = 2.7{,}8$ Fuß, und die Ausflußmenge $Q = \frac{\pi d_1^2}{4}\ v = \frac{\pi}{4}\ .\ \frac{257{,}8}{36} = 5\,61$ Cubikfuß.

Siebentes Kapitel.

Von der Bewegung des Waſſers in Kanälen und Flüſſen.

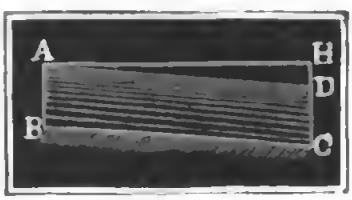
Fließende Waſſer.

§. 397. Die Lehre von der Bewegung des Waſſers in Kanälen und Flüſſen macht den zweiten Haupttheil der Hydraulik aus. Das Waſſer fließt entweder in einem natürlichen oder in einem künſtlichen Bette (franz. lit; engl. bed). Im erſten Falle bildet es Ströme, Flüſſe, Bäche, im zweiten Kanäle, Gräben und Gerinne. Bei der Theorie der Bewegung der fließenden Waſſer kommt auf dieſen Unterſchied nichts, oder nur wenig an.

Das Flußbette beſteht aus dem Grundbette oder der Sohle (franz. font du lit; engl. bottom of the channel), und aus den beiden Ufern (franz. bords; engl. shores). Durch eine Ebene winkelrecht gegen die Bewegungsrichtung des fließenden Waſſers ergiebt ſich der Querſchnitt (franz. section; engl. perpendicular-section) deſſelben. Der Umfang deſſelben iſt das Quer- oder Breitenprofil, welches wieder aus dem Waſſer- und dem Luftprofile beſteht. Eine Vertikalebene in der Richtung des fließenden Waſſers giebt den Längendurchſchnitt und das Längenprofil (franz. profil; engl. profile) deſſelben. Unter Abhang (franz. pente; engl. declivity, slope) eines fließenden Waſſers verſteht man den Neigungswinkel ſeiner Oberfläche gegen den Horizont. Um dieſen auf eine beſtimmte Länge eines fließenden Waſſers anzugeben, dient das Gefälle (franz. chute; engl fall), welches der Vertikalabſtand der beiden Endpunkte im Waſſerſpiegel einer beſtimmten Flußſtrecke iſt. Röſche iſt das Gefälle für die Längenerſtreckung = 1. Für die Flußſtrecke $AD = l$, Fig. 587, iſt BC das Grundbette, $DH = h$, das Gefälle und der Winkel $DAH = \delta$, der Abhang; die Röſche aber iſt

$$\sin. \delta = \frac{h}{l}.$$

Fig. 587.



Anmerkung. Das Gefälle der Bäche und Flüſſe iſt ſehr verſchieden. So hat z. B. die Elbe auf eine deutſche Meile Erſtreckung von Hohenelbe bis Podiebrad 57 Fuß, von da bis Leitmeritz 9 Fuß, von da bis Mühlberg im Mittel 5,8 und von da bis Magdeburg 2,5 Fuß Gefälle. Gebirgsbäche haben auf die Meile ein Gefälle von 40 bis 400 Fuß. Näheres hierüber ſiehe: »Vergleichende hydrographiſche Tabellen u. ſ. w von Stranz«. Kanäle oder andere künſtliche Waſſerleitungen erhalten viel kleinere Gefälle. Hier iſt die Röſche meiſtens unter 0,001, oft 0,0001 und noch kleiner. Mehr hierüber im zweiten Theile.

§. 398. Die Geſchwindigkeit des Waſſers in einem und demſelben Querprofile iſt an verſchiedenen Stellen ſehr verſchieden. Die Adhäſion des Waſſers an dem Bette und der Zuſammenhang der Waſſertheile unter einander bewirken, daß die den Bettwänden näher liegenden Waſſertheile in ihrer Bewegung mehr aufgehalten werden und daher langſamer fließen, als die entfernteren. Aus dieſem Grunde nimmt denn die Geſchwindigkeit von der Oberfläche nach dem Bette zu ab, und es iſt dieſelbe am Boden und nahe den Ufern am kleinſten. Die größte Geſchwindigkeit befindet ſich bei geraden Flußſtrecken meiſt in der Mitte oder an derjenigen Stelle in der freien Oberfläche des Waſſers, wo es die größte Tiefe hat. Man nennt diejenige Stelle, wo das Waſſer die größte Geſchwindigkeit hat, den Stromſtrich und die tiefſte Stelle im Bette die Stromrinne. Verſchiedene Geſchwindigkeiten eines Querprofiles.

Bei Krümmungen iſt der Stromſtrich in der Regel nahe dem concaven Ufer.

Die mittlere Geſchwindigkeit des Waſſers innerhalb eines Querprofiles iſt nach §. 335

$$c = \frac{Q}{F} = \frac{\text{Waſſerquantum pr. Sec.}}{\text{Inhalt des Querſchnittes}}.$$

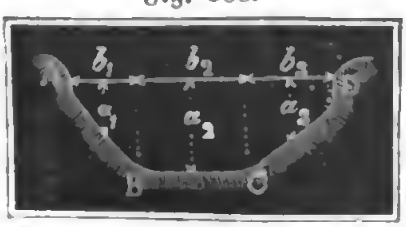
Außerdem läßt ſich die mittlere Geſchwindigkeit auch noch aus den Geſchwindigkeiten c_1, c_2, c_3 u. ſ. w. der einzelnen Theile des Querprofiles und aus den Inhalten F_1, F_2, F_3 u. ſ. w. der letzteren berechnen. Es iſt nämlich $Q = F_1c_1 + F_2c_2 + F_3c_3 + \ldots$, und daher auch

$$c = \frac{F_1c_1 + F_2c_2 + \ldots}{F_1 + F_2 + \ldots}.$$

Außer der mittleren Geſchwindigkeit führt man auch die mittlere Waſſertiefe, alſo diejenige Tiefe a ein, welche ein Querprofil an allen Stellen haben müßte, damit es ebenſo viel Inhalt erhielte, als es bei den veränderlichen Tiefen a_1, a_2, a_3 u. ſ. w. wirklich hat. Es iſt alſo hiernach

$$a = \frac{F}{b} = \frac{\text{Inhalt des Querſchnittes}}{\text{Breite des Querſchnittes}}.$$

Fig. 588.



Sind die einzelnen Breitentheilen b_1, b_2, b_3 u. ſ. w. entſprechenden mittleren Tiefen a_1, a_2, a_3 u. ſ. w., Fig. 588, ſo hat man $F = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots$, und daher auch $a = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots}{b_1 + b_2 + \ldots}$.

Endlich iſt auch $c = \frac{a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \ldots}{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots}$, und bei gleicher Größe der Theile b_1, b_2 u. ſ. w., $c = \frac{a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots}{a_1 + a_2 + \ldots}$.

Ein Fluß oder Bach iſt im Beharrungszuſtande (franz. perma-

Verſchiedene Geſchwindigkeiten eines Querprofiles.

nence; engl. permanency), wenn durch jeden ſeiner Querſchnitte in gleicher Zeit eine gleiche Waſſermenge fließt, wenn alſo Q oder das Product Fc aus dem Inhalte des Querprofiles und aus der mittleren Geſchwindigkeit auf die ganze Flußſtrecke eine unveränderliche Zahl iſt. Hieraus folgt nun das einfache Geſetz: bei der permanenten Bewegung des Waſſers verhalten ſich die mittleren Geſchwindigkeiten innerhalb zweier Querprofile umgekehrt wie die Inhalte dieſer Profile.

Beiſpiele. 1) An dem Querprofile *ABCD*, Fig. 588, eines Kanales hat man gefunden:

Breitentheile: . . . . . $b_1 = 3{,}1$ Fß. $b_2 = 5{,}4$ Fß. $b_3 = 4{,}3$ Fß.
mittlere Tiefen: . . . . . $a_1 = 2{,}5$ " $a_2 = 4{,}5$ " $a_3 = 3{,}0$ "
entſprechende mittlere Geſchwindigkeiten: $c_1 = 2{,}9$ " $c_2 = 3{,}7$ " $c_3 = 3{,}2$ "

daher läßt ſich ſetzen der Inhalt dieſes Profiles $F = 3{,}1 \,.\, 2{,}5 + 5{,}4 \,.\, 4{,}5 + 4{,}3 \,.\, 3{,}0 = 44{,}95$ Quadratfuß, ferner die Waſſermenge

$Q = 3{,}1 \,.\, 2{,}5 \,.\, 2\,9 + 5{,}4 \,.\, 4{,}5 \,.\, 3{,}7 + 4{,}3 \,.\, 3{,}0 \,.\, 3{,}2 = 153{,}665$ Cubikfuß, und die mittlere Geſchwindigkeit $c = \frac{Q}{F} = \frac{153{,}665}{44{,}95} = 3{,}419$ Fuß.

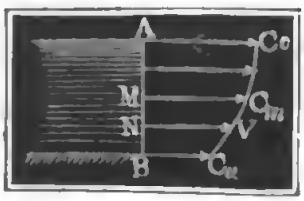
2) Wenn ein Graben 4,5 Cubikfuß Waſſer mit einer mittleren Geſchwindigkeit c von 2 Fuß fortführen ſoll, ſo hat man ihm ein Querprofil von $\frac{4{,}5}{2} = 2{,}25$ Quadratfuß Inhalt zu geben. 3) Wenn ein und derſelbe Fluß an einer Stelle bei 560 Fuß Breite und 9 Fuß mittlerer Tiefe eine mittlere Geſchwindigkeit von $2\frac{1}{4}$ Fuß hat, ſo wird er an einer Stelle bei 320 Fuß Breite und 7,5 Fuß mittlerer Tiefe die mittlere Geſchwindigkeit

$$c = \frac{560 \,.\, 9}{320 \,.\, 7{,}5} \,.\, 2{,}25 = \frac{567}{120} = 4{,}725 \text{ Fuß haben.}$$

Mittlere Geſchwindigkeit.

§. 399. Wenn man die Waſſertiefe an irgend einer Stelle eines fließenden Waſſers in gleiche Theile theilt, und die entſprechenden Geſchwindigkeiten als Ordinaten aufträgt, ſo erhält man eine ſogenannte Stromgeſchwindigkeitsſcala. *AB*, Fig. 589. Obwohl es als ausgemacht anzuſehen iſt, daß das Geſetz dieſer Scala oder der Geſchwindigkeitsveränderung durch irgend eine Curve, wie z. B. nach Gerſtner durch eine Ellipſe u. ſ. w., ausgedrückt wird, ſo läßt ſich doch auch ohne einen großen Fehler befürchten zu müſſen, eine gerade Linie ſubſtituiren, oder annehmen, daß die Geſchwindigkeit nach der Tiefe gleichmäßig abnehme, weil die Abnahme der Geſchwindigkeit nach unten immer nur eine kleine iſt. Aus den Verſuchen von Ximenes, Brünnings und Funk ergiebt ſich, daß die mittlere Geſchwindigkeit in einem Perpendikel $c_m = 0{,}915\, c_0$ iſt, wenn c_0 die Geſchwindigkeit an der Oberfläche oder die Maximalgeſchwindigkeit bezeichnet. Es nimmt alſo hiernach die Geſchwindigkeit von oben bis zur Mitte

Fig. 589.



M um $c_0 - c_m = (1 - 0{,}915)\, c_0 = 0{,}085\, c_0$ ab, und es läßt ſich folglich die Geſchwindigkeit unten oder am Fußpunkte des Perpendikels $c_u = c_0 - 2 \,.\, 0{,}085\, c_0 = (1 - 0{,}170)\, c_0 = 0{,}83\, c_0$ ſetzen. Iſt nun die ganze Tiefe $= a$, ſo hat man, bei Annahme einer der geraden Linie entſprechenden Geſchwindigkeitsſcala für eine Tiefe $AN = x$ unter dem Waſſer die entſprechende Geſchwindigkeit

Mittlere Geſchwindigkeit.

$$v = c_0 - (c_0 - c_u)\,\frac{x}{a} = \left(1 - 0{,}17\,\frac{x}{a}\right) c_0.$$

Sind nun noch c_0, c_1, c_2, ... die Oberflächengeſchwindigkeiten eines ganzen Querprofiles von nicht ſehr veränderlicher Tiefe, ſo hat man die entſprechenden Geſchwindigkeiten in der mittleren Tiefe: $0{,}915\, c_0$, $0{,}915 c_1$, $0{,}915\, c_2$, und daher die mittlere Geſchwindigkeit im ganzen Querprofile $c = 0{,}915\,\frac{(c_0 + c_1 + c_2 + \ldots c_n)}{n}$. Nehmen wir endlich an, daß die Geſchwindigkeit vom Stromſtriche aus nach den Ufern zu ebenſo abnehme wie nach der Tiefe zu, ſo können wir wieder die mittlere Oberflächengeſchwindigkeit $\frac{c_0 + c_1 + .. + c_n}{n} = 0{,}915\, c_0$ ſetzen, und erhalten ſo die mittlere Geſchwindigkeit im ganzen Querprofile:

$$c = 0{,}915 \,.\, 0{,}915 \,.\, c_0 = 0{,}837 \,.\, c_0,$$

d. i. 83 bis 84 Procent der Maximal- oder Stromſtrichgeſchwindigkeit.

Prony leitet aus den allerdings nur in kleinen Gräben angeſtellten Verſuchen Du Buat's und für dieſe Fälle vielleicht noch genauer

$$c_m = \left(\frac{2{,}372 + c_0}{3{,}153 + c_0}\right) c_0 \text{ Meter} = \left(\frac{7{,}50 + c_0}{9{,}97 + c_0}\right) c_0 \text{ Fuß ab.}$$

Für mittlere Geſchwindigkeiten von 3 Fuß folgt hiernach $c_m = 0{,}81\, c_0$.

Beiſpiel. Wenn im Stromſtriche eines Waſſers die Geſchwindigkeit des Waſſers 4 Fuß und die Tiefe 6 Fuß iſt, ſo hat man die mittlere Geſchwindigkeit im entſprechenden Perpendikel $c_m = 0{,}915 \,.\, 4 = 3{,}66$ Fuß, und die am Boden $= 0{,}83 \,.\, 4 = 3{,}32$ Fuß; ferner die Geſchwindigkeit 2 Fuß unter der Oberfläche $v = (1 - 0{,}17 \,.\, \frac{2}{6}) \,.\, 4 = (1 - 0{,}057) \,.\, 4 = 3{,}772$ Fuß, endlich die mittlere Geſchwindigkeit im ganzen Querprofile, $c = 0{,}837 \,.\, 4 = 3{,}348$ Fuß,

und nach Prony $c = \frac{11{,}50}{13{,}97} \,.\, 4 = \frac{46}{13{,}97} = 3{,}29$ Fuß.

Anmerkung. Ueber dieſen und über die nächſtfolgenden Gegenſtände wird ausführlich gehandelt in der allgemeinen Maſchinenencyclopädie, Artikel »Bewegung des Waſſers«. Neue Verſuche und neue Anſichten hierüber findet man in folgender Schrift: Lahmeyer, Erfahrungsreſultate über die Bewegung des Waſſers in Flußbetten und Kanälen, Braunſchweig, 1845. Nach Baumgarten's Beobachtungen (ſ. polytechniſches Centralblatt, Nr. 14, 1849) giebt dieſe Formel bei größeren Geſchwindigkeiten zu große Werthe, und es iſt für ſolche

$$c_m = \left(\frac{2{,}372 + c_0}{3{,}153 + c_0}\right) \,.\, 0{,}8\, c_0 \text{ Meter zu ſetzen.}$$

Vortheilhafteſte Querprofile

§. 400. Der Widerſtand, welchen das Bette der Bewegung des Waſſers in Folge der Adhäſion, Klebrigkeit oder Reibung entgegenſetzt, wächſt mit der Berührungsfläche zwiſchen dem Bette und dem Waſſer und alſo auch mit dem Umfange p des Waſſerprofiles oder im Bette liegenden Theiles vom Querprofile. Da aber durch ein Querprofil um ſo mehr Waſſerfäden hindurchgehen, je größer der Inhalt eines ſolchen iſt, ſo wächſt der Widerſtand eines Waſſerfadens auch umgekehrt wie der Inhalt und daher im Ganzen wie der Quotient $\frac{p}{F}$ aus dem Umfange des Waſſerprofiles und dem Inhalte des ganzen Querprofiles.

Damit nun der Reibungswiderſtand eines fließenden Waſſers möglichſt klein ausfalle, hat man dem Querprofile diejenige Geſtalt zu geben, bei welcher $\frac{p}{F}$ möglichſt klein iſt, bei welcher alſo der Umfang p bei gegebenem Inhalte ein Minimum, oder der Inhalt bei gegebenem Umfange ein Maximum werde. Bei ringsumſchloſſenen Waſſerleitungen, wie z. B. bei Röhren, iſt p der ganze Umfang der vom Querprofile gebildeten Figur. Nun hat aber unter allen Figuren von gleicher Seitenzahl allemal die regelmäßige, und unter allen regelmäßigen Figuren wieder diejenige, deren Seitenzahl die größere iſt, bei gleichem Inhalte den kleinſten Umfang, daher fällt denn auch bei ringsumſchloſſenen Waſſerleitungen der Reibungswiderſtand um ſo kleiner aus, je mehr ihr Querprofil einer regelmäßigen Figur ſich nähert, und je größer die Seitenzahl derſelben iſt, und es iſt der Kreis, als eine regelmäßige Figur von unendlich vielen Seiten, in dieſem Falle das dem kleinſten Reibungswiderſtande entſprechende Querprofil. Bei den oben offenen Waſſerleitungen iſt das Verhältniß ein anderes, weil die obere Seite des Querprofiles frei oder vielmehr nur mit Luft in Berührung iſt, die, ſo lange ſie ſich in Ruhe befindet, dem Waſſer keinen oder nur einen ſehr kleinen Widerſtand entgegenſetzt. Wir müſſen alſo auch bei Beurtheilung dieſes Reibungswiderſtandes in dem Quotienten $\frac{p}{F}$ die obere Seite oder das ſogenannte Luftprofil außer Acht laſſen. Bei Anwendung von Kanälen, Gräben und Gerinnen kommen in der Regel nur rectanguläre und trapezoidale Querprofile vor. Eine durch den Mittelpunkt M des Quadrates AC gehende Horizontale EF, Fig. 590, theilt ſowohl den Inhalt als auch den Umfang in zwei gleiche Theile, daher bleibt denn das, was für das Quadrat gilt, auch für dieſe Hälfte richtig, und es entſpricht ſonach unter allen rectangulären Querprofilen das halbe

Fig. 590.

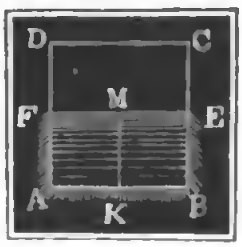


Fig. 591.

Vortheilhafteſte Querprofile.

Quadrat *AE*, oder dasjenige, welches doppelt ſo breit als hoch iſt, dem kleinſten Reibungswiderſtande. Ebenſo wird das regelmäßige Sechseck *ACE*, Fig. 591, durch eine Horizontale *CF* in zwei gleiche Trapeze zertheilt, wovon jedes, wie das ganze Sechseck, den größten relativen Inhalt hat, und es iſt folglich unter allen trapezoidalen Querprofilen das halbe regelmäßige Sechseck oder das Trapez *ABCF* mit Böſchungswinkeln *AFM* = *BCM*, von 60° dasjenige, bei deſſen Anwendung der kleinſte Reibungswiderſtand eintritt.

Fig. 592.

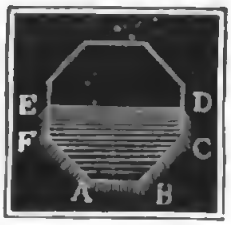
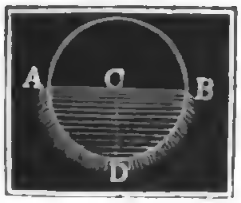


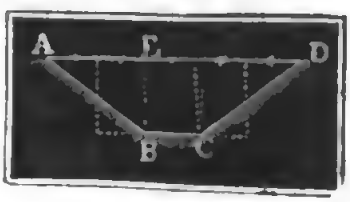
Fig. 593.



Ebenſo liefern das halbe regelmäßige Achteck *ADE*, Fig. 592, das halbe regelmäßige Zehneck u. ſ. w. und endlich der Halbkreis *ADB*, Fig. 593, unter gegebenen Umſtänden die vortheilhafteſten Querprofile für Kanäle. Das trapezoidale oder halbe regelmäßige Sechseck giebt noch einen kleinern Widerſtand als das halbe Quadrat oder Rechteck mit dem Seitenverhältniß 1 : 2, weil das Sechseck einen kleineren relativen Umfang hat als das Quadrat. Das halbe regelmäßige Zehneck giebt eine noch kleinere Reibung, und dem Halbkreiſe entſpricht allerdings das Minimum der Reibung. Nach dem Halbkreiſe und nach dem Rechtecke werden nur die Profile von Gerinnen aus Holz, Stein oder Eiſen gebildet, nach Trapezen hingegen conſtruirt man die Querprofile von ausgegrabenen und gemauerten Kanälen. Andere Formen werden wegen Schwierigkeiten in der Ausführung nicht leicht angewendet.

§. 401. In den Fällen, wenn Kanäle nicht ausgemauert, ſondern in der lockeren Erde oder in Sand ausgegraben werden, iſt der Böſchungswinkel von 60° zu groß oder die relative Böſchung *cotg.* 60° = 0,57735 zu klein, weil die Ufer noch nicht hinreichende Stabilität erhalten; man wird daher genöthigt, trapezoidale Querprofile anzuwenden, bei welchen die Neigung der Seiten gegen die Baſis noch kleiner als 60°, vielleicht gar nur 45° und noch kleiner iſt. Bei einem trapezoidalen Querprofile *ABCD*, Fig. 594, welches mit dem halben Quadrate gleichen Umfang und Inhalt hat, iſt die relative Böſchung = ⅓ und der Böſchungswinkel gar nur 36°, 52′. Theilt man

Fig. 594.



Vortheilhafteſtes Querprofil

die Höhe BE in drei gleiche Theile, ſo hat die Baſis BC deren 2, die Parallele AD, 10, und jede der Seiten $AB = CD$, $= 5$ Theile. In vielen Fällen macht man die Böſchung $= 2$, deren Winkel 26^0, $34'$ beträgt, und zuweilen macht man ſie noch größer.

Fig. 595.

Jedenfalls läßt ſich der Böſchungswinkel $BAE = \vartheta$, Fig. 595, oder die Böſchung $n = \frac{AE}{BE} = cotang.\ \vartheta$ als eine gegebene und von der Natur des Erdreiches, worin der Kanal ausgegraben wird, abhängige Größe anſehen, und es ſind daher nur noch die Dimenſionen des den kleinſten Widerſtand gebenden Querprofiles zu beſtimmen. Setzen wir die untere Breite $BC = b$, die Tiefe $BE = a$ und die Böſchung $= n$, ſo erhalten wir für den Umfang $AB + BC + CD = p = b + 2\sqrt{a^2 + n^2a^2} = b + 2a\sqrt{1 + n^2}$, für den Inhalt $F = ab + naa = a\,(b + na)$, und daher umgekehrt $b = \frac{F}{a} - na$, und das Verhältniß

$$\frac{p}{F} = \frac{1}{a} + \frac{a}{F}\,(2\sqrt{n^2 + 1} - n).$$

Setzt man ſtatt a, $a + x$, wo x eine kleine Zahl bezeichnet, ſo läßt ſich

$$\frac{p}{F} = \frac{1}{a+x} + \frac{(a+x)}{F}\,(2\sqrt{n^2+1} - n)$$

$$= \frac{1}{a}\left(1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2}\right) + \frac{a+x}{F}\,(2\sqrt{n^2+1} - n)$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{a}{F}(2\sqrt{n^2+1} - n) + \left(\frac{\sqrt{n^2+1} - n}{F} - \frac{1}{a^2}\right)x + \frac{x^2}{a^3}$$ ſetzen.

Damit nun dieſer Werth nicht allein für einen poſitiven, ſondern auch für einen negativen Werth von x größer ausfalle, als der erſte $\frac{1}{a} + \frac{a}{F}(2\sqrt{n^2+1} - n)$, iſt nöthig, daß das Glied mit dem Factor x verſchwinde, damit alſo $\frac{p}{F}$ zum Minimum werde, muß ſein:

$$\frac{2\sqrt{n^2+1} - n}{F} - \frac{1}{a^2} = 0, \text{ d. i. } a^2 = \frac{F}{2\sqrt{n^2+1} - n}, \text{ oder}$$

da $n = cotang.\ \vartheta$ und $\sqrt{n^2+1} = \frac{1}{sin.\ \vartheta}$ iſt, $a^2 = \frac{F\ sin.\ \vartheta}{2 - cos.\ \vartheta}$.

Hiernach iſt alſo die einem gegebenen Böſchungswinkel ϑ und einem

gegebenen Inhalte entſprechende zweckmäßigſte Form des Querprofiles be- Vortheilhafteſte Querprofile.
ſtimmt durch $a = \sqrt{\frac{F \sin. \vartheta}{2 - \cos. \vartheta}}$ und $b = \frac{F}{a} - a \operatorname{cotang.} \vartheta$.

Beiſpiel. Welche Dimenſionen ſind dem Querprofile eines Kanales zu geben, deſſen Ufer 40° Böſchung erhalten ſollen, und der beſtimmt iſt, bei einer mittleren Geſchwindigkeit von 3 Fuß ein Waſſerquantum Q von 75 Cubikfuß fortzuführen? Es iſt $F = \frac{Q}{c} = \frac{75}{3} = 25$ Quadratfuß, daher die Tiefe $a = \sqrt{\frac{25 \sin. 40°}{2 - \cos. 40°}} = 5\sqrt{\frac{0{,}64279}{1{,}23396}} = 3{,}609$ Fuß, die untere Breite $b = \frac{25}{3{,}609} - 3{,}609 \operatorname{cotang.} 40° = 6{,}927 - 4{,}301 = 2.626$ Fuß, die Böſchung oder Ausladung der Ufer $= 3{,}609 . \operatorname{cotang.} 40° = 4{,}301$, die obere Breite $= 6{,}927 + 4{,}301 = 11{,}228$ Fuß, der Umfang $p = b + \frac{2a}{\sin. \vartheta}$ $= 2{,}626 + \frac{7{,}218}{\sin. 40°} = 13{,}855$ Fuß, und das den Reibungswiderſtand beſtimmende Verhältniß $\frac{p}{F} = \frac{13{,}855}{25} = 0{,}5542$.

§. 402. Die Dimenſionen der, verſchiedenen Böſchungswinkeln und einem gegebenen Querſchnitte entſprechenden, zweckmäßigſten Querprofile giebt folgende Tabelle an.

Böſchungswinkel ϑ.	Relative Böſchung.	Dimenſionen der Querprofile.				Quotient $\frac{p}{F}$
		Tiefe a	Untere Breite b	Abſolute Böſchung na	Obere Breite $b+2na$	
90°	0	$0{,}707\sqrt{F}$	$1{,}414\sqrt{F}$	0	$1{,}414\sqrt{F}$	$\frac{2{,}828}{\sqrt{F}}$
60°	0,577	$0{,}760\sqrt{F}$	$0{,}877\sqrt{F}$	$0{,}439\sqrt{F}$	$1{,}755\sqrt{F}$	$\frac{2{,}632}{\sqrt{F}}$
45°	1,000	$0{,}740\sqrt{F}$	$0{,}613\sqrt{F}$	$0{,}740\sqrt{F}$	$2{,}092\sqrt{F}$	$\frac{2{,}704}{\sqrt{F}}$
40°	1,192	$0{,}722\sqrt{F}$	$0{,}525\sqrt{F}$	$0{,}860\sqrt{F}$	$2{,}246\sqrt{F}$	$\frac{2{,}771}{\sqrt{F}}$
36°,52′	1,333	$0{,}707\sqrt{F}$	$0{,}471\sqrt{F}$	$0{,}943\sqrt{F}$	$2{,}357\sqrt{F}$	$\frac{2{,}828}{\sqrt{F}}$
35°	1,402	$0{,}697\sqrt{F}$	$0{,}439\sqrt{F}$	$0{,}995\sqrt{F}$	$2{,}430\sqrt{F}$	$\frac{2{,}870}{\sqrt{F}}$
30°	1,732	$0{,}664\sqrt{F}$	$0{,}356\sqrt{F}$	$1{,}150\sqrt{F}$	$2{,}656\sqrt{F}$	$\frac{3{,}012}{\sqrt{F}}$
26°,34′	2,000	$0{,}636\sqrt{F}$	$0{,}300\sqrt{F}$	$1{,}272\sqrt{F}$	$2{,}844\sqrt{F}$	$\frac{3{,}144}{\sqrt{F}}$
Halbkreis.		$0{,}798\sqrt{F}$			$1{,}596\sqrt{F}$	$\frac{2{,}507}{\sqrt{F}}$

Digitized by Google

Vortheilhafteſte Querprofile.

Man erſieht aus dieſer Tafel, daß allerdings beim Halbkreiſe der Quotient $\frac{p}{F}$ am kleinſten, nämlich $= \frac{2{,}507}{\sqrt{F}}$ iſt, daß er beim halben Sechseck größer, beim halben Quadrate und beim Trapeze von 36°,52′ Böſchung aber noch größer iſt u. ſ. w.

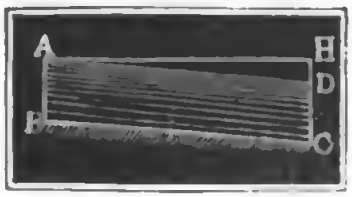
Beiſpiel. Welche Dimenſionen ſind einem Querprofile zu geben, das bei 40 Quadratfuß Inhalt eine Ufer-Böſchung von 35° hat? Nach der vorſtehenden Tafel iſt die Tiefe $a = 0{,}697\sqrt{40} = 4{,}408$, die untere Breite $= 0{,}439\sqrt{40} = 2{,}777$ Fuß, die abſolute Böſchung $= 0{,}995\sqrt{40} = 6.293$ Fuß, die obere Breite $= 15{,}363$, und der Quotient $\frac{p}{F} = \frac{2{,}870}{\sqrt{40}} = 0{,}4538$.

Gleichförmige Bewegung.

§. 403. Die Bewegung des Waſſers in Betten iſt auf einer gewiſſen Strecke entweder gleichförmig oder ungleichförmig; gleichförmig, wenn die mittlere Geſchwindigkeit in allen Querſchnitten dieſer Strecke ſich gleichbleibt, und alſo auch die Inhalte der Querſchnitte gleich ſind; ungleichförmig hingegen, wenn die mittleren Geſchwindigkeiten und alſo auch die Inhalte der Querſchnitte ſich verändern. Zunächſt iſt von der gleichförmigen Bewegung die Rede.

Bei der gleichförmigen Bewegung des Waſſers auf einer Strecke $AD = l$, Fig. 596, wird das ganze Gefälle $HD = h$ nur auf die Ueberwindung der Reibung des Waſſers im Bette verwendet, weil das Waſſer mit derſelben Geſchwindigkeit fortfließt, mit welcher es zuſtrömt, alſo eine Geſchwindigkeitshöhe weder gebunden noch frei wird. Meſſen wir nun dieſe Reibung durch die Höhe jener Waſſerſäule, ſo können wir folglich das Gefälle dieſer Höhe gleichſetzen. Die Reibungswiderſtandshöhe wächſt aber mit dem Quotienten $\frac{p}{F}$, mit l und mit dem Quadrate der mittleren Geſchwindigkeit c (§. 364), daher gilt denn die Formel

Fig. 596.



1) $h = \zeta \cdot \frac{lp}{F} \cdot \frac{c^2}{2g}$, worin ζ eine Erfahrungszahl ausdrückt und der Coefficient des Reibungswiderſtandes zu nennen iſt.

Durch Umkehrung folgt

$$2)\quad c = \sqrt{\frac{F}{\zeta \cdot lp} \cdot 2gh}.$$

Es kommt alſo bei der Beſtimmung des Gefälles aus der Länge, dem Querprofile und der Geſchwindigkeit, ſowie umgekehrt bei der Ermittelung der Geſchwindigkeit aus dem Gefälle, der Länge und dem Querprofile auf die Kenntniß des Reibungscoefficienten ζ an. Nach den Eytelwein'-

ſchen Berechnungen der 91 Beobachtungen von Du Buat, Brünings, Funk und Woltmann iſt $\zeta = 0{,}007565$ und daher Gleichförmige Bewegung.

$$h = 0{,}007565 \cdot \frac{lp}{F} \cdot \frac{c^2}{2g}.$$

Setzt man ſtatt $g = 9{,}809$ Meter oder 31,25 Fuß ein, ſo erhält man für Metermaaß

$$h = 0{,}0003856 \frac{lp}{F} \cdot c^2 \text{ und } c = 50{,}9 \sqrt{\frac{Fh}{pl}},$$

dagegen für das Fußmaaß

$$h = 0{,}00012103 \frac{lp}{F} \cdot c^2 \text{ und } c = 90{,}9 \sqrt{\frac{Fh}{pl}}.$$

Bei Röhrenleitungen iſt $\frac{lp}{F} = \frac{\pi l d}{\frac{1}{4}\pi d^2} = \frac{4l}{d}$, daher giebt dieſe Formel für Röhren $h = 0{,}03026 \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$, während wir richtiger (§. 366) für dieſe bei mittleren Geſchwindigkeiten, $h = 0{,}025 \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$ gefunden haben. Es iſt alſo, wie zu erwarten ſtand, die Reibung in Flußbetten größer, als in metallenen Röhrenleitungen.

Beiſpiele. 1) Welches Gefälle iſt einem Kanale von der Länge $l = 2600$ Fuß, unterer Breite $b = 3$ Fuß, oberer Breite $b_1 = 7$ Fuß, und Tiefe $a = 3$ Fuß zu geben, wenn er ein Waſſerquantum von 40 Cubikfuß pr. Sec. fortführen ſoll? Es iſt $p = 3 + 2\sqrt{2^2+3^2} = 10{,}211$, $F = \frac{(7+3)3}{2} = 15$, und $c = {}^{40}/_{15} = {}^{8}/_{3}$, daher das geſuchte Gefälle

$$h = 0{,}000121 \cdot \frac{2600 \cdot 10{,}211}{15} \cdot ({}^{8}/_{3})^2 = \frac{0{,}3146 \cdot 10{,}211 \cdot 64}{15 \cdot 9} = 1{,}52 \text{ Fuß}.$$

2) Welches Waſſerquantum liefert ein Kanal von 5800 Fuß Länge bei 3 Fuß Gefälle, 5 Fuß Tiefe, 4 Fuß unterer und 12 Fuß oberer Breite? Hier iſt

$$\frac{p}{F} = \frac{4 + 2\sqrt{5^2+4^2}}{5 \cdot 8} = \frac{16{,}806}{40} = 0{,}42015, \text{ daher die Geſchwindigkeit}$$

$$c = 90{,}9 \sqrt{\frac{3}{0{,}42015 \cdot 5800}} = \frac{90{,}9}{\sqrt{0{,}14005 \cdot 5800}} = \frac{90{,}9}{\sqrt{812{,}29}} = \frac{90{,}9}{28{,}5}$$

$= 3{,}19$ Fuß, und das Waſſerquantum $Q = Fc = 40 \cdot 3{,}19 = 127{,}6$ Cubikfuß.

§. 404. Auch bei Flüſſen, Bächen u. ſ. w. zeigt ſich der Widerſtands-coefficient, wofür wir im vorigen Paragraphen den mittleren Werth 0,007565 angegeben haben, nicht conſtant, ſondern, wie bei Röhren bei kleinen Geſchwindigkeiten etwas zu- und bei großen etwas abnehmend. Man hat alſo zu ſetzen: Reibungs-coefficienten.

$$\zeta = \zeta_1 \left(1 + \frac{\alpha}{c}\right) \text{ oder } \zeta_1 \left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{c}}\right) \text{ oder dergl.}$$

Der Verfaſſer der ſchon in §. 399 angeführten Schrift, findet aus 255

Reibungs-coefficienten.

zum großen Theil von ihm angeſtellten Verſuchen für das preuß. Maaß $\zeta = 0{,}007409\left(1 + \frac{0{,}1865}{c}\right)$, und es folgt hiernach für das Metermaaß $\zeta = 0{,}007409\left(1 + \frac{0{,}05853}{c}\right)$.

Man ſieht, daß dieſe Formeln bei einer Geſchwindigkeit $c = 8\frac{1}{2}$ Fuß den oben angegebenen mittleren Widerſtandscoefficienten $\zeta = 0{,}007565$ wiedergeben. Zu Erleichterung der Rechnung dient folgende für das Metermaaß zunächſt brauchbare Tabelle der Widerſtandscoefficienten.

Geſchwindigkeit c	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	Meter.
Widerſtandscoefficient $\zeta =$ 0,0	1175	0958	0885	0849	0828	0813	0803	0795	0789	

Geſchwindigkeit c	1	1,2	1,5	2	3	Meter.
Widerſtandscoefficient $\zeta =$ 0,00	784	777	771	763	755	

Für das preuß. Fußmaaß gilt folgende Tabelle.

Geſchwindigkeit c	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1½	2	3	5	10 Fuß
Widerſtandscoefficient $\zeta =$ 0,0	1202	1096	1017	0971	0938	0914	0894	0879	0833	0810	0787	0769	0755

Dieſe Tabellen finden eine unmittelbare Anwendung in allen den Fällen, wenn die Geſchwindigkeit c gegeben iſt und das Gefälle geſucht wird, und wenn die Formel Nro. 1 des vorigen Paragraphen in Anwendung kommt. Iſt aber die Geſchwindigkeit c unbekannt und die zu ſuchende Größe, ſo geſtattet dieſe Tabelle nur dann eine unmittelbare Anwendung, wenn man ſchon einen Näherungswerth von c hat. Am einfachſten geht man zu Werke, wenn man erſt annähernd c durch die Formel $c = 50{,}9\sqrt{\frac{Fh}{pl}}$ beſtimmt, dann hieraus mittels der Tabelle, ζ er-

Reibungs-coefficienten.

mittelt, und den ſo erhaltenen Werth in der Formel

$\frac{c^2}{2g} = \frac{h}{\zeta} \cdot \frac{F}{lp}$ oder $c = \sqrt{\frac{\zeta F}{lp} \cdot 2gh}$ einſetzt.

Aus der Geſchwindigkeit c folgt dann auch noch das Waſſerquantum mittels der Formel $Q = Fc$.

Iſt endlich das Waſſerquantum und Gefälle gegeben und, wie es bei Anlegung von Kanälen oft vorkommt, das Querprofil zu beſtimmen, ſo ſetze man $\frac{p}{F} = \frac{m}{\sqrt{F}}$ (ſ. Tabelle §. 402) und $c = \frac{Q}{F}$ in die Formel $h = 0{,}007565 \frac{lp}{F} \cdot \frac{c^2}{2g}$, ſchreibe alſo $h = 0{,}007565 \frac{mlQ^2}{2gF^{5/3}}$, und beſtimme hiernach $F = \left(0{,}007565 \frac{mlQ^2}{2gh}\right)^{3/5}$, d. i. für Metermaaß, $F = 0{,}0431 \left(\frac{mlQ^2}{h}\right)^{3/5}$ oder für Fußmaaß, $F = 0{,}0271 \left(\frac{mlQ^2}{h}\right)^{3/5}$. Hieraus folgt nun annähernd $c = \frac{Q}{F}$; nimmt man dieſem Werth entſprechend, ζ aus einer der Tabellen, ſo läßt ſich $F = \left(\zeta . \frac{mlQ^2}{2gh}\right)^{3/5}$, genauer berechnen, und es ergeben ſich hieraus auch ſchärfere Werthe für $c = \frac{Q}{F}$, $p = m\sqrt{F}$, ſowie für a, b u. ſ. w.

Beiſpiele. 1) Welches Gefälle erfordert ein Kanal von 1500 Fuß Länge, 2 Fuß unterer, 8 Fuß oberer Breite und 4 Fuß Tiefe, zur Fortleitung einer Waſſermenge von 70 Cubikfuß pr. Sec.? Es iſt $p = 2 + 2\sqrt{4^2 + 3^2} = 12$, $F = 5 . 4 = 20$, $c = {}^{70}/_{20} = 3{,}5$, daher $\zeta = 0{,}00784$ und $h = 0{,}00784 . \frac{1500 . 12}{20} . \frac{3{,}5^2}{2g} = 7{,}056 . 0{,}196 = 1{,}38$ Fuß. 2) Welche Waſſermenge liefert ein Bach von 40 Fuß Breite, $4\frac{1}{2}$ Fuß mittlerer Tiefe und 46 Fuß Waſſerprofil, wenn er auf einer Länge von 750 Fuß, 10 Zoll Gefälle hat? Es iſt ohngefähr $c = 90{,}9 . \sqrt{\frac{40 . 4{,}5 . 10}{46 . 750 . 12}} = \frac{90{,}9}{\sqrt{230}} = 6$ Fuß, und hiernach $\zeta = 0{,}00765$ zu nehmen. Man erhält daher genauer $\frac{c^2}{2g} = \frac{Fh}{\zeta lp}$ $= \frac{4{,}5 . 40 . 10}{0{,}00765 . 46 . 750 . 12} = \frac{1}{1{,}7595} = 0{,}5683$ und $c = 5{,}96$ Fuß. Die entſprechende Waſſermenge iſt endlich $Q = 4{,}5 . 40 . 5{,}96 = 10{,}73$ Cubikfuß. 3) Man will einen Graben von 3650 Fuß Länge anlegen, welcher bei einem Totalgefälle von 1 Fuß eine Waſſermenge von 12 Cubikfuß pr. Sec. fortführt. Welche Dimenſionen ſind dem Querprofile zu geben, wenn es die Form eines halben regelmäßigen Sechseckes erhalten ſoll? Hier iſt $m = 2{,}632$ (ſ. Tabelle §. 402), daher annähernd $F = 0{,}0271 (2{,}632 . 3650 . 144)^{3/5} = 7{,}75$ Quadratfuß und $c = \frac{12}{7{,}75} = 1{,}548$ Fuß. Hiernach iſt $\zeta = 0{,}0083$ und daher

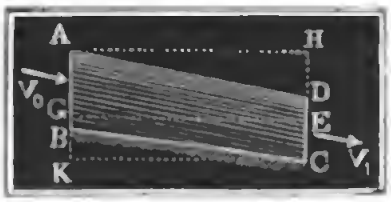
$F = \left(0{,}0083 \,.\, 2{,}632 \,.\, \frac{3650 \,.\, 144}{62{,}5}\right)^{4/5} = 8{,}22$ Quadratfuß zu nehmen. Es iſt zu ſetzen: die Tiefe $a = 0{,}760\sqrt{F} = 2{,}18$ Fuß, die untere Breite $= 0{,}877\sqrt{F} = 2{,}51$, und die obere Breite $= 2 \,.\, 2{,}51 = 5{,}02$ Fuß.

Anmerkung. Eine Tabelle zur Abkürzung dieſer Rechnungen theilt der »Ingenieur« Seite 478 und 479 mit.

Ungleichförmige Bewegung.

§. 405. Die Theorie der ungleichförmigen Bewegung des Waſſers in Flußbetten läßt ſich inſofern auf die Theorie der gleichförmigen Bewegung zurückführen, als man den Reibungswiderſtand auf einer kurzen Flußſtrecke als conſtant und die entſprechende Höhe ebenfalls $= \xi \,.\, \frac{lp}{F} \,.\, \frac{v^2}{2g}$ ſetzen kann. Außerdem iſt aber noch auf die der Geſchwindigkeitsveränderung entſprechende lebendige Kraft des Waſſers Rückſicht zu nehmen.

Fig. 597.



Es ſei $ABCD$, Fig. 597, eine kurze Flußſtrecke, von der Länge $AD = l$, dem Gefälle $DH = h$, und es ſei v_0 die Geſchwindigkeit des ankommenden, v_1 die des fortgehenden Waſſers. Wenden wir die Regeln des Ausfluſſes auf ein Element D im Waſſerſpiegel an, ſo erhalten wir für deſſen Geſchwindigkeit v_1, $\frac{{v_1}^2}{2g} = h + \frac{{v_0}^2}{2g}$; was aber ein Element E unter Waſſer betrifft, ſo hat daſſelbe zwar von der einen Seite her eine größere Druckhöhe $AG = EH$, allein da das Unterwaſſer mit der Druckhöhe DE entgegenwirkt, ſo bleibt für daſſelbe ebenfalls nur das Gefälle $DH = EH - ED$ als Bewegung erzeugende Druckhöhe übrig, und es gilt alſo auch für dieſes und für jedes andere Element die Formel

$h = \frac{{v_1}^2 - {v_0}^2}{2g}$, und nimmt man hierzu noch den Reibungswiderſtand, ſo erhält man $h = \frac{{v_1}^2 - {v_0}^2}{2g} + \xi \,.\, \frac{lp}{F} \,.\, \frac{v^2}{2g}$, worin p, F und v Mittelwerthe des Waſſerprofiles, Querſchnittes und der Geſchwindigkeit ſind. Iſt F_0 der Inhalt des oberen und F_1 der des unteren Querprofiles, ſo läßt ſich ſetzen: $F = \frac{F_0 + F_1}{2}$ und $Q = F_0 v_0 = F_1 v_1$, weshalb nun

$$\frac{{v_1}^2 - {v_0}^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{Q}{F_1}\right)^2 - \left(\frac{Q}{F_0}\right)^2\right] = \left(\frac{1}{{F_1}^2} - \frac{1}{{F_0}^2}\right)\frac{Q^2}{2g},$$ und

$$\frac{v^2}{F} = \frac{{v_0}^2 + {v_1}^2}{F_0 + F_1} = \left(\frac{1}{{F_0}^2} + \frac{1}{{F_1}^2}\right)\frac{Q^2}{F_0 + F_1}$$ folgt und ſich ergiebt

1) $h = \left[\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2} + \zeta \frac{lp}{F_0+F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\right] \frac{Q^2}{2g}$, ſo wie

Ungleichförmige Bewegung.

2) $Q = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2} + \zeta \frac{lp}{F_0+F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)}}$.

Mit Hülfe der Formel 1) läßt ſich aus dem Waſſerquantum, der Länge und den Querſchnitten einer Fluß- oder Kanalſtrecke das entſprechende Gefälle h berechnen, mit Hülfe der Formel 2) aber umgekehrt aus dem Gefälle, der Länge und den Querſchnitten das Waſſerquantum. Um mehr Genauigkeit zu erzielen, kann man die Rechnung für mehrere kurze Flußſtrecken durchführen und zuletzt das arithmetiſche Mittel nehmen. Iſt nur das Totalgefälle bekannt, ſo ſetze man gleich dieſes ſtatt h in die letzte Formel, führe ſtatt $\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}$, $\frac{1}{F_n^2} - \frac{1}{F_0^2}$, wo F_n den Inhalt des letzten Querprofiles bezeichnet, und ſtatt $\zeta \cdot \frac{lp}{F_0+F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)$ die Summe aller ähnlichen Werthe der einzelnen Flußſtrecken ein.

Beiſpiel. Ein Bach hat auf einer Strecke von 300 Fuß Länge 9,6 Zoll Gefälle, der mittlere Umfang ſeines Waſſerprofiles iſt 40 Fuß, der Inhalt des oberen Querprofiles iſt 70, der des unteren 60 Quadratfuß. Welche Waſſermenge liefert dieſer Bach?

Es iſt $Q = \frac{7{,}906\sqrt{0{,}8}}{\sqrt{\frac{1}{60^2} - \frac{1}{70^2} + 0{,}007565 \cdot \frac{300 \cdot 40}{130}\left(\frac{1}{60^2} + \frac{1}{70^2}\right)}}$

$= \frac{7{,}071}{\sqrt{0{,}0000731 + 0{,}0003365}} = \frac{7{,}071}{\sqrt{0{,}0004096}} = 349$ Cubikfuß. Die mittlere Geſchwindigkeit iſt $\frac{2Q}{F_0+F} = \frac{698}{130} = 5{,}37$ Fuß, daher iſt richtiger $\zeta = 0{,}00768$ ſtatt 0,007565 zu ſetzen, und es folgt nun ſchärfer

$Q = \frac{7{,}071}{\sqrt{0{,}0000731 + 0{,}0003364}} = 349$ Cubikfuß. Wenn derſelbe Bach bei demſelben Waſſerſtande auf einer anderen Strecke von 450 Fuß Länge 11 Zoll Gefälle hat, und wenn auf dieſer Strecke ſein oberes Querprofil 50 und ſein unteres 60 Quadratfuß beträgt, der mittlere Profilumfang aber 36 Fuß mißt, ſo hat man

$Q = \frac{7{,}906\sqrt{0{,}9167}}{\sqrt{\frac{1}{60^2} - \frac{1}{50^2} + 0{,}00768 \cdot \frac{450 \cdot 36}{110}\left(\frac{1}{60^2} + \frac{1}{50^2}\right)}}$

$= 7{,}906 \sqrt{\frac{0{,}9167}{-0{,}0001222 + 0{,}0007549}} = 301$ Cubikfuß.

Aus beiden Werthen folgt der mittlere $Q = \frac{349 + 301}{2} = 325$ Cubikfuß.

§. 406. Um eine Formel für die Waſſertiefe zu erhalten, ſetzen wir die obere Tiefe $= a_0$ und die untere $= a_1$, ferner den Abhang des Grundbettes

Ungleichförmige Bewegung.

$= \alpha$, folglich das Gefälle des Grundbettes $= l \sin. \alpha$. Dann erhalten wir das Waſſergefälle $h = a_0 - a_1 + l \sin. \alpha$ und es folgt nun die Gleichung

$$a_0 - a_1 - \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2g} = \left[\zeta \frac{p}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g} - \sin. \alpha\right] l,$$

$$\text{daher } l = \frac{a_0 - a_1 - \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2g}}{\zeta \frac{p}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g} - \sin. \alpha}.$$

Mit Hülfe dieſer Formel kann man die Strecke l beſtimmen, welche einer gegebenen Veränderung $a_0 - a_1$ der Waſſertiefe entſpricht. Iſt aber die umgekehrte Aufgabe zu löſen, ſo hat man den Weg der Näherung zu betreten, indem man erſt die angenommenen Senkungen $a_0 - a_1$ und $a_1 - a_2$ entſprechenden Entfernungen l_1 und l_2 beſtimmt, und hieraus durch eine Proportion die der gegebenen Entfernung l entſprechende Senkung berechnet (ſ. »Ingenieur«, Arithmetik, §. 16, V.).

Die Formel iſt noch einer Vereinfachung fähig, wenn die Breite b des fließenden Waſſers conſtant iſt, oder als conſtant angeſehen werden kann. Wir ſetzen in dieſem Falle

$$\left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2g} = \frac{F_0^2 - F_1^2}{F_0^2 F_1^2} \cdot \frac{Q^2}{2g} = \frac{(F_0 - F_1)(F_0 + F_1)}{F_1^2} \cdot \frac{v_0^2}{2g}$$

$$= \frac{(a_0 - a_1)(a_0 + a_1)}{a_1^2} \cdot \frac{v_0^2}{2g} \text{ annähernd} = 2\frac{(a_0 - a_1)}{a_0} \cdot \frac{v_0^2}{2g},$$

und ebenſo

$$\frac{p}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g} = \frac{p\,(F_0^2 + F_1^2)}{(F_0 + F_1)\,F_1^2} \cdot \frac{v_0^2}{2g} \text{ annähernd}$$

$$= \frac{p}{a_0 b} \cdot \frac{v_0^2}{2g}, \text{ daher } l = \frac{(a_0 - a_1)\left(1 - \frac{2}{a_0} \cdot \frac{v_0^2}{2g}\right)}{\zeta \cdot \frac{p}{a_0 b} \cdot \frac{v_0^2}{2g} - \sin. \alpha}, \text{ und folglich}$$

$$\frac{a_0 - a_1}{l} = \frac{\zeta \cdot \frac{p}{a_0 b} \cdot \frac{v_0^2}{2g} - \sin. \alpha}{1 - \frac{2}{a_0} \cdot \frac{v_0^2}{2g}}.$$

Mit Hülfe dieſer Formel läßt ſich direct die einer gegebenen Strecke l entſprechende Veränderung $(a_0 - a_1)$ der Waſſertiefe berechnen.

Beiſpiel. Man will in einem horizontalen Graben von 5 Fuß Breite und 800 Fuß Länge eine Waſſermenge von 20 Cubikfuß fortführen und dieſelbe 2 Fuß hoch eintreten laſſen, welche Höhe wird das Waſſer am Ende des Kanales haben? Theilen wir die ganze Länge in zwei gleiche Theile und beſtimmen nach der letzten Formel das Gefälle für jeden dieſer Theile.

Digitized by Google

Allemal iſt $\sin. \alpha = 0$, $l = \frac{800}{2} = 400$, und $b = 5$; für den erſten Theil aber iſt $v_0 = \frac{20}{2 \cdot 5} = 2$, daher $\zeta = 0{,}00810$, ferner $a_0 = 2$; da nun $p = 8\frac{1}{2}$, Ungleichförmige Bewegung.

$$\text{ſo folgt } a_0 - a_1 = \left(\frac{0{,}00810 \cdot \frac{8{,}5}{10} \cdot \frac{4}{2g}}{1 - \frac{2}{2} \cdot \frac{4}{2g}} \right) \cdot 400 = \frac{0{,}1762}{0{,}936} = 0{,}188 \text{ Fuß.}$$

Nun iſt für die zweite Hälfte $a_1 = 2 - 0{,}188 = 1{,}812$ ferner p_1 etwa $= 8{,}2$, $v_1 = \frac{20}{9{,}106} = 2{,}207$, und die Senkung des zweiten Theiles

$$a_1 - a_2 = \left(\frac{0.00810 \cdot \frac{8{,}2}{9{,}106} \cdot \frac{2{,}207^2}{2g}}{1 - \frac{2}{1{,}812} \cdot \frac{2.207^2}{2g}} \right) \cdot 400 = \frac{0{,}2285}{0{,}914} = 0{,}250 \text{ Fuß,}$$

daher folgt die ganze Senkung $= 0{,}188 + 0{,}250 = 0{,}438$ und die Waſſertiefe am unteren Ende $= 2 - 0{,}438 = 1{,}562$ Fuß $= 18\frac{3}{4}$ Zoll.

§. 407. Wenn Flüſſe oder Kanäle ihren Waſſerſtand ändern, ſo treten auch Geſchwindigkeitsveränderungen und Veränderungen in den Waſſermengen ein. Einem höheren Waſſerſtande entſpricht nicht nur ein größerer Querſchnitt, ſondern auch eine größere Geſchwindigkeit, und daher aus doppelten Gründen ein größeres Waſſerquantum, und ebenſo giebt eine Abnahme der Waſſertiefe eine Verminderung im Querſchnitt und in der Geſchwindigkeit, und daher auch eine Abnahme der Waſſermenge in zweifacher Beziehung. Iſt die anfängliche Tiefe $= a$, und die ſpätere Tiefe $= a_1$, die obere Breite des Kanales aber $= b$, ſo läßt ſich die Vergrößerung des Querſchnittes $= b(a_1 - a)$ und daher der Querſchnitt nach der Anſchwellung $a_1 - a$, $F_1 = F + b(a_1 - a)$ ſetzen, auch folgt hiernach Anſchwellungen.

$$\frac{F_1}{F} = 1 + \frac{b(a_1 - a)}{F}, \text{ und } \sqrt{\frac{F_1}{F}} \text{ annähernd } = 1 + \frac{b(a_1 - a)}{2F}.$$

Iſt ferner p der anfängliche, p_1 der ſpätere Umfang des Waſſerprofiles, ϑ aber der Böſchungswinkel der Ufer, ſo läßt ſich ſetzen

$$p_1 = p + \frac{2(a_1 - a)}{\sin. \vartheta}, \text{ daher } \frac{p_1}{p} = 1 + \frac{2(a_1 - a)}{p \sin. \vartheta} \text{ und}$$

$$\sqrt{\frac{p_1}{p}} = 1 + \frac{a_1 - a}{p \sin. \vartheta}, \text{ ſowie } \sqrt{\frac{p}{p_1}} = 1 - \frac{a_1 - a}{p \sin. \vartheta}.$$

Nun iſt aber die Geſchwindigkeit beim erſten Waſſerſtande

$$c = 90{,}9 \sqrt{\frac{Fh}{pl}} \text{ und beim zweiten } c_1 = 90{,}9 \sqrt{\frac{F_1}{p_1} \cdot \frac{h}{l}}, \text{ es läßt}$$

$$\text{ſich daher } \frac{c_1}{c} = \sqrt{\frac{F_1}{F}} \cdot \sqrt{\frac{p}{p_1}} = \left(1 + \frac{b(a_1 - a)}{2F}\right)\left(1 - \frac{a_1 - a}{p \sin. \vartheta}\right)$$

Digitized by Google

Anſchwellungen.

$= 1 + (a_1 - a)\left(\frac{b}{2F} - \frac{1}{p \sin. \vartheta}\right)$, alſo die relative Geſchwindigkeitsveränderung

$$1) \quad \frac{c_1 - c}{c} = (a_1 - a)\left(\frac{b}{2F} - \frac{1}{p \sin. \vartheta}\right) \text{ ſetzen.}$$

Dagegen folgt das Verhältniß der Waſſermengen

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{F_1 c_1}{F c} = \left(1 + \frac{b(a_1 - a)}{F}\right)\left[1 + (a_1 - a)\left(\frac{b}{2F} - \frac{1}{p \sin. \vartheta}\right)\right]$$

$$= 1 + (a_1 - a)\left(\frac{3b}{2F} - \frac{1}{p \sin. \vartheta}\right)$$

und der relative Waſſermengenzuwachs:

$$2) \quad \frac{Q_1 - Q}{Q} = (a_1 - a)\left(\frac{3b}{2F} - \frac{1}{p \sin. \vartheta}\right).$$

Weniger genau, aber in vielen Fällen, namentlich bei breiten Kanälen mit wenig Böſchung genügend, iſt $F = ab$ zu ſetzen und $\frac{1}{p \sin. \vartheta}$ zu vernachläſſigen, weswegen einfacher $\frac{c_1 - c}{c} = \frac{1}{2} \frac{a_1 - a}{a}$ und $\frac{Q_1 - Q}{Q} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a_1 - a}{a}$ folgt.

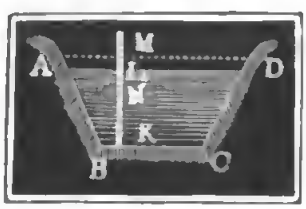
Hiernach iſt alſo die relative Geſchwindigkeitsveränderung halb ſo groß, und die relative Veränderung im Waſſerquantum gleich $\frac{3}{2}$mal ſo groß, als die relative Veränderung im Waſſerſtande.

Beiſpiele. 1) Wenn der Waſſerſtand um $\frac{1}{10}$ ſeiner anfänglichen Größe zunimmt, ſo wird die Geſchwindigkeit um $\frac{1}{20}$ und das Waſſerquantum um $\frac{3}{20}$ ſeines anfänglichen Werthes größer. 2) Wenn die Tiefe um 8 Procent abnimmt, ſo vermindert ſich die Geſchwindigkeit um 4 Procent, und das Waſſerquantum um 12 Procent. 3) Mit Hülfe der genaueren Formel

$$\frac{Q_1 - Q}{Q} = (a_1 - a)\left(\frac{3b}{2F} - \frac{1}{p \sin. \vartheta}\right)$$

läßt ſich eine Waſſerſtandsſcala KM, Fig. 598, conſtruiren, woran man die jeder Waſſertiefe KL entſprechende Waſſermenge eines Kanales ableſen kann, wenn man nur einmal das Waſſerquantum für eine gewiſſe mittlere Tiefe kennt. Iſt $b = 9$ Fuß, $b_1 = 3$, $a = 3$ und $\vartheta = 45°$, ſo hat man

Fig. 598.



$F = \frac{(9+3)3}{2} = 18$ Quadratfuß, $p = 3 + 2 \cdot 3\sqrt{2} = 11{,}485$,

und $\sin. \vartheta = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707$, daher

$\frac{Q_1 - Q}{Q} = \left(\frac{3 \cdot 9}{2 \cdot 18} - \frac{1}{11{,}485 \cdot 0{,}707}\right)(a_1 - a) = (0{,}750 - 0{,}123)(a_1 - a)$
$= 0{,}627\,(a_1 - a)$. Iſt das dem mittleren Waſſerſtande entſprechende Waſſerquantum $Q = 40$ Cubikfuß, ſo hat man $Q_1 = 40 + 40 \cdot 0{,}627\,(a_1 - a) = 40 + \frac{a_1 - a}{0{,}04}$

Iſt $a_1 - a = 0{,}04$ Fuß $= 5{,}76$ Linien, ſo folgt $Q_1 = 41$; iſt $a_1 - a = 0{,}08$ Fuß $= 11{,}52$ Linien, ſo hat man $Q_1 = 42$ Cubikfuß; iſt ferner $a_1 - a = -0{,}04$, ſo folgt $Q_1 = 39$ Cubikfuß u. ſ. w. Es giebt alſo eine Scala, deren Intervalle $LM = LN = 5{,}76$ Linien betragen, die Waſſermenge bis auf einen Cubikfuß genau an. Natürlich wird die Genauigkeit um ſo kleiner, je mehr ſich der Waſſerſtand von dem mittleren entfernt. Anſchwellungen.

Anmerkung. Ueber die Zu- und Abführung des Waſſers in Kanälen ſowie über die Wehre und Teiche wird im zweiten Theile gehandelt.

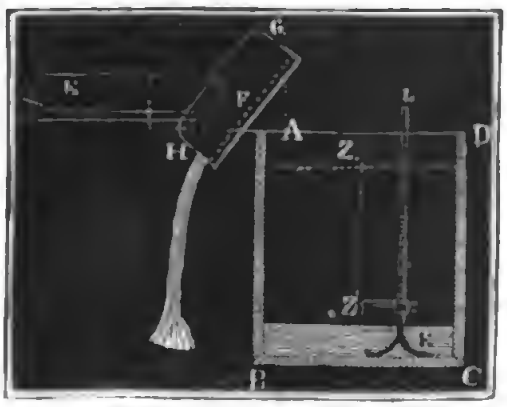
Schlußanmerkung. Ausführlich über die Bewegung des Waſſers in Kanälen und Flüſſen handelt der Verfaſſer in der allgemeinen Encyclopädie, Bd. II., Artikel »Bewegung des Waſſers in Kanälen und Flüſſen«; auch wird daſelbſt eine vollſtändige Literatur über dieſen Gegenſtand mitgetheilt.

Achtes Kapitel.

Hydrometrie oder Lehre vom Waſſermeſſen.

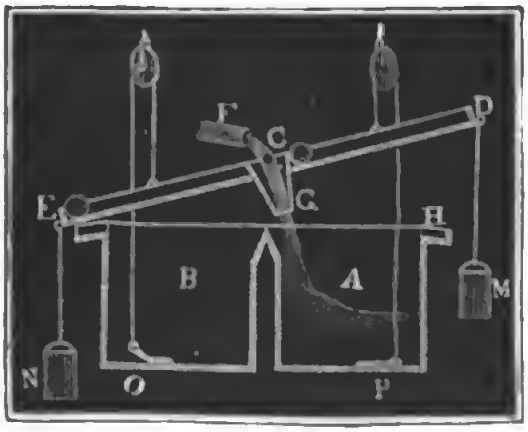
§. 408. Das Waſſerquantum, welches ein fließendes Waſſer innerhalb einer gewiſſen Zeit liefert, wird entweder durch Aichmaaße, oder durch Ausflußapparate oder durch Hydrometer gefunden. Das einfachſte Waſſermeſſen beſteht allerdings in dem Aichen (franz. jaugeage; engl. gauging), d. i. in der Anwendung eines Aichgefäßes, doch iſt dieſes nur bei kleineren Waſſermengen, wie ſie etwa in Röhren oder kleinen Bächen und Gräben zugeführt werden, anwendbar. Das Aichgefäß wird meiſt aus Brettern zuſammengeſetzt, und bekommt deshalb eine parallelepipediſche Form; um ſeine Haltbarkeit zu erhöhen, wird es wohl noch mit eiſernen Reifen umgeben. Wie der genaue Inhalt dieſes Gefäßes zu ermitteln iſt, wird im »Ingenieur« angezeigt. Das Waſſer wird dieſem Gefäße durch ein Gerinne EF, Fig. 599, zugeführt, an deſſen Ende ſich eine Doppelklappe GH befindet, durch welche man das Waſſer nach Belieben neben dem Gefäße AC oder in daſſelbe ausfließen laſſen kann. Um die Höhe des Waſſerkörpers im Gefäße recht genau zu erhalten, wendet man wohl noch eine Waſſerſtandsſcala KL an. Wenn man vor der Meſſung die Zeigerſpitze Z bis auf die Aichen.

Fig. 599.



Aichen. Oberfläche des ſchon im Gefäße befindlichen und wenn auch vielleicht nur den Boden bedeckenden Waſſers herabgelaſſen und den Waſſerſtand an der Scala abgeleſen hat, ſo erhält man die Höhe ZZ_1 des geaichten Waſſers, durch Subtraction dieſes Waſſerſtandes von demjenigen Stande, welchen die Scala anzeigt, wenn man die Zeigerſpitze Z_1 am Ende der Beobachtung mit dem Waſſerſpiegel in Berührung gebracht hat. Vor der Meſſung iſt natürlich die Klappe ſo zu ſtellen, daß das Waſſer vor dem Kaſten ausfließt. Hat man ſich überzeugt, daß der Zufluß im Gerinne in Beharrung übergegangen iſt, und hat man an der in der Hand befindlichen Uhr einen Zeitpunkt beobachtet, ſo dreht man die Klappe um, damit das Waſſer in das Aichgefäß fließt; und iſt nachher das Gefäß ganz oder zum Theil gefüllt, ſo lieſt man auf der Uhr einen zweiten Zeitpunkt ab und bringt die Klappe wieder in die erſte Stellung. Aus dem mittleren Querſchnitte F des Gefäßes und der Höhe $ZZ_1 = a$ des Waſſerkörpers ergiebt ſich das ganze Waſſerquantum $= Fa$, und hieraus wieder mittels der durch die Differenz der beobachteten Zeiten gegebenen Füllungszeit t das Waſſerquantum pr. Sec. $Q = \frac{Fa}{t}$.

Fig. 600.



Anmerkung. Um ein veränderliches Zuflußwaſſerquantum zu jeder Tageszeit angeben zu können, kann man den in Fig. 600, abgebildeten Cubicir-Apparat, wie er vorzüglich auf Salinen vorkommt, anwenden. Hier giebt es zwei Aichgefäße A und B, die ſich abwechſelnd füllen und leeren, und das durch eine Röhre F zugeführte Waſſer geht durch eine kurze Röhre CG, welche mit einem um C drehbaren Hebel DE feſt verbunden iſt. Hat ſich das eine Gefäß, z. B. A, gefüllt, ſo fließt das Waſſer durch ein kleines Gerinne H in das Eimerchen M, dieſes zieht nun den Hebel auf der einen Seite nieder, und es kommt die Röhre CG in eine Lage, wodurch das Waſſer nach B geleitet wird. Das Aufziehen der Klappen O und P erfolgt durch über Rollen weggehende Schnüre, deren Enden mit dem Hebel verbunden ſind, und wird vorzüglich durch eiſerne Kugeln unterſtützt, die dem Niedergehen des Hebels den letzten Impuls ertheilen. Die Eimer M und N enthalten noch kleine Ausflußöffnungen, damit ſie ſich nach jedesmaligem Kippen leeren können. Uebrigens iſt noch ein Zählapparat angebracht, an welchem die Zahl der Spiele zu jeder Zeit abgeleſen werden kann. Andere Apparate dieſer Art von Brown beſchreibt Dingler's polyt. Journ. Bd. 115.

Ausfluß-regulatoren. §. 409. Sehr häufig werden kleinere und mittlere Waſſermengen mit Hülfe ihres Ausfluſſes durch eine beſtimmte Mündung und unter einem

bekannten Drucke gefunden. Aus dem Inhalte F der Mündung, aus der Druckhöhe h und mit Hülfe eines Ausflußcoefficienten μ, ergiebt ſich die Waſſermenge pr. Sec. $Q = \mu F\sqrt{2gh}$. Am beſten eignen ſich hierzu die Poncelet'ſchen Mündungen, weil für dieſe bei ſehr verſchiedenen Druckhöhen die Ausflußcoefficienten mit großer Genauigkeit bekännt ſind (§. 349); doch ſind dieſelben nur bei gewiſſen mittleren Waſſermengen anwendbar. Der Verfaſſer bedient ſich bei ſeinen Waſſermeſſungen vier ſolcher Mündungen, eine von 5, eine von 10, eine von 15 und eine von 20 Centimeter Höhe, alle aber von 20 Centimeter Weite. Dieſe Mündungen ſind in Meſſingtafeln ausgeſchnitten, welche auf hölzerne Rahmen AC, Fig. 601, befeſtigt ſind, die man mittelſt vier ſtarker eiſernen Schrauben auf jeder Wand befeſtigen kann. In vielen Fällen muß man ſich freilich größerer Mündungen bedienen, für welche die Ausflußcoefficienten nicht ſo ſicher beſtimmt ſind, ja oft laſſen ſich nur Ueberfälle anbringen, welche meiſt noch weniger Genauigkeit gewähren. Jedenfalls gilt aber die Regel, daß man bei dem Ausfluſſe ſo viel wie möglich vollſtändige und vollkommene Contraction zu erzielen ſuchen und deshalb der Mündung, wenn ſie in einer dickeren Wand befindlich iſt, nach außen eine Abſchrägung ertheilen muß. Welche Correctionen bei unvollkommener und partieller Contraction anzubringen ſind, iſt in den Paragraphen 354, 355 u. ſ. w. hinreichend auseinandergeſetzt worden. Um das Waſſer eines Gerinnes zu meſſen, hat man das Mündungsſtück einzuſetzen und den Moment abzuwarten, wann der Waſſerſtand in Beharrung gekommen iſt. Zu Meſſung der Druckhöhe kann man ſich der feſten Waſſerſtandsſcala mit Zeiger, Fig. 599, oder der beweglichen Waſſerſtandsſcala EF, Fig. 603, bedienen. Will man den Ausfluß unmittelbar an Schutzöffnungen beobachten, ſo iſt es gut, vorher ein Paar meſſingene Schützenſtandsſcalen BC und DE, Fig. 602, nebſt ihren Zeigern F und G auf die Führung und auf das Schutzbrett A zu befeſtigen, um die Oeffnungshöhe ſicherer ableſen zu können. Uebrigens iſt es meiſt beſſer zu dem Zwecke der Waſſermeſſung, gleich ein neues Schutzbrett nebſt einer Führung mit der erforderlichen Abſchrägung nach außen einzuſetzen.

Ausflußregulatoren.

Fig. 601.

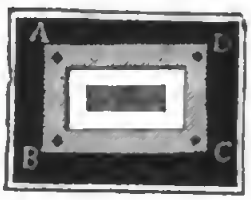


Fig. 602.

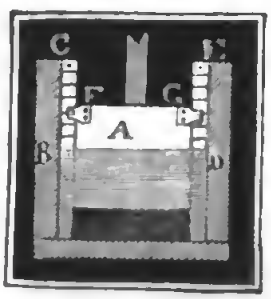
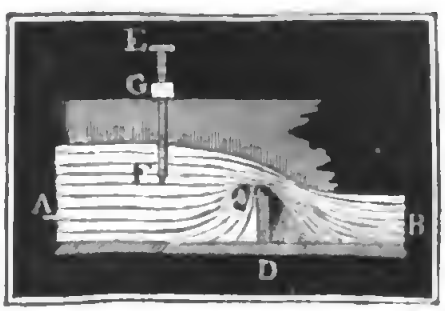


Fig. 603

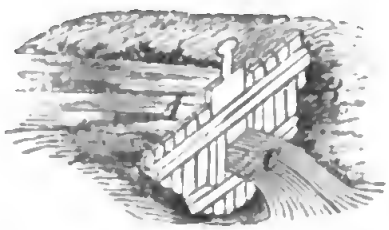


Das einfachſte Mittel, das Waſſer in einem Gerinne zu meſſen, beſteht

Ausfluß-regulatoren

allerdings in dem Einſetzen eines an der oberen Kante abgeſchräg'en Bret-tes *CD*, Fig. 603, und in der Ausmeſſung des ſich dadurch gebildeten Ueberfalles. Iſt der Graben oder das Gerinne lang und wenig anſtei-gend, ſo dauert es allerdings ziemlich lange, ehe der Beharrungszuſtand eintritt, und es iſt deshalb gut, hier vor der Meſſung noch ein zweites Brett einzuſetzen, welches den Ausfluß des Waſſers auf eine längere Zeit verhindert, um das Steigen des Waſſers auf die dem Beharrungszuſtande entſprechende Höhe zu beſchleunigen.

Fig. 604.



Um das Waſſerquantum eines Baches zu meſſen, kann man denſelben durch einen aus Pfählen und Brettern be-ſtehenden Einbau *AB*, Fig. 604, ein-dämmen und das Waſſer *C* durch eine in demſelben angebrachte Oeffnung ab-fließen laſſen, oder man kann ſich auch eines einfachen Ueberfalles oder Ueber-fallwehres (hiervon im zweiten Theile) bedienen.

Anmerkung. Das einfachſte Mittel, um die Druckhöhe zu beſtimmen, iſt, den Stand des Zeigers zu beobachten, wenn deſſen Spitze erſtens die Oberfläche des im Beharrungszuſtande abfließenden Waſſers und zweitens den Spiegel des ſtillſtehenden und nur bis Schwelle *C* aufgeſtauten Waſſers berührt. Die Diffe-renz dieſer beiden Scalenſtände iſt die Druckhöhe oder der Stand des Waſſers über der Schwelle. Bei Beobachtung des letzten Zeigerſtandes iſt die Capillarität nicht außer Acht zu laſſen, vermöge welcher der Waſſerſpiegel noch um 1,37 Linien über der Schwelle ſtehen kann, ehe der Abfluß des Waſſers über derſelben be-ginnt oder aufhört. (Siehe 322)

§. 410. Sehr einfach wird auch das Waſſer in einem rectangulären Kanale oder Gerinne *AB*, Fig. 605 und 606, gemeſſen, wenn man ein unten abgeſchrägtes Brett *CD* ſo einſetzt, daß unter demſelben eine Aus-

Fig. 605.

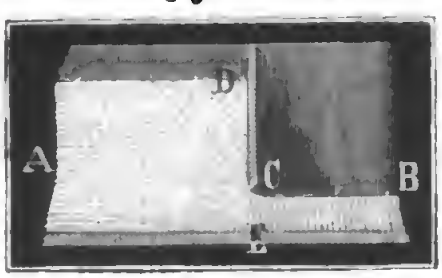
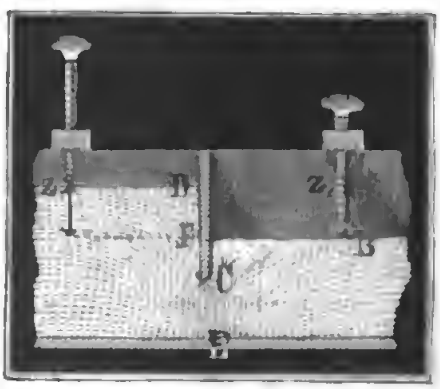


Fig. 606.



flußöffnung CE übrig bleibt, durch welche das Waſſer abfließen kann. Dieſe Methode hat vor der Anwendung eines Ueberfalles den Vorzug, daß bei ihr das geſpannte Waſſer mehr zur Ruhe kommt, und deshalb die Meſſung der Druckhöhe ſchärfer zu vollziehen iſt. Wenn es möglich iſt, ſuche man einen freien Ausfluß, wie Fig. 605, herbeizuführen, weil hierbei eine größere Genauigkeit zu erlangen iſt; bei einer großen Waſſermenge iſt es jedoch nicht möglich, das Zurückſtauen des Unterwaſſers zu verhindern, und man muß ſich daher mit einem Ausfluſſe unter Waſſer, Fig. 606, begnügen. Der mittleren Geſchwindigkeit, mit welcher das Waſſer durch die Mündung CE ſtrömt, entſpricht in beiden Fällen der Niveauabſtand zwiſchen der Oberfläche des Oberwaſſers A und der des Unterwaſſers B; da jedoch im erſten Falle dieſer Niveauabſtand nur von dem Stande $DE = h$ des Oberwaſſers und von der Höhe $CE = a$ der Mündung abhängt, ſo kann man hier wie bei dem freien Ausfluſſe, die Druckhöhe bis Mitte der Mündung meſſen und $= h - \frac{a}{2}$ ſetzen. Bezeichnet nun noch b die Breite der Mündung und des Gerinnes, ſo hat man die Ausflußmenge:

Ausfluß-regulatoren.

$$Q = \mu \,.\, ab \sqrt{2g\left(h - \frac{a}{2}\right)},$$

und es iſt nach den Verſuchen des Verfaſſers bei einer gut abgeſchärften Kante C, $\mu = 0{,}596$, dagegen bei einer abgerundeten, die Contraction gänzlich beſeitigenden Mündung $\mu = 0{,}889$ zu ſetzen.

Hat man es mit dem Ausfluſſe unter Waſſer zu thun, ſo iſt bei dem Niveauabſtande $DF = h$, Fig. 606, $Q = \mu ab \sqrt{2gh}$, und den Verſuchen des Verfaſſers zu Folge

für eine ſcharfe Kante C, $\mu = 0{,}462$
und für eine abgerundete, $\mu = 0{,}717$ zu nehmen.

Beiſpiel. Um die Waſſermenge zu finden, welche ein Gerinne AB, Fig. 606, fortführt, hat man ein ſcharfkantiges Brett CD in daſſelbe eingeſetzt, und dadurch einen Ausfluß unter Waſſer hergeſtellt, übrigens aber Folgendes gefunden. Weite der Mündung oder des Gerinnes $b = 3$ Fuß, Oeffnungshöhe oder Abſtand CE der Bretkante C vom Gerinnboden $a = 6$ Zoll, Stand des Zeigers Z auf der Seite des Oberwaſſers: $h_1 = 0{,}445$ Fuß, und Stand des Zeigers Z_1 über dem Unterwaſſer: $h_2 = 1{,}073$. Es iſt hiernach der Niveauabſtand $h = 1{,}073 - 0{,}445 = 0{,}628$ Fuß und die geſuchte Waſſermenge:

$$Q = 0{,}462 \,.\, 7{,}906 \,.\, 3{,}05 \sqrt{h_2 - h_1} = 5{,}48 \sqrt{0{,}628} = 4{,}34 \text{ Cubikfuß.}$$

§. 411. Da es oft lange dauert, ehe der Beharrungszuſtand von dem durch einen Einbau aufgeſtauten Waſſer eintritt, ſo kann man folgendes von Prony zuerſt vorgeſchlagene Verfahren mit Vortheil anwenden. Zuerſt verſchließe man die Mündung durch ein Schutzbrett ganz und laſſe

Prony's Methode.

Digitized by Google

Prony's Methode.

dadurch das Wasser ziemlich hoch, oder so weit es die Umstände erlauben, aufstauen; jetzt ziehe man das Schutzbrett so weit auf, daß mehr Wasser ab- als zufließt, und messe nun die Wasserstände in gleichen und möglichst kleinen Zeitabständen; endlich verschließe man die Schutzöffnung wieder völlig und beobachte noch die Zeit t, innerhalb welcher das Wasser auf die erste Höhe steigt. Jedenfalls ist dann im Laufe der ganzen Beobachtungszeit $t + t_1$ ebenso viel Wasser zu- als abgeflossen, und es läßt sich daher durch das Ausflußquantum in der Zeit t_1 das Zuflußquantum in der Zeit $t + t_1$ ausdrücken. Sind die Druckhöhen während des Sinkens h_0, h_1, h_2, h_3 und h_4, so hat man die mittlere Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \frac{\sqrt{2g}}{12}(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4}),$$ (s. §. 387)

und ist nun der Inhalt der Schutzöffnung $= F$, so hat man das Ausflußquantum in der Zeit t:

$$V = \frac{\mu F t\sqrt{2g}}{12}(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4}),$$ und daher das Zuflußquantum pr. Sec.:

$$Q = \frac{V}{t + t_1} = \frac{\mu F t\sqrt{2g}}{12(t + t_1)}(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4}).$$

Beispiel. Um das zum Umtriebe eines Wasserrades zu benutzende Wasser eines Baches zu messen, hat man dasselbe durch eine Spundwand, Fig. 604, eingedämmt und nach Eröffnung der rectangulären Mündung in derselben Folgendes beobachtet: anfängliche Druckhöhe 2 Fuß, nach 30″, 1,8 Fuß, nach 60″, 1,55 Fuß, nach 90″, 1,3 Fuß, nach 120″, 1,15 Fuß, nach 150″, 1,05 Fuß, und nach 180″, 0,9 Fuß; Breite der Oeffnung 2 Fuß, Höhe der Oeffnung $\frac{1}{2}$ Fuß, Zeit zum Zurücksteigen auf die erste Höhe bei verschlossener Oeffnung = 110″. Zunächst ist die mittlere Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \frac{7{,}906}{18}(\sqrt{2} + 4\sqrt{1{,}8} + 2\sqrt{1{,}55} + 4\sqrt{1{,}3} + 2\sqrt{1{,}15} + 4\sqrt{1{,}05} + \sqrt{0{,}9})$$
$$= 0{,}4392\ (1{,}414 + 5{,}364 + 2{,}490 + 4{,}561 + 2{,}145 + 4{,}099 + 0{,}949)$$
$$= 0{,}4392 \cdot 21{,}022 = 9{,}233 \text{ Fuß};$$

nun ist aber $F = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ Quadratfuß, daher folgt die theoretische Ausflußmenge = 9,233 Cubikfuß. Nimmt man den Ausflußcoefficienten = 0,61, so erhält man endlich das gesuchte Wasserquantum

$$Q = \frac{0{,}61 \cdot 180}{180 + 110} \cdot 9{,}233 = 3.495 \text{ Cubikfuß}.$$

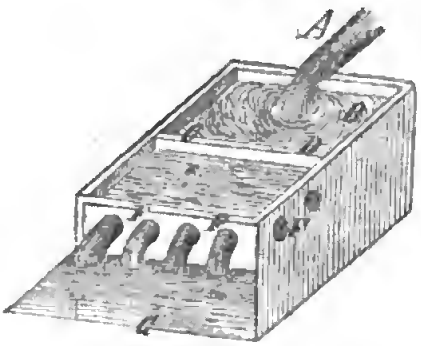
Wasserzoll.

§. 412. Um kleine Wassermengen zu messen, bedient man sich auch wohl des Ausflusses durch runde, 1 Zoll weite Mündungen in einer dünnen Wand, unter einem gegebenen Drucke. Man nennt die Wassermenge, welche eine solche Oeffnung unter dem kleinsten Drucke, oder dann, wenn der Wasserspiegel nur eine Linie über der obersten Stelle der Mündung steht, einen Wasser- oder Brunnenzoll (franz. pouce d'eau; engl. water-inch). Die Franzosen nehmen an, daß einem Wasserzolle (Alt

Pariſ. Maaß) in 24 Stunden 15 Pinten oder 19,1953 Cubikmeter Waſſer, Waſſerzoll.
alſo in 1 Stunde 0,7998 »
und in 1 Minute 0,01333 Cubikmeter entſpricht, doch weichen ältere Angaben von Mariotte, Couplet und Boſſut hiervon nicht unbedeutend ab. Nach Hagen liefert ein Waſſerzoll (für das preuß. Maaß) in 24 Stunden 520 Cubikfuß, alſo in der Minute 0,3611 Cubikfuß. Der Prony'ſche doppelte Waſſermodul, welcher einer Mündung von 2 Centimeter Durchmeſſer bei 5 Centimeter Druck entſpricht und in 24 Stunden 20 Cubikmeter Waſſer liefert, hat keine Aufnahme gefunden.

Die Beobachtungen laſſen ſich ſicherer anſtellen, wenn man eine größere Druckhöhe hat; am einfachſten iſt es, wenn man dieſe Höhe wie den Durchmeſſer der Mündung, 1 Zoll annimmt. Nach den Herren Bornemann und Röting giebt ein ſolcher Waſſerzoll täglich 642,8 Cubikfuß Waſſer. (S. den Ingenieur, Seite 481.)

Fig. 607.



Der Apparat, an dem man mit Hülfe von Waſſerzollen das Waſſer mißt, iſt in Fig. 607 abgebildet. Das zu meſſende Waſſer fließt durch die Röhre *A* in einen Kaſten *B*, aus dieſem tritt es durch unten in der Scheidewand *CD* angebrachten Löcher in den Kaſten *E*, und aus dieſem fließt es durch eine horizontale Reihe von genau einen Zoll weiten und in Blech ausgeſchnittenen runden Mündungen *F* in das Reſervoir *G*. Damit ſich aber der Waſſerſpiegel nur eine Linie über den Köpfen dieſer Mündungen ſtellt, iſt es nöthig, daß dieſe in hinreichender Zahl vorhanden ſeien, und daß man einen Theil derſelben durch Stöpſel verſchließe. Bei großen Waſſermengen theilt man wohl erſt das ganze Waſſer, und mißt auf dieſe Weiſe nur einen Theil, z. B. den zehnten. Dieſes Theilen iſt aber leicht dadurch zu bewirken, daß man das Waſſer erſt in ein Reſervoir mit einer gewiſſen Anzahl in gleichem Niveau befindlicher Mündungen leitet, und nur das von der einen Mündung gelieferte Waſſer in dem oben abgebildeten Apparate auffängt.

Anmerkung 1. Man kann auch die Hähne und andere Regulirungsapparate zur Waſſermeſſung anwenden, wenn man den jeder Stellung entſprechenden Widerſtandscoefficienten kennt. Iſt h die Druckhöhe, F der Querſchnitt des Rohres, und μ der Ausflußcoefficient bei völlig geöffnetem Hahne, ſo hat man die Ausflußmenge $Q = \mu F\sqrt{2gh}$, ſowie umgekehrt $\mu = \frac{Q}{F\sqrt{2gh}}$ und $\frac{1}{\mu^2} = \left(\frac{F}{Q}\right)^2 . 2gh$.

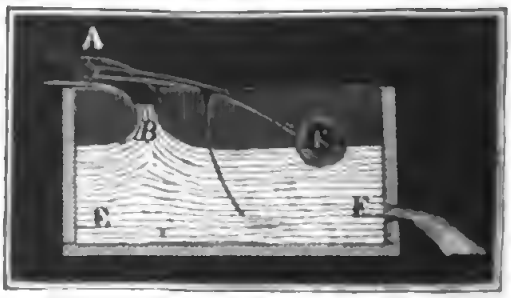
Waſſerzoll. Setzt man nun den einer Hahnſtellung entſprechenden und aus den oben mitgetheilten Tabellen zu entnehmenden Widerſtandscoefficienten $= \zeta$, ſo hat man die entſprechende Ausflußmenge:

$$Q_1 = F\sqrt{\frac{2gh}{\frac{1}{\mu^2}+\zeta}} = \frac{\mu F\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\mu^2\zeta}} = \frac{Q}{\sqrt{1+\zeta\left(\frac{Q}{F}\right)^2\cdot\frac{1}{2gh}}}.$$

Der Bequemlichkeit wegen kann man ſich hiernach eine Tabelle conſtruiren, ſo daß es nur eines Blickes auf dieſe bedarf, um die einer Hahnſtellung entſprechende Ausflußmenge, oder um die einem gegebenen Ausflußquanto entſprechende Stellung des Hahnes zu finden. Iſt z. B. $\mu = 0{,}7$ und $F = 4$ Quadratzoll, ſo hat man $Q_1 = \frac{0{,}7 \quad 4\,.\,12\,.\,7{,}906\sqrt{h}}{\sqrt{1+0{,}49\,.\,\zeta}} = 265{,}6\sqrt{\frac{h}{1+0{,}49\,\zeta}}$ Cubikzoll, oder wenn h conſtant 1 Fuß iſt, $Q_1 = \frac{265{,}6}{\sqrt{1+0{,}49\,\zeta}}$. Wenn nun den Hahnſtellungen 5°, 10°, 15°, 20°, 25° u. ſ. w. die Widerſtandscoefficienten 0,057; 0,293; 0,758; 1,559; 3,095 zukommen, ſo entſprechen dieſen die Ausflußmengen: 262,1; 248,4; 226,8; 200,0; 167,4 Cubikzoll.

Fig. 608

Fig. 609.



Anmerkung 2. Um den Ausfluß durch eine Mündung *D*, Fig. 608, zu reguliren, kann man einen Ueberfall *B* anbringen, damit das durch die Röhre *A* im Uebermaaße herbeigeführte Waſſer durch denſelben abfließe, und ein conſtanter Druck im Reſervoir *DE* erhalten werde. Um gar keinen Waſſerverluſt zu erhalten, wendet man auch einen Hahn oder eine Klappe *A*, Fig. 609, an, welche durch einen Schwimmer *K* mittels eines Hebels regulirt wird, ſo daß durch *B* immer nur ſo viel Waſſer zu-, als durch *F* abfließt.

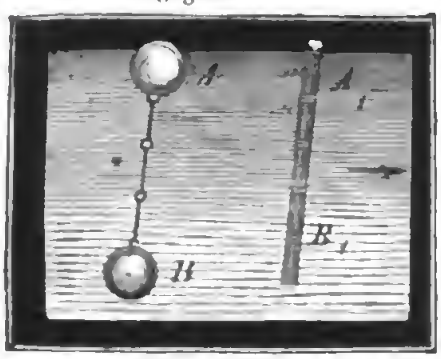
Schwimmer. §. 413. Die Waſſermengen von größeren Bächen, Kanälen und von Flüſſen laſſen ſich nur mittels die Geſchwindigkeit angebender Hydrometer beſtimmen. Unter dieſen Inſtrumenten ſind aber die Schwimmer (franz. flotteurs; engl. floating-bodies) die einfachſten. Man kann zwar hierzu jeden ſchwimmenden Körper gebrauchen, doch iſt es ſicherer, Körper von mittlerer Größe, welche nur wenig ſpecifiſch leichter als Waſſer ſind, hierzu zu verwenden. Körper von ohngefähr $\frac{1}{10}$ Cubikfuß Inhalt ſind hinreichend groß. Sehr große Körper nehmen nicht leicht die Geſchwindigkeit des Waſſers an, und ſehr kleine Körper laſſen ſich wieder, namentlich wenn ſie viel aus dem Waſſer hervorragen, leicht durch zufällige Umſtände, zumal durch die Luft über dem Waſſerſpiegel, in ihrer Bewegung ſtören. Oft

wendet man einfache Holzſtücke an, gut iſt es aber, wenn dieſelben mit einer hellen Firnißfarbe überſtrichen ſind, und noch beſſer ſind die hohlen Schwimmer, wie Glasflaſchen, Blechkugeln u. ſ. w., weil man dieſe nach Belieben mit Waſſer füllen kann. Am häufigſten wendet man aber die Schwimmkugeln an. Dieſelben werden von 4 bis 12 Zoll Durchmeſſer aus Meſſingblech verfertigt, ſie bekommen, um ſie nicht leicht aus dem Auge zu verlieren, einen Anſtrich von lichter Oelfarbe, und erhalten auch noch eine Oeffnung mit einem Halſe, um ſie mit Waſſer anfüllen und verſtöpſeln zu können. Eine ſolche Schwimmkugel *A*, Fig. 610, giebt allerdings nur die Geſchwindigkeit an der Oberfläche und ſogar oft nur die im Stromſtriche an, allein man kann durch das Aneinanderhängen zweier Kugeln *A* und *B*, Fig. 611, auch die Geſchwindigkeiten in verſchiedenen Tiefen beſtimmen. In dieſem Falle wird die eine Kugel *B*, welche unter Waſſer ſchwimmen ſoll, ganz mit Waſſer, die andere aber, welche im Waſſerſpiegel zu ſchwimmen beſtimmt iſt, nur ſo viel mit Waſſer angefüllt, daß ſie nur wenig aus dem Waſſer hervorragt. Beide Kugeln werden durch einen Faden oder durch einen Draht, oder durch eine dünne Drahtkette mit einander verbunden. Zuerſt beſtimmt man durch die einfache Kugel die Oberflächengeſchwindigkeit c_0, und dann beobachtet man durch die Kugelverbindung die mittlere Geſchwindigkeit c beider, bezeichnet man nun die Geſchwindigkeit in der Tiefe der zweiten Kugel durch c_1, ſo läßt ſich ſetzen:

Schwimmer.

Fig. 610.

Fig. 611.



$c = \frac{c_0 + c_1}{2}$, und daher umgekehrt, $c_1 = 2c - c_0$. Indem man nun beide Kugeln durch längere und längere Drähte mit einander verbindet, ſo kann man auf dieſe Weiſe die Geſchwindigkeiten in größeren und größeren Tiefen finden. Uebrigens ergiebt ſich auch die mittlere Geſchwindigkeit c eines Perpendikels, wenn man die zweite Kugel nahe über dem Boden ſchwimmen läßt und ebenfalls $c = \frac{c_0 + c_1}{2}$ ſetzt; genauer aber noch, wenn man das Mittel aus allen beobachteten Geſchwindigkeiten in einem Perpendikel nimmt.

Um die mittlere Geſchwindigkeit in einem Perpendikel anzugeben, wendet man auch oft den in Fig. 611 abgebildeten Schwimmſtab A_1B_1 an, namentlich iſt dieſer bei Meſſungen in Kanälen und Gräben bequem, zumal, wenn er aus kurzen Stücken zuſammengeſchraubt werden kann. Der Schwimmſtab, welchen der Verfaſſer anwendet, iſt aus 15 ausgehöhlten Theilen, jeder

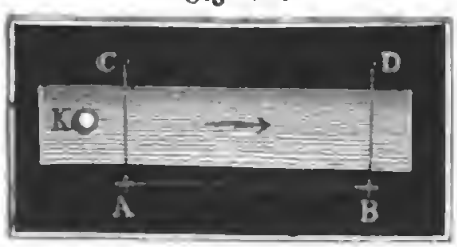
Schwimmer. von 1 Decimeter Länge zuſammengeſetzt. Damit derſelbe ziemlich aufrecht ſchwimme, wird ſtets das unterſte Stück ſo ſtark mit Schrot angefüllt, daß der Kopf beim Schwimmen nur wenig aus dem Waſſer hervorragt. Die Anzahl der zuſammenzuſchraubenden Stücke hängt natürlich von der Tiefe des Kanales ab.

An dem Schwimmſtabe, ſowie an der Schwimmkugelverbindung läßt ſich auch wahrnehmen, daß bei ungehinderter Bewegung des Waſſers in Betten die Geſchwindigkeit am Waſſerſpiegel größer iſt, als am Boden, weil der Kopf des Stabes dem Fuße und die obere Kugel der unteren etwas vorausſchwimmt. Nur bei durch Verengungen, z. B. durch Brückenpfeiler gebildeten Aufſtauungen, findet das Gegentheil ſtatt.

Anmerkung. In der Regel iſt, namentlich bei großen Schwimmern, wie Schiffen u. ſ. w., die Geſchwindigkeit der ſchwimmenden Körper etwas größer als die des Waſſers, weniger deshalb, weil dieſe Körper beim Schwimmen von einer durch die Oberfläche des Waſſers gebildeten ſchiefen Ebene herabgleiten, als deshalb, weil ſie nicht oder nur zum Theil an der unregelmäßigen inneren Bewegung des Waſſers Theil nehmen, doch iſt die Abweichung bei kleinen Schwimmern klein genug, um ſie vernachläſſigen zu können.

§. 414. Die Geſchwindigkeit einer Schwimmkugel findet man, indem man mit einer guten Secundenuhr oder an einem halbe Secunden ſchlagenden Lothe oder Pendel (§. 263) die Zeit t beobachtet, welche dieſe auf dem Waſſer ſchwimmend braucht, um eine an einem Ufer abgeſteckte und ausgemeſſene Strecke $AB = s$, Fig. 612, zurückzulegen. Es iſt dann die geſuchte Geſchwindigkeit der Kugel $c = \frac{s}{t}$. Damit die Zeit t genau dem am Ufer abgemeſſenen Wege entſprechend gefunden werde, iſt es nöthig, mit Hülfe eines Winkelkreuzes oder Winkelſpiegels am jenſeitigen Ufer zwei, Perpendikel auf AB bezeichnende Signalſtangen C und D, einzuſtecken. Stellt man ſich hinter A, ſo kann man den Zeitpunkt beobachten, wenn der etwas oberhalb A eingeſetzte Schwimmer K in das Alignement AC kommt, und begiebt man ſich hinter B, ſo kann man ebenfalls an der in der Hand gehaltenen Uhr beobachten, wann der Schwimmer in das Alignement BD gelangt, und man findet dann durch Subtraction der Beobachtungszeiten die geſuchte und der Durchlaufung von s entſprechende Zeit t. Außer der mittleren Geſchwindigkeit c des Waſſers iſt auch noch der Inhalt F des Querprofiles erforderlich, um das Waſſerquantum $Q = Fc$ zu beſtimmen. Um dieſen Inhalt angeben zu können, iſt es aber nöthig, daß man die Breite und mittlere Tiefe des Waſſers kenne. Die Tiefen mißt man mit einer einge-

Fig. 612.



theilten Sondirſtange *AB*, Fig. 613, mit rhomboidalem Querſchnitte und einem Brettchen *B* am Fuße; bei größeren Tiefen kann man ſich auch einer Sondirkette bedienen, an deren Ende eine eiſerne Platte hängt, die ſich beim Einſenken auf das Grundbette aufſetzt. Die Breite und die den gemeſſenen Tiefen entſprechenden Abſciſſen oder Abſtände von den Ufern ergeben ſich bei Kanälen und ſchmalen Bächen *EFG*, Fig. 614, durch Ausſpannen einer Meßkette *AB* oder Legen einer Stange u. ſ. w. quer

Schwimmer.

Fig. 613.

Fig. 614.

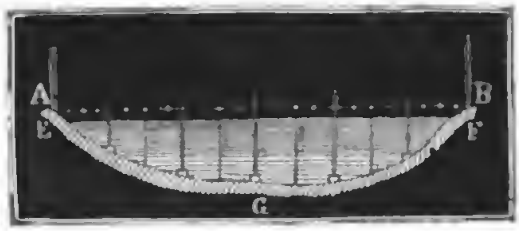
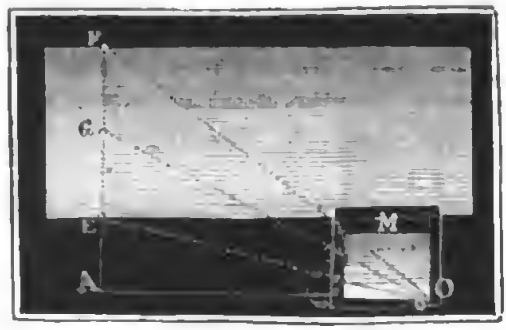


Fig. 615.



über das fließende Waſſer. Bei breiten Flüſſen beſtimmt man ſie mit Hülfe eines Meßtiſches *M*, den man in ſchicklicher Entfernung *AO* vom zu meſſenden Querprofile *EF*, Fig. 615, aufſtellt. Iſt *ao* auf der Menſel die verjüngte Entfernung *AO* der Standpunkte *A* und *O* von einander, und hat man *ao* in der Richtung von *AO* geſtellt, und dadurch auch die vorher beim Aufſtellen des Meßtiſches aufgetragene Breitenrichtung *af* mit der abgeſteckten Breitenlinie *AF* parallel geſtellt, ſo ſchneidet jede Viſirlinie nach den Punkten *E*, *F*, *G* u. ſ. w. im Querprofile entſprechende Punkte *e*, *f*, *g* auf der Menſel ab, und es ſind *ae*, *af*, *ag* u. ſ. w. die Entfernungen *AE*, *AF*, *AG* u. ſ. w. im verjüngten Maaße. Man hat alſo beim Einſetzen der Sondirſtange und dem dadurch bewirkten Tiefenmeſſen nicht erſt nöthig, die Entfernungen der entſprechenden Punkte von den Ufern zu meſſen, wenn der am Meßtiſche ſtehende Ingenieur die Sondirſtange beim Einſetzen in der Linie *EF* anviſirt.

Beſteht nun die Breite *EF*, Fig. 614, eines Querprofiles aus den Theilen b_1, b_2, b_3 u. ſ. w. und ſind die mittleren Tiefen innerhalb dieſer Theile a_1, a_2, a_3 und die mittleren Geſchwindigkeiten c_1, c_2, c_3 u. ſ. w., ſo hat man den Inhalt des Querprofiles: $F = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots$,

Schwimmer. die Waſſermenge $Q = a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_3c_3 + \ldots$, und endlich die mittlere Geſchwindigkeit $c = \frac{Q}{F} = \frac{a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \ldots}{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots}$.

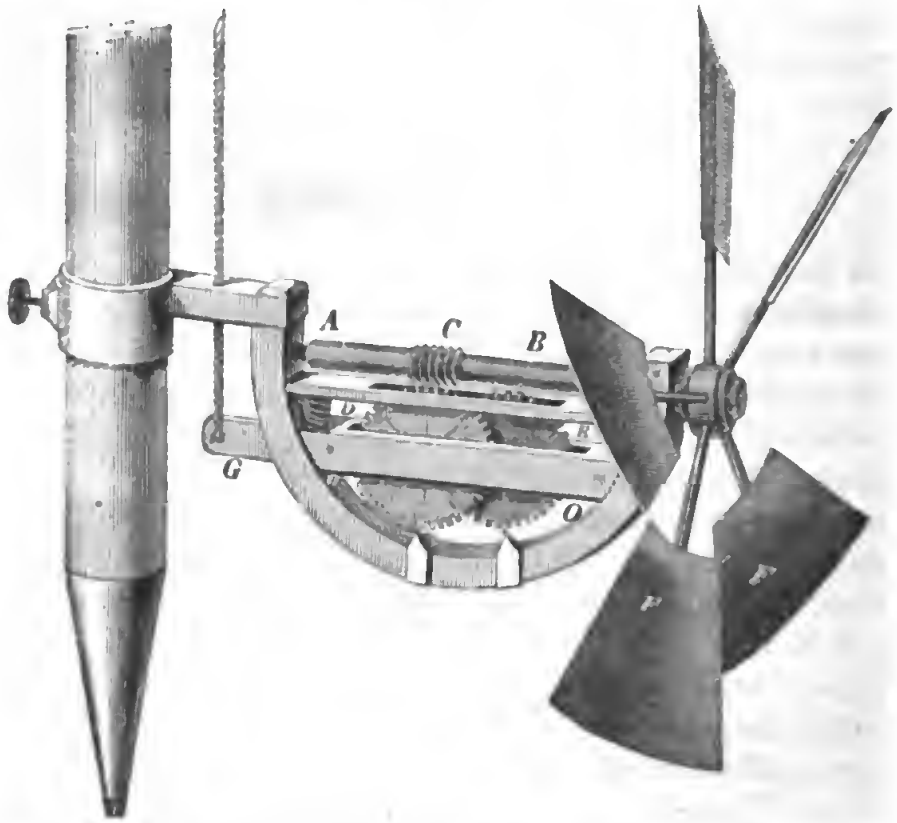
Beiſpiel. An einer ziemlich geraden und unveränderlichen Flußſtrecke hat man in den Mittelpunkten der Breitentheile

	5 Fuß,	12 Fuß,	20 Fuß,	15 Fuß,	7 Fuß,
die Tiefen:	3 »	6 »	11 »	8 »	4 »
die mittleren Geſchwindigkeiten:	1,9 »	2,3 »	2,8 »	2,4 »	2,1 »;

es läßt ſich daher ſetzen:
der Inhalt des Querprofiles $F = 5.3 + 12.6 + 20.11 + 15.8 + 7.4 = 455$ Quadratfuß,
das Waſſerquantum $Q = 15.1{,}9 + 72.2{,}3 + 220.2{,}8 + 120.2{,}4 + 28.2{,}1 = 1156{,}9$ Cubikfuß. Die mittlere Geſchwindigkeit iſt $c = \frac{1156{,}9}{455} = 2{,}54$ Fuß.

Hydrometriſcher Flügel. §. 415. Das vorzüglichſte Hydrometer iſt der hydrometriſche Flügel von Woltmann (franz. Moulinet de Woltmann; engl. Sail-wheel of Woltmann) Fig. 616. Er beſteht aus einer horizontalen Welle AB mit 2 bis 5 ſchief gegen die Axenrichtung ſtehenden

Fig. 616.



Flächen oder Schaufeln F, und giebt, unter das Waſſer getaucht und der Bewegungsrichtung deſſelben entgegengehalten, durch die Anzahl ſeiner Umdrehungen innerhalb einer gewiſſen Zeit die Geſchwindigkeit des fließenden Waſſers an. Um die Anzahl dieſer Umdrehungen ableſen zu

können, erhält die Welle ein paar Schraubengänge C, und läßt dieſe zwiſchen die Zähne eines Rades D greifen, auf deſſen Seitenflächen Ziffern eingravirt ſind, welche an einem feſten Zeiger die Anzahl der Umdrehungen der Flügelwelle angeben. Um aber eine große Anzahl der Umdrehungen beobachten zu können, wird auf die Welle dieſes Zahnrades noch ein Getriebe aufgeſetzt, das in ein zweites Zahnrad E eingreift, an dem ſich, gleichſam wie am Stundenweiſer einer Uhr, vielfache, z. B. fünf- oder zehnfache der Flügelumdrehungen ableſen laſſen. Hat z. B. jeder der beiden Zahnräder 50 Zähne, und das Getriebe deren 10, ſo dreht ſich das zweite Rad um einen Zahn, während das erſte um fünf Zähne fortrückt, oder das Flügelrad fünf Umdrehungen macht. Wenn der Zeiger des erſten Rades auf $27 = 25 + 2$ und des zweiten auf 32 ſteht, ſo iſt hiernach die entſprechende Umdrehungszahl des Flügels $= 32 . 5 + 2 = 162$. Das ganze Inſtrument wird mit einer Blechfahne an einen Stab geſchraubt, um es bequem in's Waſſer eintauchen und dem Strome entgegenhalten zu können. Damit aber das Räderwerk nur während der Beobachtungszeit umlaufe, läßt man ſeine Axen in Pfannen umgehen, die auf einem Hebel GO ſitzen, der durch eine Feder niedergedrückt wird, ſo daß ein Eingreifen der Zähne des erſten Rades in die Schraubengänge nur ſo lange ſtatt hat, als man den Hebel mittels einer Schnur emporzieht. Hydrometriſcher Flügel.

Die Umdrehungszahl eines Flügels in einer gewiſſen Zeit, z. B. in einer Secunde, iſt nicht genau der Geſchwindigkeit des Waſſers proportional, es läßt ſich daher auch nicht $v = \alpha . u$, wo u die Umdrehungszahl, v die Geſchwindigkeit und α eine Erfahrungszahl bezeichnen, ſetzen; es iſt vielmehr zu ſetzen: $v = v_0 + \alpha u$, oder genauer $v = v_0 + \alpha u + \beta u^2 \ldots$ oder noch genauer $v = \alpha u + \sqrt{v_0^2 + \beta u^2}$, wo v_0 diejenige Geſchwindigkeit bezeichnet, bei welcher das Waſſer nicht mehr im Stande iſt, den Flügel in Umdrehung zu ſetzen, α und β aber Erfahrungscoefficienten ausdrücken. Die Conſtanten v_0, α, β ſind für jedes Inſtrument beſonders zu ermitteln. Mit Hülfe ihrer ergiebt ſich durch eine einzige Beobachtung die Geſchwindigkeit, doch iſt es ſicherer, deren immer wenigſtens zwei anzuſtellen, und den mittleren Werth als den richtigen einzuführen.

Beiſpiel. Wenn bei einem Flügel $v_0 = 0{,}110$ Fuß, $\alpha = 0{,}480$, und $\beta = 0$, alſo $v = 0{,}11 + 0{,}48\,u$ iſt, und man hat bei einer Beobachtung mit dieſem Inſtrumente in einer Zeit von 80 Secunden eine Umdrehungszahl von 210 gefunden, ſo iſt die entſprechende Geſchwindigkeit des Waſſers:

$$v = 0{,}11 + 0{,}48 . \frac{210}{80} = 0{,}11 + 1{,}26 = 1{,}37 \text{ Fuß}.$$

Anmerkung 1. Die Conſtanten v_0, α und β hängen vorzüglich von der Größe des Stoßwinkels, d. i. von dem Winkel ab, welchen die Flügelebene mit der Bewegungsrichtung des Waſſers und alſo auch mit der Axenrichtung des Flügels einſchließt. Um bei kleinen Geſchwindigkeiten noch ziemlich genau beobachten zu kon-

Hydrometriſcher Flügel.

Fig. 617.

nen, iſt es gut, den Stoßwinkel groß, d. i. gegen 70° zu machen. Uebrigens iſt es zweckmäßig, Flügel von verſchiedener Größe und verſchiedenen Stoßwinkeln zu haben, um, je nach dem die Tiefe oder die Geſchwindigkeit des fließenden Waſſers größer oder kleiner iſt, den einen oder den anderen anwenden zu können.

Anmerkung 2. Um die Oberflächengeſchwindigkeit des Waſſers zu finden, wendet man auch wohl ein kleines Blechrädchen, wie Fig. 617 repräſentirt, an, indem man nur deſſen Untertheil in's Waſſer eintaucht. Die Anzahl der Umdrehungen deſſelben läßt ſich durch ein Räderwerk genau wie beim hydrauliſchen Flügel angeben.

§. 416. Um die Conſtanten oder Coefficienten eines hydrometriſchen Flügels zu finden, iſt es nöthig, dieſes Inſtrument in fließende Waſſer einzuhalten, deren Geſchwindigkeiten bekannt ſind, und die entſprechenden Umdrehungszahlen zu beobachten. Wiewohl man eigentlich nur ſo viel Beobachtungen braucht, als Conſtanten vorhanden ſind, ſo iſt es doch viel ſicherer, ſo viel Beobachtungen wie möglich, und namentlich auch bei ſehr verſchiedenen Geſchwindigkeiten anzuſtellen, weil man dann die Methode der kleinſten Quadrate anwenden und dadurch den Einfluß der zufälligen Beobachtungsfehler herabziehen kann. Uebrigens kann man die Geſchwindigkeit des Waſſers entweder durch eine Schwimmkugel oder auch dadurch finden, daß man das Waſſer in einem Aichgefäße auffängt, und die darin gemeſſene Waſſermenge durch das Querprofil dividirt. Bei Anwendung der Schwimmkugeln iſt ruhige Luft und eine gerade und gleichförmig fließende Waſſerſtrecke nöthig. Der Flügel iſt an mehreren Stellen des von dem Schwimmer durchlaufenen Weges einzuhalten, und es iſt auch die Genauigkeit befördernd, wenn der Durchmeſſer der Schwimmkugel ohngefähr gleich iſt dem Durchmeſſer des Flügelrades.

Viele Vortheile gewährt die zweite Beſtimmungsweiſe, wo man das Waſſer, in welches der Flügel eingetaucht wird, in einem Aichkaſten auffängt. Zu dieſem Zwecke, und zum Juſtiren der Hydrometer überhaupt, iſt es ſehr gut, wenn der Hydrauliker über ein beſonderes, aus einem Ausflußkaſten, einem Aichreſervoir und einem zwiſchen beiden befindlichen Gerinne beſtehendes hydrauliſches Obſervatorium verfügen kann. Bei einem ſolchen iſt ohne Umſtände dem Waſſer jede beliebige Geſchwindigkeit zu ertheilen, indem man nicht nur den Eintritt in das Gerinne, ſondern auch die Bewegung in demſelben durch Einſatzbretter nach Willkür reguliren kann. Bei den Beobachtungen hat man den Flügel an verſchiedenen Stellen eines Querprofiles im Gerinne einzuhalten, die Tiefe dieſes Profiles durch Waſſerſtandsſcalen zu meſſen, und endlich das in irgend einer Zeit durchgelaufene Waſſer im untern Reſervoir zu aichen (§. 408). Den Inhalt F des Querprofiles erhält man durch Multiplication der mittleren Waſſertiefe mit der

mittleren Breite, und das Waſſerquantum Q erhält man aus dem mittleren Querſchnitte G des Aichmaaßes und der Höhe s des in der Zeit zugefloſſenen Waſſerquantums durch die Formel $Q = \frac{Gs}{t}$; aus Q und F folgt aber die mittlere Waſſergeſchwindigkeit $v = \frac{Q}{F} = \frac{Gs}{Ft}$. Hydrometriſcher Flügel.

Die entſprechende Umdrehungszahl u des Flügels iſt das Mittel aus allen Umdrehungen, welche man erhält, wenn man das Inſtrument in verſchiedenen Breiten und Tiefen des ausgemeſſenen Querprofiles einhält.

Hat man nun bei einer Verſuchsreihe die mittleren Geſchwindigkeiten v_1, v_2, v_3 u. ſ. w. und die entſprechenden Umdrehungszahlen gefunden, ſo erhält man durch Subſtitution in der Formel $v = v_0 + \alpha u$, oder in der genaueren $v = \alpha u + \sqrt{v_0^2 + \beta u^2}$ ſo viel Beſtimmungsgleichungen für die Conſtanten v_0, α, β, als Beobachtungen angeſtellt worden ſind, und man kann nun hieraus die Conſtanten ſelbſt finden, indem man entweder ein im Ingenieur §. 17 angegebenes Verfahren anwendet, oder indem man dieſe Gleichungen in ſo viel Gruppen theilt, als unbekannte Conſtanten vorhanden ſind, und dieſe durch Addition zu ſo viel Beſtimmungsgleichungen vereinigt, als zur Ermittelung von v_0, α und nach Befinden, β, nöthig ſind.

Anmerkung 1. Wenn man die einfachere Formel mit 2 Conſtanten zu Grunde legt, ſo kann man nach der Methode der kleinſten Quadrate ſetzen:
$v_0 = \frac{\Sigma(y^2)\,\Sigma(x) - \Sigma(xy)\,\Sigma(y)}{\Sigma(x^2)\,\Sigma(y^2) - [\Sigma(xy)]^2}$ und $\alpha = \frac{\Sigma(x^2)\,\Sigma(y) - \Sigma(xy)\,\Sigma(x)}{\Sigma(x^2)\,\Sigma(y^2) - [\Sigma(xy)]^2}$, wobei $x = \frac{1}{v}$ und $y = \frac{u}{v}$, das Zeichen Σ aber die Summe von allen ihm folgenden gleichnamigen Werthen, z B. $\Sigma(x) = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \ldots$,
$\Sigma(xy) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{u_1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{u_2}{v_2} + \frac{1}{v_3} \cdot \frac{u_3}{v_3} + \ldots$ bezeichnet.

Beiſpiel. Man hat mit einem kleinen hydrometriſchen Flügel bei den Geſchwindigkeiten: 0,163; 0,205; 0,298; 0,366; 0,610 Meter, die Umdrehungszahlen pro Secunde: 0,600; 0,835; 1,467; 1,805; 3,142 beobachtet, und ſoll nun die dieſem Flügel entſprechenden Conſtanten beſtimmen. Mit Hülfe der in der Anmerkung gegebenen Formel folgt, da

$\Sigma(x) = \frac{1}{0,163} + \frac{1}{0,205} + \ldots = 18,740$, $\Sigma(y) = \frac{0,600}{0,163} + \ldots = 22,759$,
$\Sigma(x^2) = \left(\frac{1}{0,163}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,205}\right)^2 + \ldots = 82,846$, $\Sigma(y^2) = 105,223$, und
$\Sigma(xy) = \frac{0,600}{(0,163)^2} + \frac{0,835}{(0,205)^2} + \ldots = 80,961$ iſt,
$v_0 = \frac{105,223 \cdot 18,740 - 80,961 \cdot 22,759}{82,846 \cdot 105,223 - (80,961)^2} = \frac{129,5}{2162} = 0,060$ und $\alpha = \frac{368,3}{2162}$
$= 0,1703$, daher gilt für dieſes Inſtrument die Formel $v = 0,060 + 0,1703\,u$.

Hydrometrischer Flügel.

Setzt man hierin $u = 0{,}6$, so bekommt man $v = 0{,}060 + 0{,}102 = 0{,}162$
ferner $u = 0{,}835$ giebt $v = 0{,}060 + 0{,}142 = 0{,}202$;
ferner $u = 1{,}467$ » $v = 0{,}060 + 0{,}249 = 0{,}309$;
$u = 1{,}805$ » $v = 0{,}060 + 0{,}307 = 0{,}367$;
endlich $u = 3{,}142$ » $v = 0{,}060 + 0{,}535 = 0{,}595$;

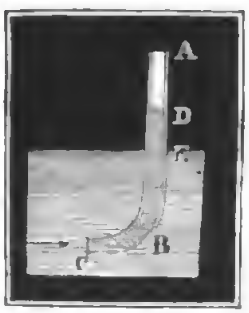
es findet also eine sehr gute Uebereinstimmung dieser berechneten Werthe mit de beobachteten statt.

Anmerkung 2. Man kann auch nach Lapointe das hydraulische Flügelrad in eine cylindrische Röhre einsetzen, und sich von demselben die Geschwindigkeit des durchfließenden Wassers angeben lassen. Der Zählapparat kann dann außerhalb des Wassers stehen und mit dem Rade durch eine stehende Welle in Verbindung gesetzt werden. Lapointe nennt dieses Instrument une tube jaugeur (s. Comptes rendues, Bd. 25, auch Polytechn. Centralblatt, 1847). In Frankreich fängt man erst seit Kurzem an, dem hydraulischen Flügelrade die nöthige Aufmerksamkeit zu schenken. Wir finden eine ausführliche Abhandlung über dieses Instrument in den Annales des ponts et chaussées, T. XIV, 1847, von Baumgarten, und einen Auszug hiervon im polytechnischen Centralblatt 1849. Herr Baumgarten empfiehlt besonders die Schraubenflügel, und macht hierzu noch manche Bemerkungen, die allerdings mit den von uns schon längst gemachten Erfahrungen ganz im Einklange stehen.

Pitot'sche Röhre.

§. 417. Die übrigen Hydrometer sind unvollkommener als der hydraulische Flügel, denn sie gewähren entweder weniger Genauigkeit, oder sie sind umständlicher im Gebrauche. Das einfachste Instrument dieser Art ist die Pitot'sche Röhre (franz. la tube de Pitot; engl. Pitot's tube).

Fig. 618.



In seiner einfachsten Gestalt besteht es in einer gläsernen Knieröhre ABC, Fig. 618, welche so in's Wasser gehalten wird, daß der untere Theil derselben horizontal und dem Wasser entgegen zu stehen kommt. Durch den Wasserstoß wird nun in dieser Röhre eine Wassersäule zurückgehalten, die über das Niveau des äußeren Wasserspiegels zu stehen kommt, und die Erhebung DE dieser Wassersäule fällt um so größer aus, je größer der Stoß oder die ihn erzeugende Geschwindigkeit des Wassers ist; es kann daher auch umgekehrt diese Erhebung oder Niveaudifferenz als Maaß der Geschwindigkeit des Wassers dienen. Setzen wir diese Erhebung DE über den äußeren Wasserspiegel $= h$, und die Geschwindigkeit des Wassers $= v$, so können wir $h = \frac{v^2}{2g\mu^2}$, wo μ eine Erfahrungszahl ist, und daher umgekehrt, $v = \mu\sqrt{2gh}$ oder einfacher $v = \psi\sqrt{h}$ setzen. Um die Constante ψ zu finden, hält man das Instrument an einer Stelle in's Wasser, wo die Geschwindigkeit v_1 bekannt ist; zeigt sich hier die Erhebung $= h_1$, so hat man für die Constante $\psi = \frac{v_1}{\sqrt{h_1}}$, welche nun in anderen

Fällen, wo die Geſchwindigkeit mit dieſem Inſtrumente geſucht werden ſoll, zu gebrauchen iſt. Pitot'ſche Röhre.

Fig 619.

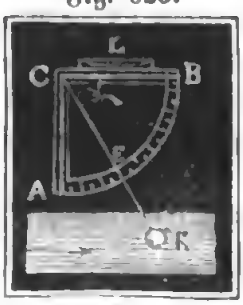
Um das Ableſen der Höhe h zu erleichtern, läßt man das Inſtrument aus zwei Röhren beſtehen, und wie Figur 619 zeigt, aus der einen ein Röhrchen F gegen den Strom, aus der andern aber zwei Röhrchen G und G_1 rechtwinkelig gegen die Stromrichtung, durch beide Röhren aber einen einzigen Hahn H gehen, womit man die Waſſerſäulen in beiden Röhren abſperren kann. Zieht man das Inſtrument aus dem Waſſer heraus, ſo kann man bequem an einer zwiſchen beiden Röhren befindlichen Scala die Differenz $CD = h$ beider Waſſerſäulen ableſen. Damit das Waſſer in der Röhre keine große Schwankungen annehme, iſt nöthig, den Röhren enge Einmündungen zu geben, und damit das Abſperren der Röhren ſchnell und ſicher vor ſich gehen könne, verſieht man den Hahn mit einem Arme und einer Drahtſtange HK, welche oben nahe an der Handhabe des Inſtrumentes ſich endigt.

Anmerkung 1. Wenn auch die Pitot'ſche Röhre nicht die Genauigkeit gewährt wie der hydrauliſche Flügel, ſo iſt ſie doch wegen ihres einfachen Gebrauches ein ſehr zu empfehlendes Inſtrument. Der Verfaſſer handelt im polytechniſchen Centralblatte, 1847, etwas ſpecieller von dieſem Inſtrumente und theilt auch daſelbſt eine Reihe von Erfahrungszahlen und die darauf gegründete Beſtimmung des Coefficienten ψ mit. Bei ſeinem Inſtrumente ſind die Geſchwindigkeiten zwiſchen 0,32 und 1,24 Meter, $v = 3{,}545\sqrt{h}$ Meter zu ſetzen.

Anmerkung 2. Duchemin empfiehlt eine Pitot'ſche Röhre mit Schwimmer. Da dieſelbe ziemlich weit ſein muß, ſo giebt ſie eine nicht unbeträchtliche Stauung, weshalb ſie in engen Kanälen nicht zu gebrauchen iſt. S. Duchemin: Recherches expérim. sur les lois de la résistance des fluides. Boileau wendet eine unten zuſammengezogene gerade Röhre an, um der Geſchwindigkeit des Waſſers bei Ueberfällen zu ermitteln. S. deſſen 4 Abhandlungen in den Compt. rendues oder die Auszüge hiervon in dem polytechn. Centralblatte.

§. 418. Der Stromquadrant oder das hydrometriſche Pendel (franz. pendule hydrométrique; engl. hydrometrical-pendulum) iſt vorzüglich von Ximenes, Michelotti, Gerſtner und Eytelwein zum Meſſen der Geſchwindigkeit fließender Waſſer angewendet worden. Dieſes Inſtrument beſteht aus einem in Grade und feinere Theile eingetheilten Quadranten AB, Fig. 620, und aus einer im Mittelpunkte C deſſelben mittels eines Fadens aufgehängten Metall- oder Elfenbeinkugel K von 2 bis 3 Zoll Durchmeſſer; es giebt die Geſchwindigkeit Stromquadrant.

Fig. 620.



Stromquadrant. des Waſſers durch den Winkel ACE an, um welchen der von der Kugel geſpannte Faden von der Vertikalen abweicht, wenn man die Ebene des Inſtrumentes in die Richtung des Stromes bringt, die Kugel aber unter das Waſſer tauchen läßt. Da der Winkel nicht leicht 40 und mehr Grade beträgt, ſo giebt man dieſem Inſtrumente oft nur die Form eines rechtwinkeligen Dreieckes und bringt die Gradtheilung auf der horizontalen Kathete deſſelben an. Zum Einſtellen der Index- oder Nullinie in die Vertikale wendet man am beſten eine oben aufſitzende Röhrenlibelle an, oder man bedient ſich dazu der Kugel ſelbſt, indem man dieſelbe außerhalb des Waſſers hängen läßt und das Inſtrument ſo lange dreht, bis der Faden in die Nullinie der Eintheilung fällt. Bei Geſchwindigkeiten unter 4 Fuß kann man ſich einer Elfenbeinkugel, bei größeren Geſchwindigkeiten muß man ſich aber hohler Metallkugeln bedienen. Wegen der ſteten Schwankungen der Kugel in der Bewegungsrichtung des Waſſers ſowohl als auch rechtwinkelig gegen die Stromrichtung, iſt das Ableſen ziemlich beſchwerlich und läßt viel Unſicherheit zurück, weswegen man dieſes Inſtrument nicht zu den vollkommneren zählen darf.

Die Abhängigkeit zwiſchen dem Ablenkungswinkel und der Geſchwindigkeit des Waſſers läßt ſich bei einer nicht ſehr tief eingetauchten Kugel auf folgende Weiſe ermitteln. Aus dem Gewichte G der Kugel und aus dem mit dem Quadrate der Geſchwindigkeit v und dem Querſchnitte F der Kugel gleichmäßig wachſenden Waſſerſtoße $P = \mu F v^2$, folgt eine Mittelkraft R, deren Richtung auch der Faden annimmt, und beſtimmt iſt durch den Ablenkungswinkel β, für den man hat $tang.\beta = \frac{P}{G} = \frac{\mu F v^2}{G}$; es iſt daher auch umgekehrt, $v^2 = \frac{G\, tang.\beta}{\mu F}$, und $v = \sqrt{\frac{G}{\mu F}} \cdot \sqrt{tang.\beta}$, d. i. $v = \psi\sqrt{tang.\beta}$, wenn ψ einen Erfahrungscoefficienten bezeichnet, den man vor dem Gebrauche nach der oben angegebenen Regel zu ermitteln hat.

Rheometer. §. 419. Die übrigen Hydrometer, als: Lorgna's Waſſerhebel, Ximene's Waſſerfahne, Michelotti's hydrauliſche Schnellwaage, Brünning's Tachometer, Poletti's Rheometer, ſind im Gebrauche umſtändlicher und zum Theil auch unſicher. Das Princip iſt bei allen dieſen Inſtrumenten daſſelbe; dieſe Inſtrumente ſind aus einer Stoßfläche und einer Waage zuſammengeſetzt, und es dient die letztere dazu, den Stoß P des Waſſers gegen die erſtere anzugeben; da dieſer aber $= \mu F v^2$ iſt, ſo hat man umgekehrt $v = \sqrt{\frac{P}{\mu F}} = \psi\sqrt{P}$, wo ψ eine von der Größe der Stoßfläche F abhängige Erfahrungsconſtante bezeichnet.

Das Rheometer, welches in der neueren Zeit von Poletti vorgeſchlagen wurde, und im Weſentlichen nicht von Michelotti's hydrometriſcher Schnellwaage abweicht, beſteht aus einem um eine feſte Axe C drehbaren Hebel AB, Fig. 621, und einem zweiten Arme CD, an welchen die Stoßfläche oder, nach Poletti, ein bloßer Stoßſtab angeſchraubt wird. Um dem Stoße des Waſſers gegen dieſe Fläche das Gleichgewicht zu halten, werden in die am Hebelende A hängende Blechbüchſe Gewichte oder Schrotkörner eingelegt, und um die leere Waage im ſtillſtehenden Waſſer in's Gleichgewicht zu ſetzen, iſt bei B ein Gegengewicht angeſetzt, welches das äußerſte Ende des Armes CB ausmacht. Aus dem aufgelegten Gewichte G folgt die Stoßkraft P mittels der Hebelarme $CA = a$ und $CF = b$, durch die Formel $Pb = Ga$, weshalb nun $P = \frac{a}{b} G$ und $v = \sqrt{\frac{P}{\mu F}} = \sqrt{\frac{aG}{\mu bF}} = \psi\sqrt{G}$ iſt, wo ψ aber eine Erfahrungsconſtante bezeichnet.

Rheometer.

Fig. 621.

Anmerkung 1. Ueber die letzteren Hydrometer wird ausführlicher gehandelt: in Eytelwein's Handbuch der Mechanik feſter Körper und der Hydraulik, ferner in Gerſtner's Handbuch der Mechanik, Band 2, in Brünning's Abhandlung über die Geſchwindigkeit des fließenden Waſſers, in Venturoli's Elementi di Meccanica e d'Idraulica, Vol. 2. Wegen Poletti's Rheometer iſt in Dingler's polytechn. Journal, Band 20, 1826 nachzuſehen. Stevenſon's Hydrometer iſt der Woltmann'ſche Flügel, ſ. Dingler's Journal, Band 65, 1842.

Anmerkung 2. Ein beſonders auch zum praktiſchen Gebrauch zu empfehlendes Werk iſt die Hydrometrie oder praktiſche Anleitung zum Waſſermeſſen von Bornemann, Freiberg, 1849.

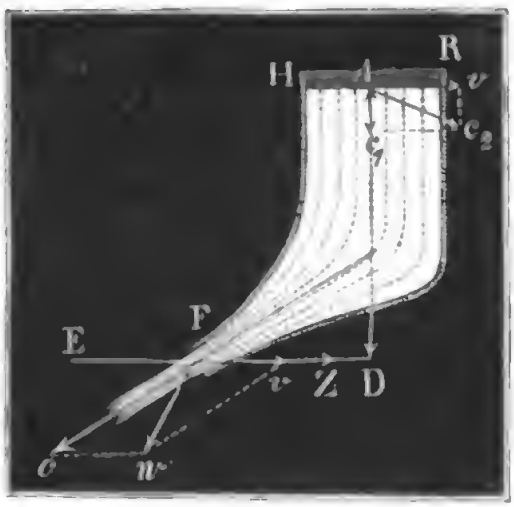
Neuntes Kapitel.

Von der Kraft und dem Widerſtande der Flüſſigkeiten.

Reaction des Waſſers.

§. 420. Der Geſammtdruck des in einem Gefäße ſtillſtehenden Waſſers reducirt ſich nach §. 305 auf eine dem Gewichte dieſer Waſſermaſſe gleiche Vertikalkraft; wenn aber das Gefäß HRF, Fig. 622, eine Oeffnung F hat, durch welche das Waſſer ausfließen kann, ſo erleidet dieſe Kraft eine Veränderung, und zwar nicht allein, weil in F ein Theil der Gefäßwand ausfällt, ſondern auch deshalb, weil das der Mündung zufließende Waſſer wie jeder andere Körper, der ſeinen Bewegungszuſtand ändert, vermöge ſeiner Trägheit reagirt. Die Bewegungsänderung eines Körpers kann ſich ſowohl auf eine Veränderung der Geſchwindigkeit als auch auf eine Veränderung der Bewegungsrichtung erſtrecken; und daher kann auch die Reaction (fr. réaction, engl. reaction) des ausfließenden Waſſers ſowohl aus einer Beſchleunigung als auch aus einer ſtetigen Richtungsänderung des der Mündung zuſtrömenden Waſſers entſpringen.

Fig. 622.



Auf folgendem Wege gelangen wir ſogleich zur Kenntniß der vollſtändigen Reaction des Waſſers in einem Ausflußgefäße.

Es ſei c die Geſchwindigkeit des durch die Mündung F fließenden Waſſers, c_1 die relative Geſchwindigkeit des Waſſers an der Oberfläche $HR = G$, und h die Druckhöhe AD in der Ausmündung. Dann haben wir $\frac{c^2}{2g} = h + \frac{c_1^2}{2g}$ und das Ausflußquantum $Q = Fc = Gc_1$.

Denken wir das Gefäß HRF, Fig. 622, mit einer Geſchwindigkeit v horizontal fortgehend, ſo müſſen wir für die abſolute Geſchwindigkeit c_2 des eintretenden Waſſers $c_2^2 = c_1^2 + v^2$ und bei dem Neigungswinkel $EFc = \alpha$ der Strahlaxe gegen den Horizont für die abſolute Geſchwin-

digkeit w des austretenden Strahles $w^2 = c^2 + v^2 - 2\,c\,v\,cos.\,\alpha$ setzen. Reaction des Wassers.

Nun ist das Arbeitsvermögen des Wassers von dem Ausflusse

$$L_1 = \left(\frac{c_2^2}{2g} + h\right) Q\gamma = \left(\frac{c_1^2 + v^2}{2g} + h\right) Q\gamma,$$

dagegen das Arbeitsvermögen desselben nach dem Ausflusse

$$L_2 = \frac{w^2}{2g} Q\gamma = \left(\frac{c^2 + v^2 - 2\,c\,v\,cos.\,\alpha}{2g}\right) Q\gamma,$$

daher folgt das dem Wasser entzogene und auf das Gefäß übergetragene Arbeitsquantum:

$$L = L_1 - L_2 = \left(\frac{c_1^2 - c^2 + 2\,c\,v\,cos.\,\alpha}{2g} + h\right) Q\gamma,$$

oder, da $\frac{c^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g} = h$ ist, $L = \frac{c\,v\,cos.\,\alpha}{g} Q\gamma$; und hiernach der horizontale Component der Reaction des Wassers:

$$Z = \frac{L}{v} = \frac{c\,cos.\,\alpha}{g} Q\gamma.$$

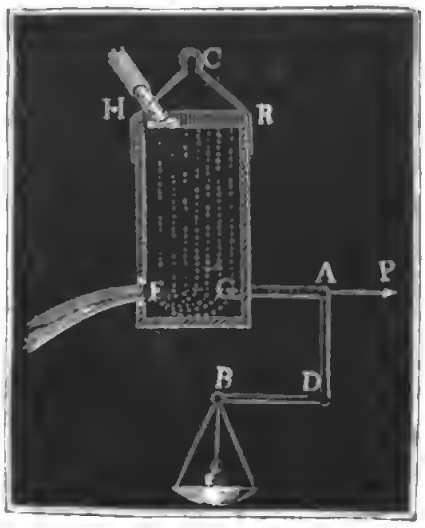
Da $Q = Fc$ ist, so haben wir auch

$$Z = \frac{c^2}{g} F\gamma\,cos.\,\alpha = 2 \cdot \frac{c^2}{2g} F\gamma\,cos.\,\alpha = 2hF\gamma\,cos.\,\alpha$$

und daher bei einem horizontal gerichteten Strahle, wie Fig. 623,

$$Z = 2hF\gamma.$$

Fig. 623.



Es ist also die Reaction eines horizontalen Strahles gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche den Querschnitt des Strahles zur Basis und die doppelte Geschwindigkeitshöhe ($2h$) zur Länge hat.

Anmerkung. Ein Engländer, Peter Ewart, hat in der neuesten Zeit die Richtigkeit dieses Gesetzes durch Versuche zu bestätigen gesucht. (S. Memoirs of the Manchester Philosophical Society, Vol. II., oder den Ingenieur, Zeitschrift für das gesammte Ingenieurwesen, Bd. I) Hierbei wurde das Gefäß HRF, Fig. 623, an eine horizontale Axe C aufgehangen, und die Reaction durch eine Winkelhebelwaage ADB gemessen, auf welche das Gefäß mittels eines horizontalen Stabes AG wirkt, der sich genau der Mündung F gegenüber an das Gefäß anstemmte. Beim Ausflusse durch eine Mündung in der dünnen Wand ergab sich $P = 1{,}14 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma$. Setzt man den Strahlquerschnitt $F_1 = 0{,}64 \cdot F$ und

Reaction des Waſſers.

die effective Ausflußgeſchwindigkeit $v_1 = 0{,}96\,v$ (ſ. §. 344), ſo erhält man nach der theoretiſchen Formel

$$P = 2 \cdot \frac{v_1^2}{2g} \cdot F_1\gamma = 2 \cdot 0{,}96^2 \cdot 0{,}64 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma = 1{,}18\,\frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

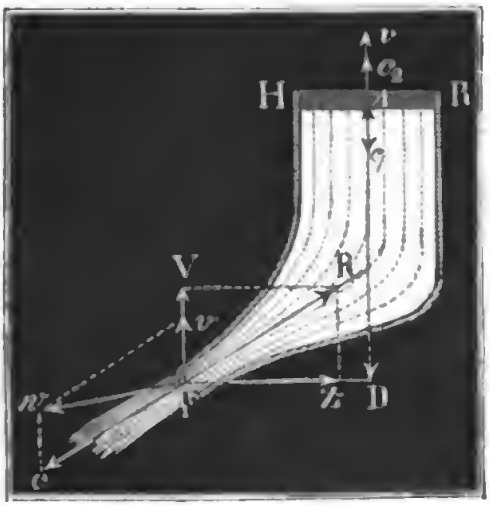
alſo ziemlich daſſelbe, was die Verſuche gegeben haben. Bei einer nach dem contrahirten Waſſerſtrahle geformten Mündung wurde $P = 1{,}73 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma$, der Ausfluß- oder Geſchwindigkeitscoeffizient aber $= 0{,}94$ gefunden. Da hier $F_1 = F$ und $v_1 = 0{,}94\,v$ iſt, ſo hat man theoretiſch

$$P = 2 \cdot 0{,}94^2\,\frac{v^2}{2g} F\gamma = 1{,}77 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

alſo wieder eine gute Uebereinſtimmung.

§. 421. Denkt man ſich das Ausflußgefäß HRF, Fig. 624, mit einer Geſchwindigkeit v vertikal aufwärts bewegt, ſo haben wir für die abſolute Geſchwindigkeit des eintretenden Waſſers: $c_2 = v - c_1$ und dagegen für die des ausfließenden, bei der im vorigen Paragraphen gebrauchten Bezeichnung:

Fig. 624



$$w^2 = c^2 + v^2 + 2\,c\,v\,cos.(90^0 + \alpha)$$
$$= c^2 + v^2 - 2\,c\,v\,sin.\alpha.$$

Es iſt hiernach das ganze Leiſtungsvermögen der Waſſermenge Q pr. Secunde:

$$L_1 = \left(\frac{(v - c_1)^2}{2g} + h\right) Q\gamma,$$

dagegen das des abfließenden Waſſers:

$L_2 = (c^2 + v^2 - 2\,c\,v\,sin.\alpha)\,Q\gamma$, und folglich die mechaniſche Arbeit, welche das Waſſer dem Gefäße mitgetheilt hat,

$$L = L_1 - L_2 = \left(\frac{2\,v\,c_1 + c_1^2 - c^2 + 2\,c\,v\,sin.\alpha}{2g} + h\right) Q\gamma,$$

oder, da $h = \frac{c^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g}$ iſt, $L = \frac{(c\,sin.\alpha - c_1)\,v}{g} Q\gamma$,

und die entſprechende Vertikalkraft:

$$V = \frac{L}{v} = \left(\frac{c\,sin.\alpha - c_1}{g}\right) Q\gamma = \frac{c}{g}\left(sin.\alpha - \frac{F}{G}\right) Q\gamma$$
$$= \frac{c^2}{g}\left(sin.\alpha - \frac{F}{G}\right) F\gamma = \left(sin.\alpha - \frac{F}{G}\right) \cdot 2\,h\,F\gamma.$$

Iſt die Ausflußmündung klein gegen die Oberfläche G, ſo hat man $\frac{F}{G} = 0$, und daher den vertikalen Componenten der Reaction:

$$V = 2\,h\,F\gamma\,sin.\alpha.$$

Nach dem vorigen Paragraphen hat man aber den horizontalen Com- Reaction des Wassers
ponenten dieser Kraft:

$$Z = 2hF\gamma \cos.\alpha,$$

daher ist die vollständige Reaction des Wassers:

$$R = \sqrt{V^2 + Z^2} = 2hF\gamma,$$

und die Richtung derselben der Bewegung des ausfließenden Wassers genau entgegengesetzt.

Ist $F = G$, fließt z. B. das Wasser durch eine überall gleichweite Röhre, so hat man $\frac{F}{G} = 1$ und daher

$$V = (\sin.\alpha - 1) \,.\, 2hF\gamma = -(1 - \sin.\alpha) \,.\, 2hF\gamma;$$

dann wirkt also V nicht nach oben, sondern nach unten, und es ist die vollständige Reaction:

$$R = \sqrt{V^2 + Z^2} = \sqrt{\cos.\alpha^2 + (1 - \sin.\alpha)^2} \,.\, 2hF\gamma$$

$$= \sqrt{2(1 - \sin.\alpha)} \,.\, 2hF\gamma = 4hF\gamma \sin.\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Fig. 625.

Für $\alpha = -90^0$, d. i. wenn die Röhre einen Halbkreis bildet, ist $R = 4hF\gamma$.

Ist $\alpha = +90^0$, so hat man es also im Allgemeinen mit dem Ausflusse, wie Fig. 625, zu thun, und es ist $Z = 0$ und

$$V = \frac{(c - c_1)}{g} Q\gamma = \left(1 - \frac{F}{G}\right) \,.\, 2hF\gamma,$$

folglich für $\frac{F}{G} = 0$, $V = R = 2hF\gamma$.

Zu V kommt natürlich in allen Fällen noch das ganze Gewicht des im Ausflußapparate befindlichen Wassers.

§. 422. Das Wasser oder eine andere Flüssigkeit übt gegen einen fe- Stoß und Widerstand des Wassers.
sten Körper einen Stoß aus, wenn sie mit diesem zusammentrifft, und dadurch in ihrem Bewegungszustande verändert wird. Von dem Stoße ist der Widerstand (franz. résistance; engl. resistence), welchen das Wasser der Bewegung eines Körpers entgegensetzt, nicht wesentlich verschieden. Die Untersuchung beider bildet den dritten Haupttheil der Hydraulik. Man unterscheidet zunächst von einander: 1) den Stoß isolirter Wasserstrahlen (franz. choc d'une veine de fluide; engl. impact of an isolate stream), 2) den Stoß im begrenzten Wasser oder Gerinne (franz. choc d'un fluide défini; engl. impact of a boundet stream), und 3) den Stoß im unbegrenzten Wasser (franz. choc d'un fluide indéfini; engl. impact of an unlimited stream). Ein Stoß der ersten Art findet statt, wenn sich dem aus einem Gefäße ausfließenden

Stoß und Widerſtand des Waſſers

Waſſerſtrahl ein Körper, z. B. die Schaufel eines oberſchlägigen Waſſerrades entgegenſtellt; ein Stoß der zweiten Art tritt ein, wenn das Waſſer in einem Kanale oder Gerinne gegen einen, den Querſchnitt des letzteren ganz ausfüllenden Körper, z. B. gegen die Schaufel eines unterſchlägigen Waſſerrades trifft; die dritte Art kommt endlich vor, wenn ein fließendes Waſſer gegen einen in daſſelbe eingetauchten Körper trifft, deſſen Querſchnitt nur ein ſehr kleiner Theil iſt vom Querſchnitte des Waſſerſtromes, wie z. B. wenn es gegen die Schaufeln eines Schiffmühlenrades anrückt

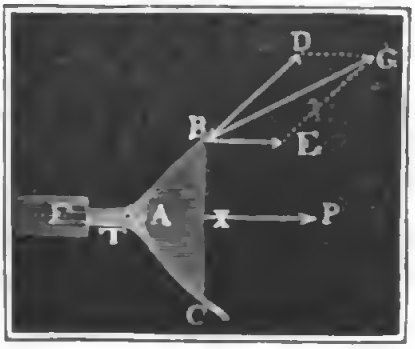
Uebrigens iſt zu unterſcheiden, der Waſſerſtoß gegen ruhende und der gegen bewegte Körper, ferner der Stoß gegen krumme Flächen und der gegen ebene Flächen, und bei letzterem wieder der ſenkrechte und der ſchiefe Stoß.

Wir betrachten gleich einen allgemeinern Fall, nämlich den Stoß eines iſolirten Strahles gegen eine Rotationsfläche, welche ſich in ihrer eigenen, mit der der Bewegungsrichtung des Strahles zuſammenfallenden Axe bewegt.

Stoß iſolirter Strahlen.

§. 423. Es ſei BAC, Fig. 626, eine Rotationsfläche, AX ihre Axe, und FA ein in der Richtung dieſer anſtreffender Waſſerſtrahl; ſetzen wir die Geſchwindigkeit des Waſſers $= c$, die der Fläche $= v$ und den Winkel BTX, welchen die Tangente DT am Ende B der Erzeugungscurve oder jeder die Fläche verlaſſende Waſſerfaden BD mit der Axenrichtung BE einſchließt, $= \alpha$, nehmen wir endlich noch an, daß das Waſſer beim Hinlaufen an der Fläche durch Reibung an lebendiger Kraft nichts verliere. Das Waſſer trifft die Fläche mit der relativen Geſchwindigkeit $c - v$ und geht daher auch mit dieſer an der Fläche hin, entfernt ſich alſo auch mit derſelben in den Tangentialrichtungen TB, TC u. ſ. w. von der Fläche. Aus der Tangentialgeſchwindigkeit $BD = c - v$ und der Axengeſchwindigkeit $BE = v$ ergiebt ſich aber die abſolute Geſchwindigkeit $BG = c_1$ des Waſſers nach dem Zuſammenſtoße mit der Fläche durch die bekannte Formel $c_1 = \sqrt{(c-v)^2 + 2(c-v)\,v\,\cos.\,\alpha + v^2}$.

Fig 626.



Nun kann aber ein Waſſerquantum Q durch ſeine lebendige Kraft die mechaniſche Arbeit $\frac{c^2}{2g} \cdot Q\gamma$ verrichten, wenn ſeine Geſchwindigkeit c vollkommen zugeſetzt wird: es iſt demnach auch das im Waſſer zurückbleibende

Arbeitsvermögen $= \frac{c_1^2}{2g} \cdot Q\gamma$, folglich die auf die Fläche übergetragene Arbeit $Pv = \frac{c^2}{2g} Q\gamma - \frac{c_1^2}{2g} Q\gamma = \frac{c^2 - c_1^2}{2g} \cdot Q\gamma$

Stoß isolirter Strahlen.

$$= \frac{[c^2 - (c-v)^2 - 2(c-v)\, v \cos.\alpha - v^2]}{2g} Q\gamma$$

$$= \frac{2cv - 2v^2 - 2(c-v)\, v \cos.\alpha}{2g} Q\gamma, \text{ d. i.}$$

$Pv = (1 - \cos.\alpha) \frac{(c-v)\, v}{g} Q\gamma$, und die Kraft oder der Waſſerſtoß in der Arenrichtung: $P = (1 - \cos.\alpha) \frac{(c-v)}{g} Q\gamma$.

Geht die Fläche dem Waſſer mit der Geſchwindigkeit v entgegen, ſo hat man $P = (1 - \cos.\alpha) \cdot \frac{(c+v)}{g} Q\gamma$, und iſt dieſelbe ohne Bewegung, alſo $v = 0$, ſo ſtellt ſich der Stoß oder hydrauliſche Arendruck $P = (1 - \cos.\alpha) \frac{c}{g} \cdot Q\gamma$ heraus.

Es folgt hieraus, daß der Stoß einer und derſelben Waſſermaſſe unter übrigens gleichen Umſtänden der relativen Geſchwindigkeit $c \mp v$ des Waſſers proportional iſt.

Aus dem Inhalte F des Querſchnittes vom Waſſerſtrahle folgt das zum Stoße gelangende Waſſerquantum $Q = F(c \mp v)$; daher

$$P = (1 - \cos.\alpha) \frac{(c \mp v)^2}{g} F\gamma;$$

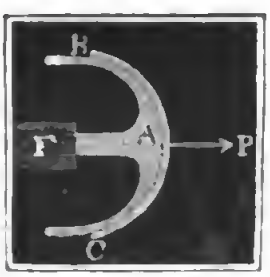
und für $v = 0$, $P = (1 - \cos.\alpha) \frac{c^2}{g} F\gamma$.

Bei gleichem Querſchnitte des Strahles wächſt alſo hiernach der Stoß gegen eine ruhende Fläche wie das Quadrat der Geſchwindigkeit des Waſſers.

§. 424. Der Stoß eines und deſſelben Waſſerſtrahles hängt vorzüglich auch noch von dem Winkel α ab, unter welchem das Waſſer nach dem Stoße ſich von der Axe entfernt; er iſt Null, wenn dieſer Winkel $=$ Null iſt, und dagegen ein Maximum, nämlich $= 2 \frac{(c \mp v)}{g} Q\gamma$, wenn dieſer Winkel 180^0, als deſſen Coſinus $= -1$ iſt, wo das Waſſer, wie Fig. 627 repräſentirt, in der entgegengeſetzten Richtung die Fläche verläßt, in welcher es dieſelbe trifft. Ueberhaupt iſt derſelbe bei concaven Flächen größer

Stoß gegen ebene Flächen.

Fig. 627.

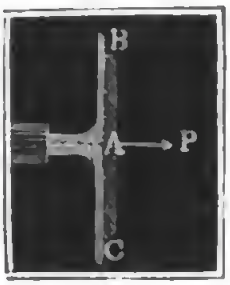


Stoß gegen ebene Flächen.

als bei convexen, weil dort der Winkel ſtumpf, alſo der Coſinus negativ ausfällt und $1 - \cos.\ \alpha$ in $1 + \cos.\ \alpha$ übergeht.

Am häufigſten iſt die Fläche, wie Fig. 628 vorſtellt, eben, und daher $\alpha = 90^0$, alſo $\cos.\ \alpha = 0$ und der Stoß $P = \frac{(c \mp v)}{g} \cdot Q\gamma$; bei einer ruhenden Fläche $P = \frac{c}{g} Q\gamma = \frac{c^2}{2g} F\gamma = 2 \cdot \frac{c^2}{2g} F\gamma = 2Fh\gamma$.

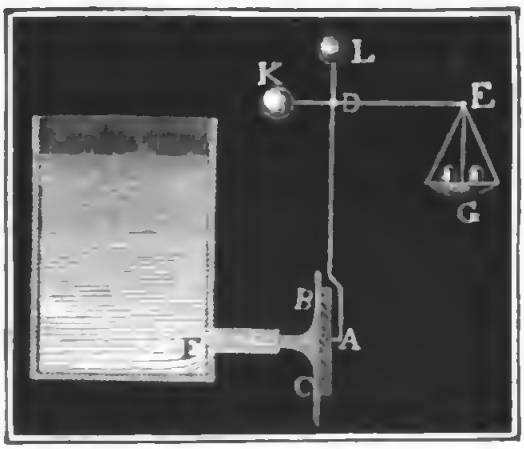
Fig. 628.



Der Normalſtoß des Waſſers gegen eine ebene Fläche iſt alſo gleich dem Gewichte einer Waſſerſäule, die zur Baſis den Querſchnitt F des Strahles und zur Höhe die zweifache Geſchwindigkeitshöhe $2h = 2 \cdot \frac{c^2}{2g}$ hat.

Die hierüber angeſtellten Verſuche von Michelotti, Vince, Langsdorf, Boſſut, Moroſi und Bidone haben ziemlich zu dem nämlichen Ergebniſſe geführt, wenn der Querſchnitt der geſtoßenen Fläche mindeſtens 6mal ſo groß war, als der des Strahles, und wenn dieſe Fläche wenigſtens zweimal ſo weit von der Ebene der Ausflußmündung abſtand, als die Strahldicke maß. Der Apparat, welcher hierbei in Anwendung gekommen iſt, beſtand in einem Hebel, ähnlich wie Poletti's Rheometer, welcher auf der einen Seite den Waſſerſtoß aufnahm, dem durch Gewichte auf der andern Seite das Gleichgewicht gehalten wurde. Das Inſtrument, welches Bidone angewendet hat, iſt in Fig. 629 abgebildet. BC iſt die vom Strahle FA geſtoßene Fläche, G die Waagſchale zur Aufnahme von Gewichten, D aber die Drehungsaxe und K und L ſind Gegengewichte.

Fig. 629.



Anmerkung. Die neueſten und ausführlichſten Verſuche über den Waſſerſtoß ſind von Bidone. S. Memorie de la Reale Accademia delle Scienze di Torino. T. XL. 1838. Sie wurden bei einer Geſchwindigkeit von mindeſtens 27 Fuß und an Meſſingplatten von 2 bis 9 Zoll Durchmeſſer angeſtellt. Im Allgemeinen fand Bidone den Normalſtoß gegen eine ebene Fläche etwas größer als $2Fhy$, doch iſt dieſe Abweichung wohl einer Vergrößerung des Hebelarmes beizumeſſen, welche durch das zurückfallende Waſſer erzeugt wurde. S. Duche-

min: Recherches expérim. sur les lois de la résistance des fluides (in's Deutsche übersetzt von Schnuse). Wenn die gestoßene Fläche der Mündung ganz nahe war, so fiel bei Bidone P nur 1,5 $Fhγ$ aus. Wenn ferner die Fläche mit dem Strahle gleichen Querschnitt hat, in welchem Falle das Wasser nur um einen spitzen Winkel α abgelenkt wird, so ist nach Du Buat und Langsdorf $P =$ nur $Fhγ$. Endlich hat sich auch bei Bidone und Anderen ergeben, daß der Stoß im ersten Augenblicke beinahe noch einmal so groß ist, als der permanente Stoß.

§. 425. Die mechanische Arbeit $Pv = (1 - cos.\,\alpha)\,\frac{(c-v)v}{g}\,Q\gamma$ des Stoßes hängt vorzüglich auch von der Geschwindigkeit v der gestoßenen Fläche ab; sie ist z. B. Null, nicht nur für $v = c$, sondern auch für $v = 0$; es muß daher auch eine Geschwindigkeit geben, bei welcher die Arbeit des Stoßes ein Maximum ist. Offenbar kommt es hierbei nur darauf an, daß $(c - v)v$ zu einem solchen wird. Sehen wir c als den halben Umfang eines Rechteckes und v als die Grundlinie desselben an, so haben wir für dessen Höhe $= c - v$ und für dessen Inhalt $= (c - v)v$; nun hat aber unter allen Rechtecken das Quadrat bei gegebenem Umfange $2c$ den größten Inhalt, es ist daher auch $(c - v)v$ ein Maximum, wenn $c - v = v$, d. i. $v = \frac{c}{2}$ gemacht wird, und wir erhalten so den Maximalwerth der Arbeit des Wasserstoßes, wenn die Fläche mit der halben Geschwindigkeit des Wassers ausweicht, und zwar

Maximalarbeit des Stoßes.

$$Pv = (1 - cos.\,\alpha) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{2g} \cdot Q\gamma = (1 - cos.\,\alpha) \cdot \tfrac{1}{2}\, Qh\gamma.$$

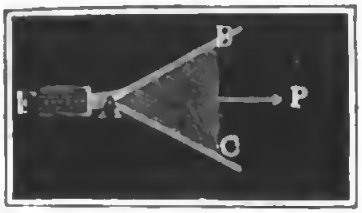
Ist nun $\alpha = 180^0$, wird also die Bewegung des Wassers durch den Anstoß die entgegengesetzte, so hat man allerdings die Arbeit $= 2 \cdot \frac{1}{2} Qh\gamma = Qh\gamma$; ist aber $\alpha = 90^0$, wie beim Stoße gegen eine ebene Fläche, so stellt sich diese Arbeit nur $\frac{1}{2} Qh\gamma$ heraus, es wird also im letzteren Falle von der ganzen disponiblen oder der lebendigen Kraft des Wassers entsprechenden Arbeit nur die Hälfte gewonnen oder auf die Fläche übergetragen.

Beispiele. 1) Wenn ein Wasserstrahl von 40 Quadratzoll Querschnitt eine Wassermenge von 5 Cubikfuß pr. Sec. liefert und gegen eine ebene Fläche normal stößt, welche mit 12 Fuß Geschwindigkeit ausweicht, so ist die Stoßkraft $P = \frac{(c-v)}{g}\,Q\gamma = \left(\frac{5 \cdot 144}{40} - 12\right) \cdot 0{,}032 \cdot 5 \cdot 66 = 6 \cdot 0{,}032 \cdot 330 = 63{,}36$ Pfund, und die auf die Fläche übergetragene mechanische Arbeit $Pv = 63{,}36 \cdot 12 = 760{,}32$ Fußpfund. Die größte Leistung ist für $v = \frac{c}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5 \cdot 144}{40} = 9$ Fuß, und zwar $L = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{2g} \cdot Q\gamma = \frac{1}{2} \cdot 18^2 \cdot 0{,}016 \cdot 5.66 = 81 \cdot 0{,}16 \cdot 66 = 855{,}36$ Fußpfund; der entsprechende Stoß oder hydraulische Druck aber $P = \frac{855{,}36}{9} = 95{,}04$ Pfund.

Maximalarbeit des Stoßes.

2) Wenn ein Strahl FA, Fig. 630. von 64 Quadratzoll Querſchnitt, und 40 Fuß Geſchwindigkeit gegen einen unbeweglichen Kegel mit dem Convergenzwinkel $BAC = 100°$ ſtößt, ſo iſt der hydrauliſche Druck in der Richtung des Strahles $P = (1 - cos.\ \alpha)\ \frac{c}{g}\ Q\gamma$

Fig. 630.



$= (1 - cos.\ 50°) \cdot 40 \cdot 0{,}032 \cdot \frac{64}{144} \cdot 40 \cdot 66$

$= (1 - 0{,}64279) \cdot 1{,}28 \cdot \frac{3520}{3}$

$= 0{,}35721 \cdot 1501{,}9 = 536{,}5$ Pfund.

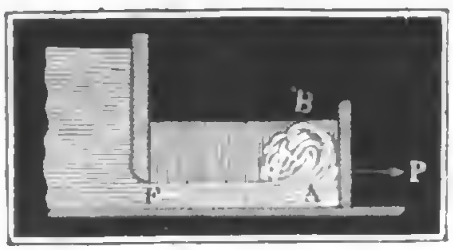
Stoß des begrenzten Waſſers.

§. 426. Beſetzt man den Umfang einer ebenen Fläche BE, Fig. 631, mit Leiſten BD, CE (franz. rebords; engl. borders), welche über der vom Waſſer getroffenen Seite hervorragen, ſo wird das Waſſer, ähnlich wie bei concaven Flächen, um einen ſtumpfen Winkel von ſeiner anfänglichen Richtung abgelenkt, und es fällt daher der Stoß größer aus, als bei der einfachen ebenen Fläche. Die Wirkung dieſes Stoßes hängt vorzüglich von der Höhe der Einfaſſung und von dem Querſchnittsverhältniſſe zwiſchen dem Strahle und dem eingefaßten Theile ab. Bei einem Verſuche, wo der Strahl 1 Zoll Dicke, die cylindriſche Einfaſſung aber 3 Zoll Weite und $3\frac{1}{2}$ Linien Höhe hatte, floß das Waſſer beinahe in umgekehrter Richtung und es betrug der Stoß $3{,}93\ \frac{c^2}{2g}\ F\gamma$; in jedem anderen Falle war dieſe Kraft eine kleinere. Wegen der Reibung des Waſſers an der Fläche und Einfaſſung iſt der theoretiſche Maximalwerth $4\ \frac{c^2}{2g}\ F\gamma$ nie zu erreichen.

Fig. 631.

Auch bei dem Stoße des begrenzten Waſſers FAB, Fig. 632, findet eine Einfaſſung ſtatt, es nimmt aber dieſe Einfaſſung nur einen Theil des Umfanges ein, und erſtreckt ſich dagegen auf die geſtoßene Fläche und den Waſſerſtrahl zugleich. Das ſtoßende Waſſer nimmt die Richtung nach dem uneingefaßten Theil des Umfanges ein, wird alſo auch hier um den Rechtwinkel abgelenkt, weshalb hier auch die oben gefundene Formel für den iſolirten Strahl $P = \frac{(c - v)}{g}\ Q\gamma$ ihre Giltigkeit hat; doch läßt ſich dieſelbe auch auf folgendem Wege herleiten. Nimmt man an, daß das ankom-

Fig. 632.



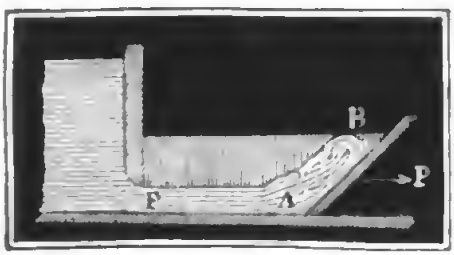
mende Waſſer durch den Anſtoß an die Fläche ſeine Geſchwindigkeit c plötzlich in die Geſchwindigkeit v der Fläche umändere, ſo läßt ſich auch annehmen, daß damit ein auf die Zertheilung des Waſſers verwendeter Arbeitsverluſt $\frac{(c-v)^2}{2g} Q\gamma$ (ähnlich wie im §. 372) verbunden ſei. Nun iſt aber die der lebendigen Kraft des ankommenden Waſſers entſprechende Arbeit $= \frac{c^2}{2g} Q\gamma$ und die des fortgehenden Waſſers $= \frac{v^2}{2g} Q\gamma$, daher folgt die auf die Fläche übergetragene Arbeit: Stoß des begrenzten Waſſers.

$$Pv = [c^2 - (c-v)^2 - v^2] \frac{1}{2g} Q\gamma = \frac{(c-v)v}{g} Q\gamma.$$

Anmerkung. Dieſe Formel findet in der Folge bei der Theorie der Waſſerräder ihre Anwendung.

§. 427. Bei dem ſchiefen Stoße gegen ebene Flächen müſſen wir unterſcheiden, ob das Waſſer nur nach einer oder nach zwei oder nach allen Richtungen in der Ebene abfließt. Iſt wie beim Stoße des begrenzten Waſſers die Fläche AB, Fig. 633, von drei Seiten eingefaßt, ſo daß es nur nach einer Richtung abſtrömen kann, ſo hat man den hydrauliſchen Druck des Waſſers gegen die Fläche in der Richtung des Strahles: Schiefer Stoß.

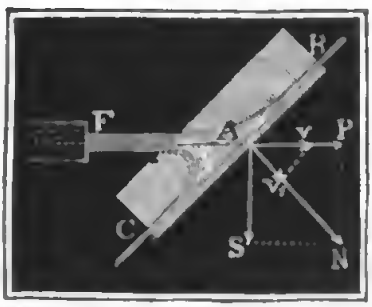
Fig. 633.



$$P = (1 - \cos.\alpha) \frac{(c-v)}{g} Q\gamma.$$

Iſt aber die geſtoßene Ebene BC, Fig. 634, nur auf zwei gegenüberliegenden Seiten eingefaßt, ſo theilt ſich der Strahl in zwei ungleiche Theile, der größere Theil Q_1 nimmt die kleinere Ablenkung α und der kleinere Theil Q_2, die größere Ablenkung $180 - \alpha$ an, es iſt daher Geſammtſtoß in der Richtung des Strahles:

Fig. 634.



$$P = (1 - \cos.\alpha) \cdot \frac{c-v}{g} Q_1\gamma + (1 + \cos.\alpha) \cdot \frac{c-v}{g} Q_2\gamma$$

$$= \left(\frac{c-v}{g}\right) \gamma [(1 - \cos.\alpha) Q_1 + (1 + \cos.\alpha) Q_2].$$

Nun fordert aber das Gleichgewicht der beiden Strahltheile, daß die Drücke $\frac{(c-v)}{g} \gamma (1 - \cos.\alpha) Q_1$ und $\frac{(c-v)}{g} \gamma (1 + \cos.\alpha) Q_2$

Schiefer Stoß zwiſchen denſelben einander gleich ſeien, es iſt daher auch

$$(1 - cos.\ \alpha)\ Q_1 = (1 + cos.\ \alpha)\ Q_2, \text{ oder da } Q_1 + Q_2 = Q.$$

$$(1 - cos.\ \alpha)\ Q_1 = (1 + cos.\ \alpha)\ (Q - Q_1) \text{ d. i.}$$

$Q_1 = \left(\frac{1 + cos.\ \alpha}{2}\right) Q$ und $Q_2 = \left(\frac{1 - cos.\ \alpha}{2}\right) Q$ zu ſetzen, ſo daß endlich der geſammte Stoß in der Richtung des Strahles:

$$P = \frac{(c-v)}{g}\gamma \,.\, 2\,(1 - cos.\ \alpha)\,\frac{(1 + cos.\ \alpha)\,Q}{2} = \frac{(c-v)\gamma}{g}(1 - cos.\ \alpha^2)\ Q,$$

d. i. $P = \frac{c-v}{g}\ sin.\ \alpha^2\ .\ Q\gamma$ ausfällt.

Dividirt man die Stoßleiſtung $L = Pv = \frac{(c-v)}{g}\ v\ sin.\ \alpha^2\ .\ Q\gamma$ durch die Geſchwindigkeit $A v_1 = v_1 = v\ sin.\ \alpha$, mit welcher die Fläche in normaler Richtung ausweicht, ſo erhält man den Normalſtoß

$$N = \frac{(c-v)\ v\ sin.\ \alpha^2}{g\,v\ sin.\ \alpha}\ .\ Q\gamma = \frac{(c-v)}{g}\ sin.\ \alpha\ .\ Q\gamma,$$

und dieſer beſteht außer dem bekannten Parallelſtoße

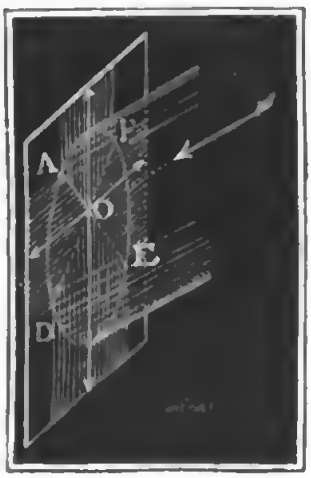
$$P = N\ sin.\ \alpha = \frac{(c-v)}{g}\ sin.\ \alpha^2\ .\ Q\gamma,$$

noch aus einem Seitenſtoße

$$S = N\ cos.\ \alpha = \frac{(c-v)}{g}\ sin.\ \alpha\ cos.\ \alpha\ .\ Q\gamma = \frac{(c-v)}{2g}\ .\ sin.\ 2\,\alpha\ .\ Q\gamma.$$

Es wächſt alſo der Normalſtoß wie der Sinus, der Parallelſtoß wie das Quadrat des Sinus des Einfallwinkels und der Seitenſtoß wie der Sinus vom Doppelten dieſes Winkels.

Fig. 635.



Hat endlich die ſchiefgeſtoßene Fläche gar keine Einfaſſung, ſo daß ſich das Waſſer nach allen Richtungen auf ihr ausbreiten kann, ſo fällt der Stoß noch größer aus, weil unter allen Winkeln, um welche die Waſſerfäden abgelenkt werden, gerade α der kleinſte iſt, und daher jeder Faden, welcher ſich nicht in der Normalebene bewegt, einen größeren Druck ausübt, als der Faden in der Normalebene. Nehmen wir an, daß ein den Sectoren *AOB* und *DOE*, Fig. 635, entſprechender Theil Q_1 um die Winkel α und $180 - \alpha$, und ein anderer, den Sectoren *AOD* und *BOE* entſprechender Theil Q_2 um 90^0 abgelenkt werde, und daß beide Theile einen gleichen Parallelſtoß ausüben, ſo können wir ſetzen:

$P = \frac{c-v}{g} Q_1\gamma \ sin.\ \alpha^2 + \frac{c-v}{g} Q_2\gamma$, $Q_1 \ sin.\ \alpha^2 = Q_2$ und $Q_1 + Q_2 = Q$; es folgt daher $Q_1 (1 + sin.\ \alpha^2) = Q$, und der gesammte Parallelstoß $P = \left(\frac{c-v}{g}\right) \frac{2 Q\gamma \ sin.\ \alpha^2}{1 + sin.\ \alpha^2} = \frac{2 \ sin.\ \alpha^2}{1 + sin.\ \alpha^2} \cdot \frac{c-v}{g} \cdot Q\gamma$.

Wiewohl diese Voraussetzung nur eine annähernd richtige ist, so stimmt diese Formel doch ziemlich mit den neuesten Versuchen von Bidone überein.

§. 428. Wenn sich ein Körper in einer unbegrenzten Flüssigkeit progressiv fortbewegt, oder wenn ein Körper in eine bewegte Flüssigkeit gebracht wird, so erleidet derselbe einen Druck, der von der Form und Größe dieses Körpers sowie von der Dichtigkeit der Flüssigkeit und von der Geschwindigkeit der einen oder der anderen Masse abhängt, und in einem Falle Widerstand, im anderen aber Stoß der Flüssigkeit genannt wird. Dieser hydraulische Druck entspringt aber vorzüglich aus der Trägheit des Wassers, dessen Bewegungszustand durch das Zusammentreffen mit dem festen Körper verändert wird, dann aber auch noch aus der Kraft des Zusammenhängens der Wassertheilchen, die hierbei theilweise von einander getrennt oder an einander verschoben werden. Bewegt sich ein Körper AC, Fig. 636, dem stillstehenden Wasser entgegen, so schiebt er eine gewisse Wassermasse mit erhöhtem Drucke vor sich her. Während diese Wassermasse beim weiteren Fortrücken des Körpers auf der einen Seite immer mehr Zuwachs erhält, findet auf einer anderen Seite, nahe am Körper ein steter Abfluß statt, indem die der Vorderfläche AB zunächst liegenden Theilchen eine Bewegung in der Richtung dieser Fläche annehmen. Trifft das bewegte Wasser einen in Ruhe befindlichen Körper AC, Fig. 637, so erzeugt sich vor demselben ebenfalls ein erhöhter Wasserdruck und macht, daß die Wassertheilchen vor dem Körper von ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt werden und sich an der Vorderfläche AB hinbewegen. Haben diese Wassertheilchen die Grenzen der Vorderfläche erreicht, so machen dieselben eine Wendung, und laufen nachher an den Seitenflächen des Körpers hin, bis sie an die Hinterfläche kommen, wo sie sich nicht sogleich wieder vereinigen, sondern zunächst wirbelnde Bewegungen annehmen. Man sieht, daß die allgemeinen Bewegungsverhält-

Wirkungen unbegrenzter Flüssigkeiten.

Fig. 636.

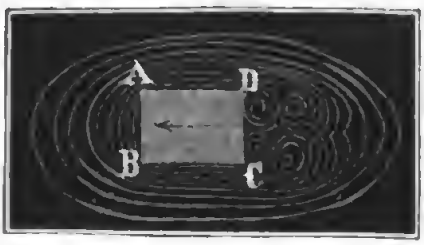
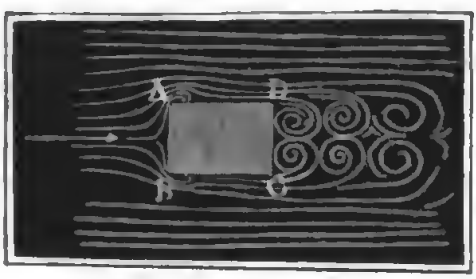


Fig. 637



nisse der den Körper umgebenden Wasserelemente beim Stoße des bewegten Wassers dieselben sind, wie beim Widerstande eines im Wasser bewegten Körpers; nur findet bei den Wirbeln eine Verschiedenheit insofern statt, als bei kurzen Körpern die Wirbel im letzteren Falle einen kleineren Raum einnehmen, als im ersteren. Die Geschwindigkeit der Wasserelemente nimmt in beiden Fällen von der Mitte der Vorderfläche an nach den Grenzen derselben immer mehr und mehr zu, erreicht am Anfange der Seitenflächen, wo in der Regel noch eine Contraction eintritt, ihr Maximum, nimmt nun bei dem an den Seitenflächen hingehenden Wasser allmälig ab, und erreicht endlich ihr Minimum bei dem Wasser, welches die Hinterfläche erlangt und in wirbelnde Bewegung übergeht.

Theorie des Stoßes und Widerstandes

§. 429. Der Normaldruck des Wassers ist an verschiedenen Punkten des Körpers sehr verschieden. Er ist in der Mitte der Vorderfläche desselben am größten, und in der Mitte der Hinterfläche und nächstdem am Anfange der Seitenflächen am kleinsten, weil dort mehr ein Zu-, hier aber mehr ein Entströmen des Wassers in Hinsicht auf den Körper statt hat. Ist der Körper, wie wir in der Folge voraussetzen wollen, in Hinsicht auf die Bewegungsrichtung symmetrisch, so heben sich die sämmtlichen Pressungen rechtwinkelig gegen diese Richtung auf, und es kommen daher nur die Pressungen in der Bewegungsrichtung in Betracht. Nun sind aber die Pressungen auf der Hinterfläche des Körpers den Pressungen auf der Vorderfläche entgegengesetzt, es läßt sich daher der resultirende Stoß oder Widerstand des Wassers gleichsetzen der Differenz zwischen dem Drucke gegen die Vorder- und dem gegen die Hinterfläche.

Wenn wir auch die Größe dieser Drücke a priori nicht angeben können, so können wir doch wegen der großen Aehnlichkeit der Verhältnisse mit dem Stoße isolirter Strahlen annehmen, daß wenigstens das allgemeine Gesetz für den Stoß des unbegrenzten Wassers von dem für den Stoß isolirter Strahlen nicht abweiche. Ist also F der Inhalt einer Fläche, welche von einem unbegrenzten Strome, dessen Dichtigkeit γ sein möge, mit der Geschwindigkeit v getroffen wird, so läßt sich der entsprechende Stoß oder hydraulische Druck $P = \zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma$ setzen, wobei ζ noch eine von der Form der Fläche abhängige Erfahrungszahl bezeichnet. Dieser Ausdruck läßt sich aber nicht nur auf die Wirkung gegen die Vorderfläche, sondern auf die gegen die Hinterfläche anwenden, nur besteht sie hier, wo das Wasser ein Bestreben hat sich zu entfernen, in einem Zuge oder einem Negativdrucke. Ist nun $Fh\gamma$ der hydrostatische Druck (§. 299) gegen die Vorder- und gegen die Hinterfläche eines Körpers, so folgt der Gesammt-

druck gegen die Vorderfläche: $P_1 = Fh\gamma + \zeta_1 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma$ und der ge- Theorie des Stoßes und Widerstandes

gen die Hinterfläche: $P_2 = Fh\gamma - \zeta_2 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma$, und es ergiebt sich so der resultirende Stoß oder Widerstand des Wassers:

$$P = P_1 - P_2 = (\zeta_1 + \zeta_2) \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma, \text{ wenn } \zeta_1 + \zeta_2 = \zeta$$

gesetzt wird. Diese allgemeine Formel für den Stoß des unbegrenzten Wassers findet auch ihre Anwendung auf den Stoß des Windes und auf den Widerstand der Luft. Allerdings findet hier außer der Verschiedenheit des aërodynamischen Druckes an der Vorder- und Hinterfläche auch noch eine Verschiedenheit des aërostatischen Druckes statt, indem die Luft vor der Vorderfläche bei ihrer größeren Spannung auch eine größere Dichtigkeit (γ) hat, als an der Hinterfläche. Deshalb fallen wenigstens bei großen Geschwindigkeiten, wie sie z. B bei Geschützkugeln vorkommen, die Widerstandscoefficienten der Luft größer aus, als die des Wassers.

Anmerkung. Eine eigenthümliche Erscheinung beim Stoße und Widerstande unbegrenzter Mittel (Wasser oder Luft) ist das Anhängen einer gewissen Wasser- oder Luftmasse an den Körper, dessen Einfluß sich bei der ungleichförmigen Bewegung der Körper, wie z. B. bei Pendelschwingungen, besonders bemerkbar macht. Bei einer Kugel hat die dem bewegten Körper anhängende Luft- oder Wassermasse ein Volumen von 0,6 des Volumens der Kugel. Bei einem in der Axenrichtung bewegten prismatischen Körper ist das Verhältniß dieser Volumina $= 0{,}13 + 0{,}705 \frac{\sqrt{F}}{l}$, wo l die Länge und F den Querschnitt des Körpers bezeichnet. Diese schon von Du Buat aufgefundenen Verhältnisse haben durch die neueren Beobachtungen von Bessel, Sabine und Baily vollkommene Bestätigung gefunden.

§. 430. Der Widerstandscoefficient ζ oder die Zahl, womit die Ge- Stoß und Widerstand gegen Flächen

schwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ zu multipliciren ist, um die Höhe einer den hydraulischen Druck messenden Wassersäule zu erhalten, ist bei Körpern von verschiedenen Formen sehr verschieden, und nur bei Platten, welche rechtwinkelig gegen die Bewegungsrichtung stehen, von beinahe bestimmter Größe. Nach den Versuchen von Du Buat, und nach denen von Thibault läßt sich für den Luft- und Wasserstoß gegen eine ruhende ebene Fläche $\zeta = 1{,}86$ setzen, wogegen, jedoch mit weniger Sicherheit, für den Widerstand der Luft und des Wassers gegen eine bewegte ebene Fläche $\zeta = 1{,}25$ anzunehmen sein möchte. In beiden Fällen kommen auf die Vorderfläche ohngefähr zwei und auf die Hinterfläche ein Drittel der ganzen Wirkung. Der Widerstand, welchen die Luft einer im Kreise umlaufenden Fläche entgegensetzt, ist von Borda, Hutton und Thibault sehr verschieden gefunden worden, möchte jedoch im Mittel durch den Coefficienten $\zeta =$

Stoß und Widerſtand gegen Flächen.

1,5 auszudrücken ſein. Steht die Fläche nicht rechtwinkelig gegen die Bewegungsrichtung, ſondern bildet ſie mit ihr einen ſpitzen Winkel α, ſo läßt ſich mit ziemlicher Genauigkeit nach Duchemin ſtatt $\zeta . \frac{2\zeta \sin \alpha^2}{1+\sin.\alpha^2}$ ſetzen.

Stoß und Widerſtand unbegrenzter Mittel werden auch erhöht, wenn man die Flächen aushöhlt oder am Umfange mit vorſtehenden Rändern verſieht, doch iſt man hierüber zu allgemeinen Ergebniſſen noch nicht gelangt.

Beiſpiel. Wenn der Wind mit 20 Fuß Geſchwindigkeit gegen ein feſtgebremſtes Windrad ſtößt, das aus 4 Flügeln beſteht, wovon jeder 200 Quadratfuß Inhalt hat und 75° gegen die Windrichtung ſteht, ſo iſt die Kraft des Windſtoßes in der Richtung der Windbewegung oder der Radare:

$$P = 1{,}85 \cdot \frac{2\,(\sin. 75)^2}{1+(\sin.75)^2} \cdot \frac{20^2}{2g} \cdot 4 \cdot 200 \cdot 0{,}086$$

$= 1{,}85 \cdot 0{,}965 \cdot 6{,}4 \cdot 800 \cdot 0{,}086 = 786$ Pfd., wobei die Dichtigkeit des Windes (nach §. 333) $= 0{,}086$ Pfd. angenommen worden iſt.

Anmerkung Ganz abweichende Anſichten in Hinſicht des Stoßes und Widerſtandes unbegrenzter Flüſſigkeiten werden in dem oben citirten Werke von Duchemin ausgeſprochen. So wird z. B. dort behauptet, daß der Stoß und Widerſtand gegen die Vorderfläche einer dünnen Platte $2 . \frac{v^2}{2g} F\gamma$ betrage und an der Hinterfläche nicht negativ, ſondern beim Stoße $= 0{,}136 \frac{v^2}{2g} F\gamma$ und beim Widerſtande $= 0{,}746 \frac{v^2}{2g} F\gamma$ ſei. Es würde zu umſtändlich ſein, hier die Gründe auseinanderzuſetzen, weswegen der Verfaſſer den Anſichten Duchemin's nicht allenthalben folgen kann, doch wird man Mehreres in dieſer Beziehung ausgeſprochen finden in Poncelet's Introduction à la mécanique industrielle. Deux. édit. 1841.

Stoß und Widerſtand gegen Körper.

§. 431. Der Stoß und Widerſtand des Waſſers gegen prismatiſche Körper, deren Axe mit der Bewegungsrichtung zuſammenfällt, nimmt ab, wenn die Länge der Körper eine größere wird. Nach den Verſuchen von Du Buat und Duchemin iſt der Stoß von der Vorderfläche unveränderlich, und nur die Wirkung gegen die Hinterfläche veränderlich. Jenem entſpricht der Coefficient $\zeta_1 = 1{,}186$, für die Geſammtwirkung aber iſt bei den relativen Längen $\frac{l}{\sqrt{F}} = 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,$

$$\zeta = 1{,}86;\ 1{,}47;\ 1{,}35;\ 1{,}33.$$

Bei noch größerem Verhältniſſe zwiſchen der Länge l und der mittleren Breite $\sqrt{F}$ des Körpers nimmt ζ in Folge der Reibung des Waſſers an den Seitenflächen des Körpers wieder zu. Bei dem Widerſtande des Waſſers treten umgekehrte Verhältniſſe ein. Hier iſt nach Du Buat für

die Wirkung gegen die Vorderfläche unveränderlich $\zeta_1 = 1$, für die Geſammtwirkung aber Stoß und Widerſtand gegen Körper.

bei $\frac{l}{\sqrt{F}} = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3,$

$\zeta = 1{,}25;\ 1{,}28;\ 1{,}31;\ 1{,}33$, ſo daß alſo bei einem Prisma, welches 3mal ſo lang als dick iſt, der Stoß mit dem Widerſtand des Waſſers gleich groß ausfällt.

Die von Borda, Hutton, Vince, Déſaguilliers, Newton u. A. angeſtellten Verſuche über den Widerſtand von eckigen und runden Körpern laſſen noch viel Unſicherheit zurück. Was die Kugeln betrifft, ſo ſcheint bei mäßigen Geſchwindigkeiten der Widerſtandscoefficient für die Bewegung in Luft oder Waſſer im Mittel $= 0{,}6$ geſetzt werden zu können. Bei großer Geſchwindigkeit und für die Bewegung in der Luft iſt aber nach Robins und Hutton zu ſetzen für die Geſchwindigkeiten

$v = 1, \quad 5, \quad 25, \quad 100, \quad 200, \quad 300, \quad 400, \quad 500, \quad 600$, Meter,

$\zeta = 0{,}59;\ 0{,}63;\ 0{,}67;\ 0{,}71;\ 0{,}77;\ 0{,}88;\ 0{,}99;\ 1{,}04;\ 1{,}01.$

Duchemin und Piobert haben beſondere Formeln für das Wachſen dieſer Widerſtandscoefficienten angegeben.

Für den Stoß des Waſſers gegen eine Kugel findet Eytelwein $\zeta = 0{,}7886$.

Anmerkung. Sehr ausführlich über dieſe Verhältniſſe handeln Poncelet in ſeiner oben citirten Introduction, und Duchemin ſowie Thibault in ihren Récherches expérimentales etc. Ueber den Widerſtand gegen ſchwimmende Körper, namentlich gegen Schiffe, ſowie auch vom Stoße des Windes gegen Räder, wird im zweiten Theile gehandelt.

Beiſpiel. Wenn man nach Borda den Widerſtand und Stoß rechtwinkelig gegen die Are eines Cylinders $\frac{1}{2}$mal ſo groß ſetzt, als den gegen ein Parallelepiped, welches mit ihm gleiche Dimenſionen hat, ſo erhält man für den Widerſtand $\zeta = \frac{1}{2} \cdot 1{,}28 = 0{,}64$ und den Stoß $= \frac{1}{2} \cdot 1{,}47 = 0{,}735$. Wendet man nun dieſe Werthe auf den menſchlichen Körper an, deſſen Querſchnitt etwa 7 Quadratfuß Inhalt hat, ſo findet man für den Widerſtand und Stoß der Luft gegen denſelben die Werthe

$P = 0{,}64 \cdot 0{,}016 \cdot 7 \cdot 0{,}086\, v^2 = 0{,}00616\, v^2$, und

$P = 0{,}735 \cdot 0{,}016 \cdot 7 \cdot 0{,}086\, v^2 = 0{,}00708\, v^2$. Bei einer Geſchwindigkeit von 5 Fuß iſt daher der Widerſtand der Luft nur $0{,}00616 \cdot 25 = 0{,}154$ Pfd.; und die entſprechende Leiſtung pr. Sec. $= 5 \cdot 0{,}154 = 0{,}77$ Fußpfund; bei einer Geſchwindigkeit von 10 Fuß iſt dieſer Widerſtand ſchon 4mal und der Arbeitsaufwand 8mal ſo groß, und bei einer Geſchwindigkeit von 15 Fuß iſt der Widerſtand das 9- und die Arbeit ſogar das 27fache. Bewegt ſich ein Menſch mit 5 Fuß Geſchwindigkeit dem Winde von 50 Fuß Geſchwindigkeit entgegen, ſo hat er einen der relativen Geſchwindigkeit $50 + 5 = 55$ Fuß entſprechenden Widerſtand $0{,}00708 \cdot 55^2 = 21{,}42$ Pfd zu überwinden, und dabei die übermäßige Arbeit von $21{,}42 \cdot 5 = 107{,}1$ Fußpfund zu verrichten.

§. 432. Die Geſetze der Bewegung eines Körpers in widerſtehenden Mitteln ſind nicht ſehr einfach, weil man es hier mit einer veränderlichen, Bewegung in widerſtehenden Mitteln.

Bewegung in widerſtehenden Mitteln.

d. i. mit dem Quadrate der Geſchwindigkeit wachſenden Kraft zu thun hat. Aus der Kraft P_1, die einen Körper forttreibt, und aus dem Widerſtande $P_2 = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma$, welchen das Mittel der Bewegung entgegenſetzt, folgt die bewegende Kraft

$P = P_1 - P_2 = P_1 - \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma$, da aber die Maſſe des Körpers $= M = \frac{G}{g}$ iſt, ſo ergiebt ſich die Beſchleunigung des Körpers:

$$p = \frac{P}{M} = \left(P_1 - \zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma\right) : M = \left(\frac{P_1 - \zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma}{G}\right) \cdot g,$$

oder, wenn wir $\frac{F\gamma}{2gP_1}$ durch $\frac{1}{w^2}$ bezeichnen, alſo $\sqrt{\frac{2gP_1}{F\gamma}} = w$ ſetzen,

$p = \left[1 - \zeta \left(\frac{v}{w}\right)^2\right] \frac{P_1}{G} g$. Nun nimmt aber bei der Acceleration p die Geſchwindigkeit v in dem kleinen Zeittheilchen τ um $\varkappa = p\tau$ zu, daher läßt ſich ſetzen:

$$\varkappa = \left[1 - \zeta \left(\frac{v}{w}\right)^2\right] \frac{P_1}{G} g\tau, \text{ und umgekehrt}$$

$$\tau = \frac{G}{P_1} \cdot \frac{\varkappa}{g\left[1 - \zeta \left(\frac{v}{w}\right)^2\right]}.$$

Um nun die einer gegebenen Geſchwindigkeitsveränderung entſprechende Zeit zu finden, theilen wir die Differenz $v_n - v_0$ zwiſchen der End- und Anfangsgeſchwindigkeit in n Theile, ſetzen einen ſolchen Theil $\frac{v_n - v_0}{n} = \varkappa$, berechnen hiernach die Geſchwindigkeiten $v_1 = v_0 + \varkappa$, $v_2 = v_0 + 2\varkappa$, $v_3 = v_0 + 3\varkappa$ u. ſ. w., und führen dieſe Werthe in die Simpſon'ſche Formel ein. Auf dieſe Weiſe erhalten wir die geſuchte Zeit bei Annahme von 4 Theilen.

$$1)\ t = \frac{G}{P_1} \cdot \frac{v_n - v_0}{12g} \left(\frac{1}{1 - \zeta \left(\frac{v_0}{w}\right)^2} + \frac{4}{1 - \zeta \left(\frac{v_1}{w}\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{1 - \zeta \left(\frac{v_2}{w}\right)^2} + \frac{4}{1 - \zeta \left(\frac{v_3}{w}\right)^2} + \frac{1}{1 - \zeta \left(\frac{v_4}{w}\right)^2} \right).$$

Es iſt ferner der in einem Zeittheilchen τ zurückgelegte Raumtheil (§. 19):

Digitized by Google

Bewegung in widerstehenden Mitteln.

$\sigma = v\tau$, oder da $\tau = \frac{x}{p}$ ist, $\sigma = \frac{vx}{p}$, also hier

$$\sigma = \frac{vx}{1 - \zeta\left(\frac{v}{w}\right)^2} \cdot \frac{G}{P_1 g}.$$

Durch Anwendung der Simpson'schen Regel findet man nun den Raum, welcher zurückgelegt wird, während die Geschwindigkeit v_0 in v_n übergeht.

$$2) \quad s = \frac{G}{P_1} \cdot \frac{v_n - v_0}{12g}\left(\frac{v_0}{1 - \zeta\left(\frac{v_0}{w}\right)^2} + \frac{4v_1}{1 - \zeta\left(\frac{v_1}{w}\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2v_2}{1 - \zeta\left(\frac{v_2}{w}\right)^2} + \frac{4v_3}{1 - \zeta\left(\frac{v_3}{w}\right)^2} + \frac{v_4}{1 - \zeta\left(\frac{v_4}{w}\right)^2}\right).$$

Natürlich wird die Genauigkeit größer, wenn man 6, 8 oder noch mehr Theile annimmt. Uebrigens gestattet diese Formel auch eine Berücksichtigung der Veränderlichkeit des Widerstandscoefficienten, was bei bedeutenden Geschwindigkeiten nothwendig ist. Beim freien Fall der Körper in der Luft oder im Wasser ist $P_1 = G$, und bei der Bewegung auf der Horizontalebene $P_1 = 0$, oder richtiger, gleich der Reibung fG. Da diese ein Widerstand ist, so hat man sie negativ in Rechnung zu bringen, weshalb hier $P = -(P_1 + P_2)$ und $p = -\left[1 + \zeta\left(\frac{v}{w}\right)^2\right]\frac{P_1}{G}\, g$ zu setzen ist. Da ferner hier nicht von einer Zu-, sondern nur von einer Abnahme der Geschwindigkeit die Rede sein kann, so haben wir hier statt $v_n - v_0$, $v_0 - v_n$ in den obigen Formeln zu setzen.

In dem Falle, wenn der Körper durch eine Kraft, z. B. durch sein Gewicht getrieben wird, nähert sich die Bewegung immer mehr und mehr einer gleichförmigen, so daß sie schon nach einer gewissen Zeit als eine solche angesehen werden kann, wiewohl sie es in Wahrheit nie wird. Es fällt die Acceleration $p =$ Null aus, wenn $\zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma = P_1$, wenn also $v = \sqrt{\frac{2gP_1}{\zeta F\gamma}} = \frac{w}{\sqrt{\zeta}}$ ist. Diesem Ziele nähert sich also die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers immer mehr und mehr, ohne es je vollkommen zu erreichen.

Beispiel. Piobert, Morin und Didion fanden für einen Fallschirm, dessen Tiefe 0,31 des Oeffnungsdurchmessers betrug, den Widerstandscoefficienten $\zeta = 1{,}94 \cdot 1{,}37 = 2{,}66$. Von welcher Höhe wird sich hiernach ein 150 Pfd. schwerer Mensch mit einem ähnlichen Fallschirme von 10 Pf. Gewicht und 60 Quadratfuß Querschnitt herablassen können, ohne eine größere Geschwindigkeit anzunehmen, als diejenige, welche er erlangt, wenn er ohne Fallschirm 10 Fuß

Bewegung in widerſtehenden Mitteln.

hoch herabſpringt? Die letzte Geſchwindigkeit iſt $v = 7{,}906\sqrt{10} = 25$ Fuß, die Kraft iſt $P_1 = G = 150 + 10 = 160$ Pf., die Fläche $F = 60$ Quadratfuß, die Dichtigkeit $\gamma = 0{,}0859$ und der Widerſtandscoefficient $\zeta = 2{,}66$, daher $\frac{1}{w^2} = \frac{60 \,.\, 0{,}0859}{62{,}5 \,.\, 160} = 0{,}000515$, und $\zeta \,.\, \frac{v^2}{w^2} = 2{,}66 \,.\, 0{,}000515 \,.\, 25^2 = 0{,}85625$. Nehmen wir nun 6 Theile an, ſo erhalten wir für dieſe

$1 - \zeta \,.\, \frac{v^2}{w^2} = 0{,}97621;\ 0{,}90486;\ 0{,}78593;\ 0{,}61944;\ 0{,}40537;\ 0{,}14375$, und für

$\frac{v}{1 - \zeta \frac{v^2}{w^2}} = 0;\ 4{,}268;\ 9{,}210;\ 15{,}905;\ 26{,}910;\ 51{,}393$ und $173{,}913$, daher

nach der Simpſon'ſchen Regel den mittleren Werth hiervon

$= (1.0 + 4 \,.\, 4{,}268 + 2 \,.\, 9{,}210 + 4 \,.\, 15{,}905 + 2 \,.\, 26{,}910 + 4 \,.\, 51{,}393 + 1 \,.\, 173{,}913) : (3 \,.\, 6)$

$= \frac{532{,}42}{18} = 29{,}58$; und hieraus den geſuchten Fallraum $s = \frac{v_n - v_0}{g}$. mal

Mittel von $\frac{v}{1 - \zeta \,.\, \frac{v^2}{w^2}} = \frac{25 - 0}{31{,}25} \,.\, 29{,}58 = 23{,}6$ Fuß.

Die entſprechende Fallzeit iſt, da der mittlere Werth von $\frac{1}{1 - \zeta \frac{v^2}{w^2}}$

$= (1.0 + 4 \,.\, 1{,}024 + 2 \,.\, 1{,}105 + 4 \,.\, 1{,}272 + 2 \,.\, 1{,}614 + 4 \,.\, 2{,}467 + 1 \,.\, 6{,}957) : 18$

$= 1{,}747$ iſt, $t = \frac{25}{31{,}25} \,.\, 1{,}747 = 1{,}4$ Sec.

Anmerkung. Für einen conſtanten Widerſtandscoefficienten ergiebt ſich durch den höheren Calcül:

$$v = \left(\frac{e^{\mu t} - 1}{e^{\mu t} + 1}\right)\sqrt{2g \,.\, \frac{P}{\zeta F \gamma}} \text{ und } s = \frac{G}{\zeta F \gamma}\ Ln. \left(\frac{(e^{\mu t} + 1)^2}{4 e^{\mu t}}\right),$$

wobei $\mu = \sqrt{2g \,.\, \zeta \frac{PF\gamma}{G^2}}$, e die Grundzahl des natürlichen Potenzenſyſtemes und $Ln.$ den natürlichen Logarithmen bezeichnet.

Geworfene Körper.

§. 433. Wir haben ſchon früher die Wurfbewegung im luftleeren Raume kennen gelernt und §. 38 gefunden, daß derſelben eine Parabel entſpricht. Jetzt können wir uns auch über dieſe Bewegung in einem widerſtehenden Mittel, z. B. in der Luft, z. B. die eines abgeſchoſſenen Körpers, nähere Kenntniß verſchaffen.

Jedenfalls iſt die Bahn ACD, Fig. 638 (ſ. f. S.), eines die Luft durchſchneidenden Körpers keine Parabel A_1CD_1, wie im luftleeren Raume, ſondern eine unſymmetriſche Curve, mit einem ſchwächer auf- und ſtärker niederſteigenden Schenkel. Iſt c die Geſchwindigkeit im Scheitel C, und t die Zeit zum Durchlaufen der Parabelſchenkel AC und DC im leeren Raume, ſo hat man die Coordinaten

$$BC = x = \frac{gt^2}{2} \text{ und } BA_1 = BD_1 = y = ct,$$

oder, $t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$ aus der ersten Formel in die zweite eingesetzt, Geworfene Körper.

$$y = c\sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

Da nun durch den Widerstand der Luft die Geschwindigkeit c vermindert wird, so ist der mittlere Werth der horizontalen Geschwindigkeit des aufsteigenden Schenkels AC größer und der des niedersteigenden kleiner als c, und daher auch die Ordinate BA des ersten Schenkels größer und die Ordinate BD des zweiten kleiner als die Ordinate $BA_1 = BD_1$ der Parabel.

Die Construction der Wurflinie oder Bahn ACD eines geworfenen Körpers in einem widerstehenden Mittel, wie die Luft, läßt sich auf folgende Weise mit Hülfe von Krümmungskreisen bewerkstelligen.

Fig. 638.

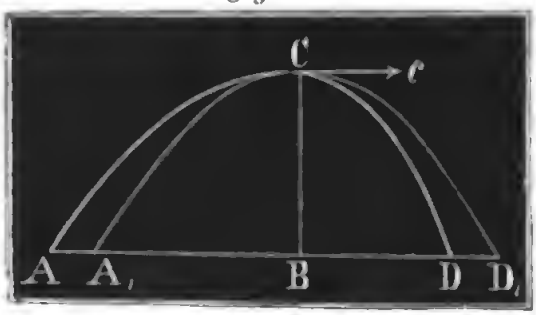
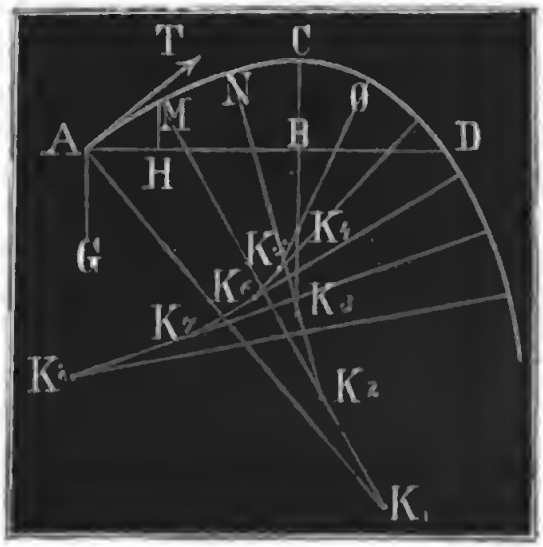


Fig. 639.



Aus der Anfangsgeschwindigkeit v und dem Elevationswinkel $TAB = \alpha$ folgt nach §. 40 der Krümmungshalbmesser $AK_1 = MK_1$ des ersten Bogenstückes AM:

$$r = \frac{v^2}{g\ sin.TAG} = \frac{v^2}{g\ sin\ (90^0+\alpha)} = \frac{v^2}{g\ cos.\alpha}.$$

Nimmt man nun den Centriwinkel AK_1M des ersten Bogenelementes $= \varphi_1$, und setzt man die Geschwindigkeit in M, $= v_1$, so hat man den Elevationswinkel in M: $\alpha_1 = \alpha - \varphi_1$ und daher den Krümmungshalbmesser $MK_2 = NK_2$ für das folgende Curvenstück MN:

$$r_1 = \frac{v_1^2}{g\ cos.\alpha_1} = \frac{v_1^2}{g\ cos.(\alpha-\varphi_1)}.$$

Geworfene Körper.

Dem Widerſtande $\zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma$ der Luft entſpricht das Verzögerungsmaaß $p = \zeta \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \frac{F\gamma}{G} = \zeta \cdot \frac{F\gamma}{2G} v^2 = \mu v^2$, wenn $\mu = \zeta \cdot \frac{F\gamma}{2G}$ geſetzt wird; iſt daher h die Vertikalprojection MH des Curvenſtückes $AM = \varphi r$, ſo läßt ſich dem Principe der lebendigen Kräfte zu Folge ſetzen:

$$\frac{v_1^2}{2} = \frac{v^2}{2} - \mu v^2 \cdot \varphi_1 r - gh.$$

Nun iſt aber annähernd $h = \varphi_1 r \sin.\alpha$, daher auch $v_1^2 = v^2 - (\mu v^2 + g \sin.\alpha)\, 2\varphi_1 r$; oder $v^2 = gr \cos.\alpha$ eingeſetzt, $v_1^2 = gr\,[\cos.\alpha - 2\varphi_1 (\mu r \cos.\alpha + \sin.\alpha)]$, und daher

$$r_1 = \frac{r\,[\cos.\alpha - 2\varphi_1 (\mu r \cos.\alpha + \sin.\alpha)]}{\cos.(\alpha - \varphi_1)}.$$

Da φ_1 klein iſt gegen α, ſo kann man

$\cos.(\alpha - \varphi_1) = \cos.\alpha \cos.\varphi_1 + \sin.\alpha \sin.\varphi_1 = \cos.\alpha + \varphi_1 \sin.\alpha$,

und $\frac{1}{\cos.(\alpha-\varphi_1)} = \frac{1}{\cos.\alpha(1+\varphi_1 tang\ \alpha)} = \frac{1-\varphi_1 tang.\alpha}{\cos.\alpha}$ ſetzen, weshalb nun annähernd

$$r_1 = \frac{r}{\cos.\alpha}\,(1 - \varphi_1 tang.\ \alpha)\,[\cos.\alpha - 2\varphi_1\,(\mu r \cos.\alpha + \sin.\alpha)]$$
$$= r\,(1 - \varphi_1 tang.\alpha)\,[1 - 2\varphi_1(\mu r + tang.\alpha)]$$
$$= r\,[1 - \varphi_1 (3 tang.\alpha + 2\mu r)] \text{ folgt.}$$

Mit Hülfe dieſer Formel kann man aus einem Krümmungshalbmeſſer den nächſtfolgenden, und daher auch aus dem erſten Krümmungshalbmeſſer alle folgenden berechnen. Iſt φ_2 der Centriwinkel NK_3C des folgenden Bogenſtückes NC und $\alpha_2 = \alpha_1 - \varphi_2 = \alpha - (\varphi_1 + \varphi_2)$ der Elevationswinkel in N, ſo hat man z. B. den Krümmungshalbmeſſer

$$NK_3 = CK_3 = r_2 = r_1\,[1 - \varphi_2 (3 tang.\alpha_1 + \mu r_1)] \text{ u. ſ. w.}$$

Beiſpiel. Eine maſſive gußeiſerne Kugel von 4 Zoll Durchmeſſer werde unter dem Elevationswinkel $\alpha = 25°$ mit der Geſchwindigkeit $v = 1000$ Fuß abgeſchoſſen, man ſoll die Bahn derſelben mittels Krümmungshalbmeſſer annähernd angeben. Für den erſten Curventheil hat man den Krümmungshalbmeſſer

$$r = \frac{v^2}{g \cos.\alpha} = \frac{1000^2}{31{,}25\ \cos.\ 25°} = \frac{320000}{\cos.\ 25°} = 35308 \text{ Fuß.}$$

Da die Dichtigkeit der Luft $= 0{,}0859$ und die des Gußeiſens 470 Pfund iſt, ſo hat man $\mu = \frac{F\gamma}{2G} \cdot \zeta = {}^3/_4 \cdot 3 \cdot \frac{0{,}0859}{470} \cdot \zeta = 0{,}00041122\ \zeta$, und daher für $v = 1000$ Fuß, wo $\zeta = 0{,}90$ iſt, $\mu = 0{,}9 \cdot 0{,}00041122 = 0{,}0003701$. Nimmt man nun den erſten Bogen φ_1 nur 1 Grad $= 0{,}017453$ an, ſo erhält man den folgenden Krümmungshalbmeſſer

Geworfene Körper.

$$r_1 = r\,[1 - \varphi_1\,(3\ tang.\ \alpha + \mu r)]$$
$$= 35308\,[1 - 0{,}017453\,(3\ .\ tang.\ 25^\circ + 0{,}0003701\ .\ 35308])$$
$$= 35308\,(1 - 0{,}017453\ .\ 14{,}4664) = 35308\ .\ 0{,}74752 = 26393\ \text{Fuß}.$$

Dieſem Halbmeſſer entſpricht ohngefähr die Geſchwindigkeit

$v_1 = \sqrt{g r_1\ cos.\ \alpha_1} = \sqrt{31{,}25\ .\ 26393\ cos.\ 24^\circ} = 870$ Fuß $= 273$ Meter, und es iſt hiernach $\zeta = 0{,}85$, alſo $\mu = 0{,}00041122\ .\ 0{,}85 = 0{,}00034954$ zu nehmen. Beſchreibt man mit dem letzten Halbmeſſer einen Bogen φ_2 von $2^\circ = 0{,}034907$, ſo erhält man folgenden Krümmungshalbmeſſer

$$r_2 = r_1\,[1 - \varphi_2\,(3 tang.\ \alpha_1 + \mu r_1)]$$
$$= 26393\,[1 - 0{,}034907\,(3 tang.\ 24^\circ + 0{,}00034954\ .\ 26393)]$$
$$= 26393\,(1 - 0{,}034907\ .\ 10{,}5613) = 26393\ .\ 0{,}63162 = 16670\ \text{Fuß}.$$

Dieſem Halbmeſſer entſpricht ohngefähr die Geſchwindigkeit

$v_2 = \sqrt{g r_2\ cos.\ \alpha_2} = \sqrt{31{,}25\ .\ 16670\ .\ cos.\ 22^\circ} = 700$ Fuß $= 220$ Meter, es iſt hiernach $\zeta = 0{,}79$ und $\mu = 0{,}79\ .\ 0{,}00041122 = 0{,}00032486$. Nimmt man nun den Centriwinkel $\varphi_3 = 4^\circ = 0{,}069813$, ſo erhält man den folgenden Krümmungshalbmeſſer

$$r_3 = 16670\,[1 - 0{,}069813\,(3\ tang.\ 22^\circ + 0{,}00032486\ .\ 16670)]$$
$$= 16670\,(1 - 0{,}069813\ .\ 6{,}6276) = 16670\ .\ 0{,}537307 = 8957\ \text{Fuß}.$$

Die entſprechende Geſchwindigkeit iſt ohngefähr

$v_3 = \sqrt{31{,}25\ .\ 8957\ .\ cos.\ 18^\circ} = 500$ Fuß $= 157$ Meter, daher folgt $\zeta = 0{,}74$ und $\mu = 0{,}74\ .\ 0{,}00041122 = 0{,}00030430$. Nun $\varphi_4 = 7^\circ = 0{,}12217$ angenommen, erhält man ferner

$$r_4 = 8957\,[1 - 0{,}12217\,(3\ tang.\ 18^\circ + 0{,}0003043\ .\ 8957)]$$
$$= 8957\,(1 - 0{,}12217\ .\ 3{,}7004) = 8957\ .\ 0{,}54792 = 4908\ \text{Fuß}.$$

Für dieſen Halbmeſſer iſt die Geſchwindigkeit ohngefähr

$v = \sqrt{31{,}25\ .\ 4908\ cos.\ 11^\circ} = 390$ Fuß $= 120$ Meter, daher $\zeta = 0{,}72$ und $\mu = 0{,}00041122\ .\ 0{,}72 = 0{,}00029608$. Nimmt man nun $\varphi_4 = 11^\circ = 0{,}19199$, ſo erhält man den Krümmungshalbmeſſer

$$r_5 = 4908\,[1 - 0{,}19199\,(3\ tang.\ 11^\circ + 0{,}00029608\ .\ 4908)]$$
$$= 4908\,(1 - 0{,}19199\ .\ 2{,}0362) = 2989\ \text{Fuß}.$$

Für dieſen Halbmeſſer iſt ferner die Geſchwindigkeit ohngefähr

$v = \sqrt{31{,}25\ .\ 2989\ .\ cos.\ 0^\circ} = 300$ Fuß $= 95$ Meter, daher $\zeta = 0{,}71$ und $\mu = 0{,}00041122\ .\ 0{,}71 = 0{,}00029197$. Nimmt jetzt φ_5 wieder $= 11^\circ = 0{,}19199$, ſo bekommt der Krümmungshalbmeſſer vom erſten Stück des niederſteigenden Bogens:

$$r_6 = 2989\,[1 - 0{,}19199\ .\ (3\ tang.\ 0^\circ + 0{,}00029197\ .\ 2989)]$$
$$= 2989\,(1 - 0{,}19199\ .\ 0{,}00029197\ .\ 2989) = 2488{,}3\ \text{Fuß}.$$

Dieſem Halbmeſſer entſpricht die ohngefähre Geſchwindigkeit

$v = \sqrt{31{,}25\ .\ 2488{,}3\ cos.\ 11^\circ} = 280$ Fuß $= 90$ Meter, daher iſt $\zeta = 0{,}70$ und $\mu = 0{,}00041122\ .\ 0{,}7 = 0{,}00028885$. Nochmals $\varphi_6 = 11^\circ$ geſetzt, folgt

$$r_7 = 2488{,}3\,[1 - 0{,}19199\,(-3\ tang.\ 11^\circ + 0{,}00028885\ .\ 2488{,}3)]$$
$$= 2488{,}3\,(1 - 0{,}19199\ .\ 0{,}13561) = 2423{,}5\ \text{Fuß}.$$

Geworfene Körper.

Wird $\zeta = 0{,}70$, alſo $\mu = 0{,}00028885$ und $\varphi_7 = 11°$ angenommen, bekommt man nun

$$r_8 = 2423{,}5\ [1 + 0{,}19199\ (3\ tang.\ 22° - 0{,}00028885\ .\ 2423{,}5)]$$
$$= 2423{,}5\ (1 + 0{,}19199\ .\ 0{,}51203) = 2662\ \text{Fuß}.$$

Nimmt man nochmals $\zeta = 0{,}70$, $\mu = 0{,}00028885$ und $\varphi_8 = 11°$, ſo ſtellt ſich

$$r_9 = 2662\ [1 + 0{,}19199\ (3\ tang.\ 33° - 0{,}00028885\ .\ 2662)]$$
$$= 2662\ (1 + 0{,}19199\ .\ 1{,}17937) = 2662\ .\ 1{,}22642 = 3474\ \text{Fuß}$$ heraus.

Wenn ſich dem fallenden Körper kein Hinderniß entgegenſetzt, ſo fährt der Krümmungshalbmeſſer fort immer mehr und mehr zu wachſen, es nähert ſich die Bahn immer mehr und mehr einer ſenkrechten Linie und die Geſchwindigkeit immer mehr und mehr dem Werthe

$$v = \sqrt{\frac{2gG}{\zeta F\gamma}} = \sqrt{\frac{62{,}5}{0{,}00082244\ \zeta}} = \sqrt{\frac{62{,}5}{0{,}00058394}} = 327\ \text{Fuß}$$

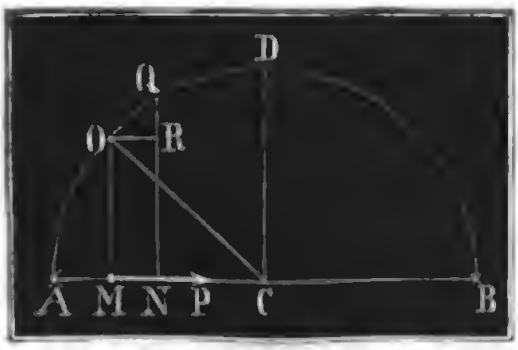
Anhang.

Die Theorie der Schwingungen.

Schwingungstheorie.

§. 1*). Ein Körper hat eine schwingende Bewegung (franz. mouvement oscillatoire, engl. oscillatory motion) oder ist in Schwingung (franz. und engl. oscillation), wenn er wiederholt in gleichen Zeiten denselben Weg hin und zurück durchläuft. Die Natur bietet uns außer der Bewegung eines Pendels noch viele andere Schwingungsbewegungen dar. Die vorzüglichste Ursache einer solchen Bewegung ist eine Kraft, welche den schwingenden Körper nach einem und demselben Punkte hinzieht oder hintreibt. So ist es z. B. die Schwerkraft, welche ein Pendel in schwingende Bewegung setzt. Wenn ein vorher in Ruhe befindlicher Körper ungestört der Kraft folgen kann, welche denselben nach einem gewissen Punkte hintreibt, so erfolgt die Schwingung desselben in einer geraden Linie; außerdem aber nimmt er Schwingungen in einer Curve an, wie z. B. ein Pendel, wo die Verbindung des Körpers mit einem festen Punkte die Schwerkraft fortwährend stört. Ebenso erfolgt die Schwingung in einer krummen Linie, wenn der Körper eine Anfangsgeschwindigkeit besitzt, welche mit der Kraft nicht einerlei Richtung hat. Der einfachste und am häufigsten vorkommende Fall ist der, wenn die Kraft der Entfernung von einem gewissen Punkte C proportional ist. Es sei A ∴ Fig. 640, der Anfangspunkt der Bewegung, C der Sitz der Kraft, also der Ort des Körpers, wo die Kraft Null ist, und M der veränderliche Ort des Körpers. Bezeichnen wir nun den Abstand CM durch x, so können wir die Acceleration des Körpers in M, $p = \mu x$ setzen, und erhalten sonach für die Geschwindigkeit v des Körpers (s. §. 19*, III.), da x um $MN = dx$ abnimmt, wenn der Weg APM um eben soviel

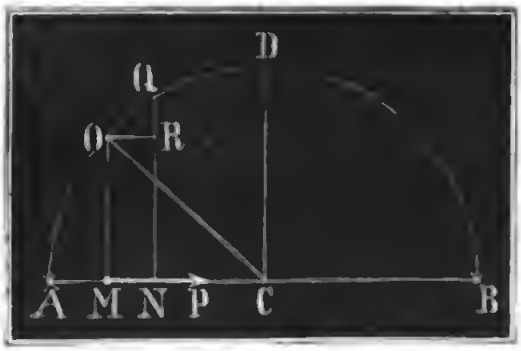
Fig. 640.



Schwingungstheorie.

wächst, $\frac{1}{2}v^2 = -\int p\,dx = -\mu\int x\,dx = -\frac{\mu x^2}{2} + Con.$

Fig. 641.



Nun ist aber in A, $v = 0$ und CA eine bestimmte Größe a, daher hat man

$$0 = -\frac{\mu a^2}{2} + Con.,\text{ und}$$

$$v^2 = \mu\,(a^2 - x^2),$$

also die Geschwindigkeit selbst,

$$v = \sqrt{\mu\,(a^2 - x^2)}.$$

Kommt der Körper in C an, ist also $x = 0$, so ist v ein Maximum, und zwar

$$v = c = \sqrt{\mu a^2} = a\sqrt{\mu}.$$

Jenseits von C nimmt v wieder allmälig ab, und ist die Entfernung x von $C = CB = -a$, so fällt wieder $v = 0$ aus, und es kehrt nachher der Körper mit wachsender Geschwindigkeit nach C zurück. Diese rückgängige Bewegung erfolgt genau nach demselben Gesetze, wie die hingehende; es ist in C, $v = -c$ und in A, $v = 0$. Auf diese Weise wiederholt sich die Bewegung ohne Ende in dem Raume $AB = 2a$, die man deshalb die doppelte Schwingungsweite (franz. amplitude des ocillations, engl. amplitude of oscillations) nennt.

§. 2*). Die Zeit, während welcher der schwingende Körper einen gewissen Weg $AM = x_1$, Fig. 641, zurücklegt, läßt sich, wie folgt, bestimmen. Wird in dem Zeitelemente dt das Wegelement $MN = dx_1 = -dx$ zurückgelegt, so hat man nach §. 19*) I.:

$$dx_1 = v\,dt,\text{ d. i. } dx = -\sqrt{\mu\,(a^2 - x^2)}\,dt;$$

und daher umgekehrt:

$$dt = -\frac{dx}{\sqrt{\mu\,(a^2 - x^2)}}.$$

Beschreiben wir über AB mit dem Halbmesser $CA = CB = a$ einen Kreis ADB, so erscheint in demselben $\sqrt{a^2 - x^2}$ als Ordinate $MO = y$, und es ist daher

$$dt = -\frac{dx}{\sqrt{\mu}\,.\,y}.$$

Setzen wir ferner den der Abscisse $CM = x$ entsprechenden Bogen $DO = s$, und das Element OQ desselben $= -ds$, so giebt uns die Aehnlichkeit gewisser Dreiecke OQR und OCM, in welchen $OR = -dx$, $OQ = -ds$, $MO = y$ und $OC = a$ ist, die Proportion $\frac{dx}{ds} = \frac{y}{a}$,

daher $\frac{dx}{y} = \frac{ds}{a}$, und es folgt sonach $dt = -\frac{ds}{\sqrt{\mu} \cdot a}$; daher

$$t = -\int \frac{ds}{\sqrt{\mu} \cdot a} = -\frac{s}{\sqrt{\mu} \cdot a} + Con.$$

Nun ist aber für den Anfangspunkt A, $t = 0$ und s der Quadrant $DA = \frac{1}{2}\pi a$, daher hat man $0 = -\frac{\frac{1}{2}\pi a}{\sqrt{\mu} \cdot a} + Con.$, und die Schwingungszeit, oder die Zeit, innerhalb welcher A nach P kommt:

$$t = \frac{\frac{1}{2}\pi a}{\sqrt{\mu} \cdot a} - \frac{s}{\sqrt{\mu} \cdot a} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{s}{a}\right).$$

Für die halbe Schwingungsdauer, d. i. für die Zeit, innerhalb welcher der Körper nach dem Ruhe- oder Mittelpunkt C kommt, ist $s = 0$, daher $t = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}$, ferner die Zeit einer Schwingung oder zum Durchlaufen des Weges $AB = 2a$, $t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$, endlich die Zeit, innerhalb welcher der Körper nach A zurückkehrt, ist $t = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$. Eben so groß ist auch die Schwingungsdauer, oder die Zeit zum Durchlaufen eines Weges $2AB = 4a$, wenn dieselbe an einem andern Orte M zu zählen angefangen wird; denn die Zeit für den Weg MB hin und zurück ist

$= 2 \cdot \frac{\text{Bog.}\, OB}{\sqrt{\mu} \cdot a}$ und die für den Weg MA hin und zurück

$= 2 \cdot \frac{\text{Bog.}\, OA}{\sqrt{\mu} \cdot a}$; folglich die Zeit für den Weg

$$2MB + 2MA = 2 \cdot \frac{\text{Bog.}\,(OB+OA)}{a\sqrt{\mu}} = \frac{2 \cdot \pi r}{a\sqrt{\mu}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}.$$

Es hängt also die Schwingungsdauer gar nicht von der Amplitude ab. Gehen wir von dem Ruhepunkte C aus, so können wir einfacher die Zeit, welche der Elongation $CM = x$ entspricht, setzen:

$t = \frac{s}{\sqrt{\mu} \cdot a}$, oder, da $s = a\ arc.\left(sin. = \frac{x}{r}\right)$ ist,

$t = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\ arc.\left(sin. = \frac{x}{a}\right)$, und umgekehrt

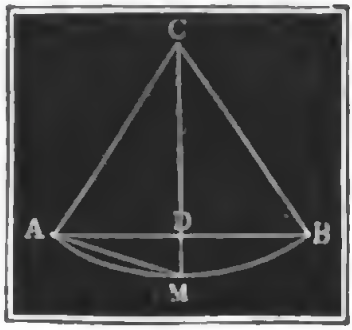
$x = a\ sin.(t\sqrt{\mu})$, sowie

$$v = \sqrt{\mu}\sqrt{a^2 - a^2\,[sin.(t\sqrt{\mu})]^2} = \sqrt{\mu} \cdot a\sqrt{1 - [sin.(t\sqrt{\mu})]^2}$$
$$= \sqrt{\mu} \cdot a\ cos.\ (t\sqrt{\mu}).$$

Schwingungstheorie.

Anmerkung. Die vorstehende Schwingungstheorie läßt sich sogar auf das Kreispendel CM, Fig. 642. anwenden, wenn man kleine Schwingungsbögen voraussetzt. Es ist die Beschleunigung des im Bogen AMB schwingenden Punktes an der Stelle A $p = g \sin. ACD = \frac{DA}{AC} \cdot g$, oder da bei kleinen Elongationen $DA = MA$ gesetzt werden kann $p = \frac{MA}{CA} \cdot g$. Bezeichnet man nun CA mit r und MA mit x, so erhält man $p = \frac{gx}{r}$, und daher durch Vergleichung mit der Formel $p = \mu x$ des vorigen Paragraphen, $\mu = \frac{g}{r}$. Folglich ist die Schwingungszeit $t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$ (Vergl. §. 261).

Fig. 642.



Längenschwingungen.

§. 3. Die vorzüglichste Ursache schwingender Bewegungen ist die Elasticität der Körper. Den einfachsten Fall bietet ein Faden oder eine Stange (Draht) OC, Fig. 643, dar, wenn derselbe durch ein Gewicht G gespannt wird. Führt man dieses Gewicht von dem Ruhepunkte C in der Axenrichtung des Fadens um einen Weg $CA = a$ fort und überläßt man es nun sich selbst, so wird es in Folge der Elasticität des Fadens wieder bis C gehoben, kommt daselbst mit einer gewissen Geschwindigkeit c an, und steigt durch seine lebendige Kraft bis zu einem Punkte B, von wo aus es wieder zurückfällt u. s. w. In dem Ruhepunkte wird das Gewicht G von der Elasticität $\frac{\lambda}{l} FE$ (s. §. 185) der Stange aufgehoben, es ist folglich hier die bewegende Kraft $P = \frac{\lambda}{l} FE - G = 0$, oder $\frac{\lambda}{l} FE = G$. Ist aber das Gewicht in einem tieferen Punkte N, welcher um $CN = x$ von C absteht, so fällt die bewegende Kraft

Fig. 643.

$$P = \frac{\lambda + x}{l} FE - G = \frac{\lambda}{l} FE + \frac{x}{l} FE - G = \frac{FE}{l} x$$ aus,

und befindet es sich in einem höheren Punkte Q, so ist diese Kraft

$$P = G - \frac{\lambda - x}{l} FE = G - \frac{\lambda}{l} FE + \frac{x}{l} FE = \frac{FE}{l} x.$$

Vernachlässigen wir die Masse der Stange, so ist folglich die Acceleration

mit welcher sich G nach C zurückbewegt, $p = \frac{P}{G}\, g = \frac{FE}{Gl}\, g.x$, und daher $\mu = \frac{FEg}{Gl}$, wenn $p = \mu x$ gesetzt wird, F den Querschnitt, l die Länge und E den Elasticitätsmodul der Stange bezeichnet. Da dieses Gesetz mit dem in den vorigen Paragraphen behandelten Fall übereinstimmt, so haben wir auch hier die Schwingungszeit: Längenschwingungen.

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{Gl}{FEg}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{Gl}{FE}}.$$

Setzt man statt F das Gewicht $G_1 = Fl\gamma$ der Stange und statt E den Elasticitätsmodul $L = \frac{E}{\gamma}$ nach Länge (s. §. 185, Anmerk. 1) ein, so erhält man auch

$$t = \frac{\pi l}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{G}{G_1 L}}.$$

Wenn man umgekehrt die Schwingungszeit t beobachtet, so kann man die Elasticitätsmodul berechnen, indem man setzt:

$$E = \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot \frac{Gl}{F} \text{ oder } L = \frac{\pi^2 l^2}{gt^2} \cdot \frac{G}{G_1}.$$

Diese Formeln gelten auch dann, wenn die Schwingung der Stange nur durch bloßes Anhängen des Gewichtes hervorgebracht wird; es ist hier die Amplitude zu beiden Seiten von C, $a = \lambda = \frac{G}{FE}\, l$, wogegen wir oben $a < \lambda$ angenommen haben.

Beispiel. Wenn ein Eisendraht von 20 Fuß Länge und 0,1 Zoll Dicke durch ein Gewicht $G = 100$ Pfund in Längenschwingungen versetzt wird, deren Zeitdauer $\frac{1}{10}$ Secunde ist, so hat man $t = \frac{1}{10}''$ und den Elasticitätsmodul desselben

$$E = 0{,}032 \cdot \pi^2 \cdot 18^2 \cdot \frac{100 \cdot 20 \cdot 4}{(0{,}1)^2 \cdot \pi} = 0{,}03{,}2 \cdot 8000 \cdot 18^2\, \pi$$
$$= 25600 \cdot 324\, \pi = 26000000 \text{ Pfund.}$$

§. 4. Die vorstehenden Formeln lassen sich auch anwenden, wenn das Gewicht G zusammendrückend auf eine steife prismatische Stange wirkt. Ebenso finden dieselben noch ihre Anwendung, wenn das an das untere Stangenende angehängte Gewicht gleich anfangs mit einer gegebenen Geschwindigkeit v niedergeht. Nach dem Principe der mechanischen Arbeiten ist in diesem Falle für die Fallhöhe h von G:

$$Gh + G\frac{v^2}{2g} = \frac{h}{l} FE \cdot \frac{h}{2} = \frac{FE}{2l} \cdot h^2, \text{ daher}$$

$$h = \frac{Gl}{FE} + \sqrt{\left(\frac{Gl}{FE}\right)^2 + \frac{2Gl}{FE} \cdot \frac{v^2}{2g}}.$$

Längenschwingungen

Nach Durchlaufung dieses Weges hat G seine Geschwindigkeit verloren und steigt nun in Folge der Elasticität wieder bis A, wo es wieder mit der Geschwindigkeit v ankommt. Endlich aber erhebt es sich in Folge seiner lebendigen Kraft $G\frac{v^2}{2g}$, indem es die Stange comprimirt, noch um eine Höhe h_1, ehe es wieder zurückkehrt und eine neue Schwingung beginnt. Für diese zweite Höhe ist

$$G\frac{v^2}{2g} = Gh_1 + \frac{FE}{2l}h_1^2, \text{ und daher}$$

$$h_1 = -\frac{Gl}{FE} + \sqrt{\left(\frac{Gl}{FE}\right)^2 + \frac{2Gl}{FE}\cdot\frac{v^2}{2g}}.$$

Durch Addition von h und h_1 bekommt man nun die ganze Schwingungsamplitude:

$$2a = h + h_1 = 2\sqrt{\left(\frac{Gl}{FE}\right)^2 + \frac{2Gl}{FE}\cdot\frac{v^2}{2g}},$$

und daher die einfache Elongation:

$$a = \sqrt{\left(\frac{Gl}{FE}\right)^2 + \frac{2Gl}{FE}\cdot\frac{v^2}{2g}}.$$

Da auch hier $p = \frac{FE}{Gl}gx = \mu x$ ist, so hat man wie oben die Zeit einer Schwingung:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{Gl}{FE}}.$$

Wenn die Anfangsgeschwindigkeit v des Gewichtes G_1 durch ein niederfallendes Gewicht G erzeugt wird, so hat man es mit dem in §. 290 abgehandelten Falle (Fig. 644) zu thun. Lassen wir das Gewicht G mit der Geschwindigkeit c aufschlagen, und setzen wir einen unelastischen Stoß voraus, so haben wir die Anfangsgeschwindigkeit von $G + G_1$:

Fig. 644.

$$v = \frac{Gc}{G+G_1},$$

daher die größte Schwingungselongation

$$a = \sqrt{\left(\frac{(G+G_1)l}{FE}\right)^2 + \frac{2G^2l}{(G+G_1)FE}\cdot\frac{c^2}{2g}},$$

und die Schwingungszeit

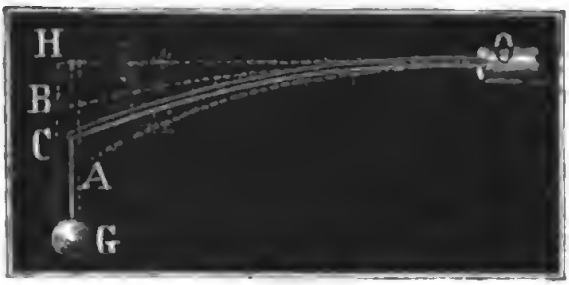
$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{(G+G_1)l}{FE}}.$$

Die Elemente der Stange nehmen an den Schwingungen von G oder $G + G_1$ Antheil, nur ist die Amplitude um

so kleiner, je näher das Element dem Aufhängepunkte liegt. Für ein Element C_1, Fig. 643, im Abstande $OC_1 = x$ vom Aufhängepunkte ist die Amplitude $y = \frac{x}{l}\,a$; wogegen die Schwingungszeit, da diese gar nicht von y oder a abhängt, dieselbe ist wie für G. Es schwingen also alle Elemente der Stange in von C nach O stetig abnehmenden Amplituden isochron. Längenschwingungen.

§. 5. Auch die relative oder die Torsionselasticität bietet Gelegenheiten zu Schwingungen dar, wie wir im Vorhergehenden kennen gelernt haben. Für eine an einem Ende O festgehaltene und am anderen Ende C durch ein Gewicht G gespannte Stange oder Feder OC haben wir §. 192 die Einbiegung Querschwingungen

Fig. 645.



$$HC = a = \frac{Pl^3}{3WE}$$

gefunden; es ist daher umgekehrt die Kraft P, mit welcher die Stange gebogen ist, $P = \frac{3WEa}{l^3}$. Wird nun diese Kraft durch ein angehängtes Gewicht G ersetzt, und a um $CA = CB = x$ vergrößert oder verkleinert, so hat man die Kraft, mit welcher das Stangenende nach der Ruhelage durch die Elasticität der Stange zurückgetrieben wird,

$$P = \frac{3WE(a+x)}{l^3} - G = \frac{3WE(a+x)}{l^3} - \frac{3WE}{l^3}a = \frac{3WE}{l^3}\,x;$$

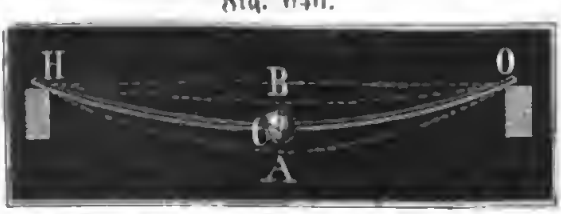
daher die Acceleration, wenn wir bloß die Masse von G in Betracht ziehen, $p = \frac{P}{G}\,g = \frac{3WE}{Gl^3}\,gx$, und, da hiernach $p = \mu x$ zu setzen ist,

$$\mu = \frac{3WE}{Gl^3}\,g.$$

Die Proportionalität zwischen p und x gestattet die Anwendung der Formel in §. 2, weshalb nun die Schwingungszeit

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{Gl^3}{3WE}}$$ folgt.

Fig. 646.



Für eine an beiden Enden frei aufliegende und in der Mitte C mit einem Gewichte G belastete Stange HO, Fig. 646, ist nach §. 193,

Querſchwingungen. $a = \frac{Pl^3}{48WE}$, daher die Schwingungsdauer $t = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{Gl^3}{48WE}}$

Beiſpiel. Wie viel Schwingungen macht der hölzerne Arm eines Hebe von 3 Fuß Länge, 4 Zoll Höhe und 3 Zoll Dicke, wenn derſelbe an dem En ein Gewicht von 300 Pfund trägt? Es iſt hier

$$WE = \frac{bh^3}{12} \cdot E = \frac{3 \cdot 64}{12} \cdot 1800000 = 28800000,$$

und $Gl^3 = 300 \cdot 36^3 = 13996800$, daher folgt die Schwingungsdauer

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{Gl^3}{3WE}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{13996800}{3 \cdot 28800000}} = 0{,}06530 \text{ Sec.}$$

und die Zahl der Doppelſchwingungen pr. Minute

$$n = \frac{60}{0{,}06530} = 919.$$

Torſionsſchwingungen. §. 6. Die Formel $t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$ findet endlich auch bei dem Torſionspendel, d. i. bei einem Faden oder einer Stange DO, Fig. 647, ſtatt, welche vermöge ihrer Torſion um ihre eigene Axe ſchwingt. In der Regel wird dieſes Pendel mit einem belaſteten Querarm CC_1 verſehen, mittels deſſen die anfängliche Drehung des Fadens hervorgebracht wird, indem man dieſen Arm aus der Ruhelage CC_1 in die Lage AA_1 bringt. Die Torſion dreht dann den Arm nach CC_1 zurück, und vermöge der Trägheit geht derſelbe auch noch weiter bis BB_1, von wo aus er nach CC_1 und AA_1 u. ſ. w. zurückkehrt. Wir haben oben (§. 216) das Torſionsmoment eines prismatiſchen Körpers $Pa = \frac{\alpha WE}{2l}$ gefunden; und wiſſen hiernach, daß daſſelbe umgekehrt wie die Länge $OD = l$ des Fadens und direct wie der Torſionswinkel $MDC = \alpha$ wächſt; iſt nun $T = Gr^2$ das Trägheitsmoment des Armes CDC_1, folglich $\frac{r^2}{a^2}\frac{G}{g}$ die auf die Armenden C und C_1 reducirte träge Maſſe M deſſelben, ſo folgt die Acceleration dieſer Punkte:

Fig. 647.

$$p = \frac{P}{M} = \frac{\alpha WE}{2la} : \frac{r^2G}{a^2g} = \frac{\alpha a WEg}{2Gr^2l}.$$

Setzen wir noch den Bogen $CM = \alpha a$, welcher der Armlänge $DA = DC$

$= a$ und dem veränderlichen Elongationswinkel $CDM = \alpha$ entspricht $= x$, so erhalten wir den Ausdruck Torsionsschwingungen.

$$p = \frac{WEg}{2Gr^2 l}\, x = \frac{WE}{2Tl}\, gx,$$

und können wieder $p = \mu x$, also $\mu = \frac{WEg}{2Tl}$ setzen.

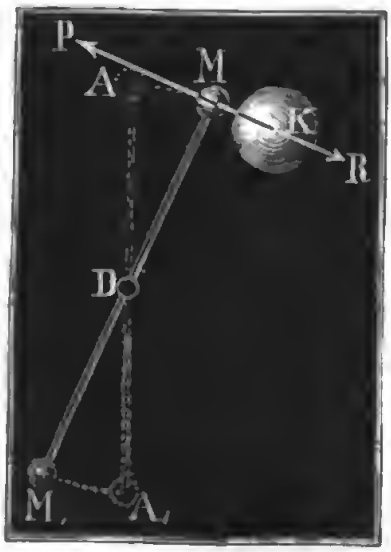
Es ist folglich auch die Schwingungsdauer, der Schwingungsbogen $ACB = A_1C_1B_1$ mag groß oder klein sein,

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{2Tl}{WE}}.$$

Anmerkung. Vorstehende Formeln für die Schwingungen, welche durch die Elasticität fester Körper hervorgebracht werden, gelten natürlich nur so lange, als mit den Schwingungselongationen die Elasticitätsgrenze nicht erreicht wird. Bei allen Maschinentheilen sind die Schwingungen möglichst zu vermeiden, weil das Arbeitsquantum, welches auf dieselben verwendet wird, für die Maschinen verloren geht; deshalb sind diese Theile höchst sorgfältig mit einander zu verbinden, und es ist zumal ein sogenannter tauber Gang zu vermeiden, der zu Stößen und Schwingungen Veranlassung giebt.

§. 7. Die Theorie des Torsionspendels findet ihre unmittelbare Anwendung bei der Bestimmung der mittleren Dichtigkeit oder des specifischen Gewichtes ε unserer Erde. Nähert man dem einen Gewichte G am Arme ADA_1, Fig. 648, eines Torsionspendels eine schwere Kugel K, so nähert sich dasselbe in Folge der Anziehung um einen Weg $AM = x$, es setzt sich in diesem neuen Orte M von G die Anziehungskraft R von K mit der Torsionskraft P ins Gleichgewicht, und es läßt sich daher auch die eine durch die andere bestimmen. Lassen wir nun nach Entfernung der Kugel K das Torsionspendel schwingen, so können wir die Schwingungsdauer desselben ermitteln und hieraus die Torsionskraft berechnen. Nach dem vorigen Paragraphen ist die Schwingungsdauer Dichtigkeit der Erde.

Fig. 648



$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}},\quad \mu = \frac{p}{x},\quad \text{und } p = \frac{\text{Torsionskraft}}{\text{Masse des Pendels}} = \frac{Pa^2}{T}\, g,$$

wenn T das Trägheitsmoment und a die Armlänge des Pendels bezeichnet; daher hat man umgekehrt die Torsions- oder Anziehungskraft

Dichtigkeit der Erde. $P = \frac{Tp}{g\alpha^2} = \frac{\mu Tx}{g\alpha^2} = \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot \frac{Tx}{a^2} = \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot \frac{T\alpha}{a}$, und das dem Drehungswinkel α entsprechende Torsionsmoment $Pa = \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot T\alpha$.

Wenn nun die Anziehungskräfte der Körper wie die Massen derselben und umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen wächsen (s. §. 246, Beisp. 3), so können wir die von K hervorgebrachte Anziehungskraft P mit dem der Anziehungskraft der Erde entsprechenden Gewichte G des kleinen Körpers an der Torsionswaage wie folgt vergleichen:

$$\frac{P}{G} = \frac{K : s^2}{E : r^2},$$

wobei s die Entfernung MK der Mittelpunkte r beider Massen G und K von einander, r den Halbmesser der Erde und E das Gewicht derselben bezeichnet. Wir erhalten nun das letztere

$$E = \frac{KGr^2}{Ps^2},$$

und wenn wir statt $E = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \varepsilon\gamma$ setzen, die Dichtigkeit der Erde:

$$\gamma_1 = \varepsilon\gamma = \frac{3E}{4\pi r^3} = \frac{3KGr^2}{4\pi Pr^3 s^2} = \frac{3KG}{4\pi Prs^2} = \frac{3KG}{4\pi rs^2} \cdot \frac{gt^2a^2}{\pi^2 Tx},$$

oder wenn wir statt $\frac{g}{\pi^2}$ die Länge l des Secundenpendels (s. §. 263) einführen,

$$\gamma_1 = \varepsilon\gamma = \frac{3Klt^2}{4\pi rxs^2} \cdot \frac{Ga^2}{T},$$

und daher das specifische Gewicht derselben:

$$\varepsilon = \frac{3Klt^2}{4\pi rxs^2} \cdot \frac{Ga^2}{T\gamma}.$$

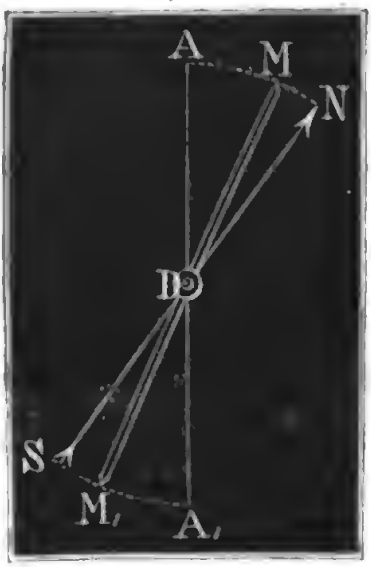
Mittels des einfachen Torsionspendels oder der sogenannten Coulomb'schen Drehwaage fand zuerst Cavendish: $\varepsilon = 5{,}48$; oder nach Hutton's Revision: $\varepsilon = 5{,}32$; später bei Zuhülfenahme des Gauß-Poggendorff'schen Spiegelapparates, Reich: $\varepsilon = 5{,}43$, endlich Baily, durch Versuche in größerem Maaßstabe: $\varepsilon = 5{,}675$. Es ist also die mittlere Dichtigkeit der Erde ohngefähr gleich der Dichtigkeit des Eisenglanzes.

Anmerkung. Ueber die Ausführung der Versuche zur Bestimmung der Dichtigkeit der Erde ist nachzusehen: Gehler's physikal. Wörterbuch, Bd. III, ferner die Abhandlung von Reich »Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde, Freiberg 1838« und die von Baily, Experiments with the torsion rod for determining the mean density of the Earth, London 1843.

Magnetismus. §. 8. Die Torsionswaage wird auch angewandt, um die Directionskraft oder das Drehungsmoment eines Magneten oder einer Magnetnadel (franz. aiguille aimantée, engl. magnetic-needle) zu fin-

den. Erſetzen wir den Querarm einer ſolchen Waage durch eine Magnet- Magnetismus.
nadel oder einen Magnetſtab MDM_1, Fig. 649, ſo ſtellt ſich derſelbe ſo,

Fig. 649



daß ſeine Directionskraft von der Torſionskraft aufgehoben wird. Weicht der unmagnetiſche Arm in der Ruhelage AA_1 um den Winkel $ADN = \alpha$ vom magnetiſchen Meridiane NS ab, und ſtellt ſich der Magnetſtab MM_1 ſo, daß ſeine Axe um den Winkel $MDN = \delta$ von dem Meridiane NS abſteht, ſo haben wir denjenigen Componenten R_1 der Directionskraft R, welcher die Umdrehung der Nadel bewirkt und von der Torſionskraft aufgehoben wird, $R_1 = R \sin. \delta$. Die Torſionskraft P iſt hingegen dem Torſionswinkel $MDA = \alpha - \delta$ proportional, läßt ſich daher $= P = P_1 (\alpha - \delta)$ ſetzen; man hat daher $R \sin. \delta = P_1 (\alpha - \delta)$ und folglich

$$R = \left(\frac{\alpha - \delta}{\sin. \delta}\right) P_1 = \left(\frac{\alpha - \delta}{\delta}\right) P_1,$$

wenn die Declination oder der Ablenkungswinkel δ klein iſt.

Nach dem vorigen Paragraphen läßt ſich aber die Torſionskraft P mittels der Formel

$$P = \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot \frac{Tx}{a^2} = \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot \frac{Ta(\alpha - \delta)}{a^2} = \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot \frac{T(\alpha - \delta)}{a}$$

aus der Schwingungsdauer t u. ſ. w des unmagnetiſchen Torſionspendel berechnen, und folglich hiernach auch die Directionskraft

$$R = \left(\frac{\alpha - \delta}{\delta}\right) P_1 = \frac{P}{\delta} = \frac{\alpha - \delta}{\delta} \cdot \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot \frac{T}{a}$$

des Magnetſtabes finden.

Das Moment dieſer Kraft iſt bei der Declination $MDN = \delta$ der Nadel, wenn wir annehmen, daß dieſelbe ihren Sitz in dem Abſtande $DM = a$ von der Drehungsaxe habe,

$$R_1 a = Ra \sin. \delta \text{ annähernd, bei kleiner Declination}$$
$$= Ra\delta = (\alpha - \delta) \cdot \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot T.$$

Dieſes Moment ($Ra \sin. \delta$) iſt für $\delta = 1$, d. h wenn die Magnetnadel rechtwinkelig gegen die Magnetrichtung ſteht, am größten, und zwar $= Ra$, und dagegen für $\delta = 0$, d. h. wenn die Axe der Magnetnadel in den magnetiſchen Meridian fällt, am kleinſten, nämlich $=$ Null.

§. 9. Da die Directionskraft R der Magnetnadel keinen Druck auf die Drehaxe verurſacht, alſo die Nadel kein Beſtreben zum Fortſchreiten,

Magnetismus. sondern nur ein Beſtreben zur Drehung hat, wenn ſie außerhalb des magnetiſchen Meridians ſteht, ſo folgt, daß die ganze Wirkung des Erdmagnetismus auf einen Magnet aus einem Kräftepaare $\frac{R}{2}, -\frac{R}{2}$ mit dem größten Momente Ra beſtehen müſſe. Da ſich ferner jedes Kräftepaar $\frac{R}{2}, -\frac{R}{2}$ durch unendlich viele andere Paare $\frac{R}{2}, -\frac{R_1}{2}$; $\frac{R_2}{2}, -\frac{R_2}{2}$ u. ſ. w. erſetzen läßt, deren Momente Ra, R_1a_1, R_2a_2 u. ſ. w. alle einander gleich ſind, ſo folgt, daß weder R noch a, alſo weder die Directionskraft noch ihr Angriffspunkt, ſondern nur ihr Moment Ra beſtimmt iſt. Dieſes Drehungsmoment Ra iſt überdies noch von zwei Factoren μ_1 und S, wovon μ_1 dem Erd- und S dem Stab- oder Nadelmagnetismus entſpricht, abhängig, weshalb wir $R = \mu_1 S$ und $Ra = \mu_1 Sa$ ſetzen können. Was endlich noch das Maaß μ_1 des Erdmagnetismus anlangt, ſo iſt dieſes bei einer horizontalſchwingenden Nadel, wie wir ſeither angenommen haben, nur der horizontale Component der Intenſität μ des ganzen Erdmagnetismus, denn der vertikale Component μ_2 wird durch die Unterſtützung oder Aufhängung der Nadel aufgehoben. Iſt ι die Inclination oder die Abweichung der magnetiſchen Erdaxe von dem Horizonte, ſo haben wir den horizontalen Componenten

$$\mu_1 = \mu \cos.\iota,$$

dagegen den vertikalen

$$\mu_2 = \mu \sin.\iota,$$

und endlich das Drehungsmoment einer Magnetnadel:

$$R\,a \sin.\delta = \mu \cos.\iota \,.\, Sa \sin.\delta,$$

alſo ihren größten Werth

$$Ra = \mu Sa \cos.\iota.$$

Schwingungen einer Magnetnadel

§. 10. Man kann auch das Drehungsmoment einer Magnetnadel aus der Schwingungszeit derſelben ſelbſt berechnen. Bringt man die aufgehängte Magnetnadel MDM_1, Fig. 650, aus ihrer durch das Gleichgewicht zwiſchen der Torſions- und der Magnetkraft bedingten Ruhelage, ſo daß ſie von dieſer um den kleinen Winkel $MDC = \varphi$ abweicht, ſo nimmt entweder die magnetiſche Directionskraft R um $R\varphi$ zu und die Torſionskraft um $P_1\varphi$ ab, oder es tritt das Umgekehrte ein, in jedem Falle erwächſt alſo aus beiden eine Kraft $(R + P_1)\varphi$ oder ein Mo-

Fig. 650.

ment $(R+P_1)\varphi a = (R+P_1)x$, welches den Magneten nach der Ruhelage zurücktreibt. Ist nun T das Trägheitsmoment der Nadel, so haben wir folglich die Beschleunigung, welche dieser Kraft entspricht, Schwingungen einer Magnetnadel.

$$p = \frac{(R+P_1)ax}{T}g,$$

und setzen wir dieselbe $= \mu x$, so erhalten wir

$$\mu = \left(\frac{R+P_1}{T}\right)ag,$$

so wie die Schwingungsdauer

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi\sqrt{\frac{T}{(R+P_1)ag}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{T}{(R+P_1)a}},$$

oder, wenn ν das Verhältniß $\frac{P_1}{R} = \frac{\delta}{\alpha-\delta}$ der Torsionskraft zur magnetischen Kraft bezeichnet,

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{T}{(1+\nu)Ra}}.$$

Hat man t durch Beobachtungen gefunden, so kann man hiernach umgekehrt das magnetische Umdrehungsmoment finden, es ist nämlich

$$Ra = \frac{\pi^2}{gt^2}\cdot\frac{T}{1+\nu}.$$

Ist die Torsionskraft klein, fällt namentlich die Ruhelage MM_1 nahe in den magnetischen Meridian, so kann man ν vernachlässigen und

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{T}{Ra}}, \text{ so wie } Ra = \frac{\pi^2}{gt^2}\cdot T \text{ setzen.}$$

Noch können wir statt Ra den oben angegebenen Werth ein- und daher

$$\mu Sa\cos.\iota = \frac{\pi^2}{gt^2}\cdot T \text{ setzen.}$$

Für eine im magnetischen Meridiane schwingende Inclinationsnadel ist dagegen $\mu Sa = \frac{\pi^2}{gt^2}\cdot T$. und für eine Nadel, deren Umdrehungsaxe in dem magnetischen Meridiane liegt, die sich daher selbst vertikal zu stellen sucht:

$$\mu Sa\sin.\iota = \frac{\pi^2}{gt^2}\cdot T.$$

Die Formel $\mu Sa\cos.\iota = \frac{\pi^2}{gt^2}\cdot T$ giebt uns in $\mu Sa\cos.\iota$ ein Product von vier Factoren; da sich aber die Inclination ι durch Beobachtungen an einer Magnetnadel bestimmen und sich Sa auf eine bestimmte Weise nicht in seine Factoren zerlegen läßt, so bleibt nur eine Zerlegung

des bekannten Productes μSa in die Factoren μ und Sa zu vollziehen übrig. Wie sich diese Zerlegung mittels Declinationsbeobachtungen ermöglichen läßt, wird aus Folgendem hervorgehen.

Magnetische Anziehungsgesetze.

§. 11. Die Kräfte, mit welchen sich die ungleichnamigen Pole zweier Magnete anziehen und die gleichnamigen Pole derselben abstoßen, stehen im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen. Man überzeugt sich hiervon am einfachsten durch die Beobachtungen an einer kleinen Magnetnadel, welche man in der Nähe eines größeren Magnetstabes schwingen läßt. Zu diesem Zwecke legt man den Magnetstab horizontal und parallel dem magnetischen Meridiane, so daß sein Nordpol gegen Nord, also sein Südpol gegen Süd gekehrt ist, und bringt eine kleine Declinationsnadel in die Verlängerung der Axe des Magnetstabes. Ist nun der Abstand s des Stiftes dieser Nadel von dem einen Pol des Magnetstabes viel kleiner als der Abstand von dem anderen, so kann man die Wirkung des letzteren auf die Nadel Null setzen und annehmen, daß durch die Wirkung des näheren Poles der Coefficient μ_1 der erdmagnetischen Kraft noch um einen gewissen Werth $\varkappa_1$ oder $\varkappa_2$ vergrößert werde. Ist nun die Schwingungszeit der Nadel $= t$, wenn der Magnetstab sich gar nicht in der Nähe derselben befindet, dagegen $= t_1$, wenn der nähere Pol dieses Stabes um s_1 von dem Stifte der Nadel absteht, und $= t_2$, wenn dieser Pol um s_2 von dem Nadelstifte absteht, so haben wir

$$\mu_1 Sa = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot T,\ (\mu_1+\varkappa_1)\, Sa = \frac{\pi^2}{g t_1^2} T \text{ und } (\mu_1+\varkappa_2) Sa = \frac{\pi^2}{g t_2^2} \cdot T,$$

daher folgt durch Division

$$\frac{\mu_1+\varkappa_1}{\mu_1} = \frac{t^2}{t_1^2} \text{ und } \frac{\mu_1+\varkappa_2}{\mu_1} = \frac{t^2}{t_2^2}, \text{ folglich}$$

$$\varkappa_1 = \left(\frac{t^2-t_1^2}{t_1^2}\right)\mu_1 \text{ und } \varkappa_2 = \left(\frac{t^2-t_2^2}{t_2^2}\right)\mu_1, \text{ endlich}$$

$$\varkappa_1 : \varkappa_2 = \frac{t^2-t_1^2}{t_1^2} : \frac{t^2-t_2^2}{t_2^2},$$

oder, wenn statt t, t_1 und t_2 die Schwingungszahlen $n = \frac{60''}{t}$, $n_1 = \frac{60''}{t_1}$ und $n_2 = \frac{60''}{t_2}$ eingeführt werden,

$$\varkappa_1 : \varkappa_2 = n_1^2 - n^2 : n_2^2 - n^2.$$

Wenn nun die Wirkung des Magnetstabes auf die Nadel dem umgekehrten Quadrate der Entfernung proportional ist, so muß auch

$$\varkappa_1 : \varkappa_2 = s_2^2 : s_1^2, \text{ und folglich auch}$$

$$\frac{n_1^2-n^2}{n_2^2-n_1} = \frac{s_2^2}{s_1^2}$$

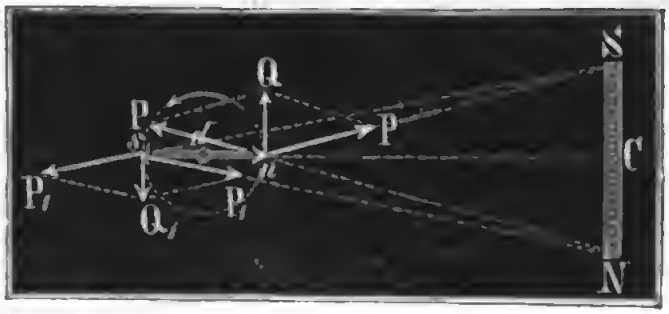
sein, was auch durch die Beobachtungen bestätigt wird.

§. 12. Die Wirkungen eines Magnetstabes NS auf eine Magnetnadel ns fallen am einfachsten aus, wenn der Magnetstab rechtwinkelig gegen den magnetischen Meridian gelegt wird, und zwar entweder so, daß sich der Stift d der Nadel ns, Fig. 651, in der Verlängerung von NS, oder so, daß er sich in dem durch die Mitte C gehenden Perpendikel von NS, Fig. 652, befindet. Setzen wir vor der Hand die Kraft, welche ein

Magnetische Anziehungsgesetze.

Fig. 651.

Fig. 652.



Pol von NS auf einen Pol von ns in der Entfernung Eins ausübt, $= K$, so haben wir für den ersten Fall, Fig. 651, wenn a die Länge NS und e die Entfernung Cd der Mittelpunkte C und d von NS und ns bezeichnet, die Kraft s, mit welcher von N angezogen wird, $P = \frac{K}{Ns^2}$, annähernd $= \frac{K}{(e-\frac{1}{2}a)^2}$, und die, mit welcher s von S abgestoßen wird,

$$P_1 = \frac{K}{Ss^2} = \frac{K}{(e+\frac{1}{2}a)^2},$$

daher die Mittelkraft aus P und P_1:

$$Q = P - P_1 = K\left(\frac{1}{(e-\frac{1}{2}a)^2} - \frac{1}{(e+\frac{1}{2}a)^2}\right)$$

$$= \frac{(e+\frac{1}{2}a)^2-(e-\frac{1}{2}a)^2}{(e+\frac{1}{2}a)^2\,(e-\frac{1}{2}a)^2}\,K = \frac{2aeK}{(e+\frac{1}{2}a)^2\,(e-\frac{1}{2}a)^2},$$

oder, wenn $\frac{1}{2}a$ gegen e klein ist,

$$Q = \frac{2aeK}{e^4} = \frac{2aK}{e^3}.$$

Ebenso ist die Mittelkraft aus der Anziehungs- und Abstoßungskraft des Nordpoles n:

$$-Q = -\frac{2aK}{e^3},$$

und daher das Moment des von diesen Mittelkräften gebildeten Kräftepaares, wenn l die Entfernung der Pole der Nadel bezeichnet,

$$Ql = \frac{2alK}{e^3}$$

Magnetische Anziehungsgesetze.

Für den zweiten Fall (Fig. 652) sind hingegen die Anziehungs- und Abstoßungskräfte in s:

$$P = \frac{K}{Ns^2} = \frac{K}{Ss^2}, \text{ und die in } n:$$

$$P_1 = \frac{K}{Sn^2} = \frac{K}{Nn^2},$$

folglich die resultirenden Mittelkräfte:

$$Q = 2 \cdot \frac{CN}{Ns} \cdot P = \frac{aP}{Ns} = \frac{aK}{Ns^3} \text{ und } Q_1 = \frac{aK}{Nn^3}.$$

Wenn nun $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}l$ ansehnlich kleiner sind als e, so können wir statt $Ns = Ss$ und $Nn = Sn$ den Mittelwerth $Nd = Sd$ und dafür den Näherungswerth $Cd = e$ einführen, erhalten demnach

$$Q = Q_1 = \frac{aK}{e^3},$$

und daher das Moment des von Q und Q_1 gebildeten Kräftepaares

$$Ql = \frac{alK}{e^3},$$

d. i. halb so groß als im vorigen Falle, was auch durch die Beobachtungen vollkommen bestätigt wird.

Uebrigens ist aber die Kraft K selbst noch ein Product von der Intensität $\varkappa$ des Magnetismus in ns und von der (S) in NS, also $K = \varkappa S$ zu setzen, weshalb nun für den ersten Fall

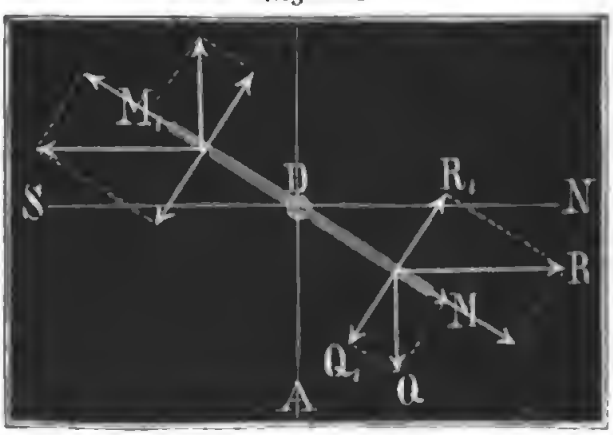
$$Q = \frac{2\varkappa Sa}{e^3}, \text{ und für den zweiten}$$

$$Q = \frac{\varkappa Sa}{e^3} \text{ resultirt.}$$

Ablenkung des Erdmagnetismus.

§. 13. Ueberlassen wir in beiden der vorher betrachteten Fälle die Magnetnadel ns der Einwirkung des Magneten NS, so nimmt dieselbe eine neue Stellung MM_1. Fig 653, ein, wobei sich die Kraft Q, mit welcher der Magnetstab auf die Nadel einwirkt, mit der Kraft R, die der Erdmagnetismus auf sie ausübt, ins Gleichgewicht setzt. Ist nun δ der Ablenkungswinkel $MDN = SDM_1$, so haben wir die sich das Gleichgewicht haltenden

Fig. 653.



Seitenkräfte von Q und R: $Q_1 = Q\,cos.\,\delta$ und $R_1 = R\,sin.\,\delta$, folglich $Q\,cos.\,\delta = R\,sin.\,\delta$, und ſonach $tang\,\delta = \frac{Q}{R}$, oder, wenn wir nach dem vorigen Paragraphen entweder $Q = \frac{2\varkappa Sa}{e^3}$ oder $Q = \frac{\varkappa Sa}{e^3}$, und nach §. 9, $R = \mu_1 \varkappa$ ſetzen, entweder

Beſtimmung des Erdmagnetismus.

$$tang.\,\delta = \frac{2\varkappa Sa}{\mu_1 \varkappa e^3} = \frac{2Sa}{\mu_1 e^3} \text{ oder } tang.\,\delta = \frac{Sa}{\mu_1 e^3}.$$

Hiernach läßt ſich nun umgekehrt das Verhältniß des magnetiſchen Momentes des Stabes NS zu der Intenſität des Erdmagnetismus finden, denn es iſt entweder

$$\frac{Sa}{\mu_1} = {}^1/_2 e^3\,tang.\,\delta \text{ oder } = e^3\,tang.\,\delta.$$

Die Beobachtung der Schwingungsdauer des Magnetſtabes NS giebt uns aber (nach §. 10) das Product

$$\mu_1 Sa = \frac{\pi^2}{g\,t^2} \cdot T;$$

daher folgt durch Combination beider Gleichungen das magnetiſche Moment des Stabes entweder

$$Sa = \frac{\pi}{t\sqrt{g}} \sqrt{{}^1/_2 Te^3\,tang.\,\delta} \text{ oder } Sa = \frac{\pi}{t\sqrt{g}} \sqrt{Te^3\,tang.\,\delta},$$

und das Maaß der horizontalen Componenten des Erdmagnetismus, entweder

$$\mu_1 = \frac{\pi}{t\sqrt{g}} \sqrt{\frac{2\,T\,cotang.\,\delta}{e^3}} \text{ oder } = \frac{\pi}{t\sqrt{g}} \sqrt{\frac{T\,cotang.\,\delta}{e^3}},$$

je nachdem man δ auf die eine oder die andere Weiſe beobachtet hat.

Durch Diviſion mit dem Coſinus der Inclination ($cos.\,\iota$) bekommt man die ganze Stärke des Erdmagnetismus: $\mu = \frac{\mu_1}{cos.\,\iota}$.

Um ſich einen klaren Begriff von dem Coefficienten oder dem Maaße μ des Erdmagnetismus zu verſchaffen, muß man in der Formel $Ra = \mu Sa$ und $Ql = \frac{\varkappa Sla}{e^3}$, $a = l = e = 1$, ſo wie auch $\varkappa = S = 1$ ſetzen; dann bekommt man $Ra = \mu$ und $Ql = 1$; es iſt hiernach

1) das Maaß μ der Intenſität des Erdmagnetismus dasjenige Moment, mit welchem durch den Erdmagnetismus eine Magnetnadel umgedreht wird, deren magnetiſches Moment = Eins iſt; und es iſt

2) das magnetiſche Moment einer Magnetnadel = Eins, wenn ſie einer andern ihr gleichen und mit ihr gleich ſtarken Magnetnadel bei der zweiten, in Fig. 652 abgebildeten Stellung in der Entfernung Eins ein Moment Eins (1 Millimetermilligramm) ertheilt.

Bestimmung des Erdmagnetismus

Nach Weber's Angaben iſt, wenn die Acceleration der Schwere 1 Millimeter wäre:

in Göttingen $\mu = 1{,}774$ Millimetermilligramm,
in München $\mu = 1{,}905$ » »
in Mailand $\mu = 2{,}018$ » »

für die Acceleration der Schwere von 9810 Millimeter im mittleren Europa ſind aber dieſe Werthe $\sqrt{9810} = 99$mal ſo klein.

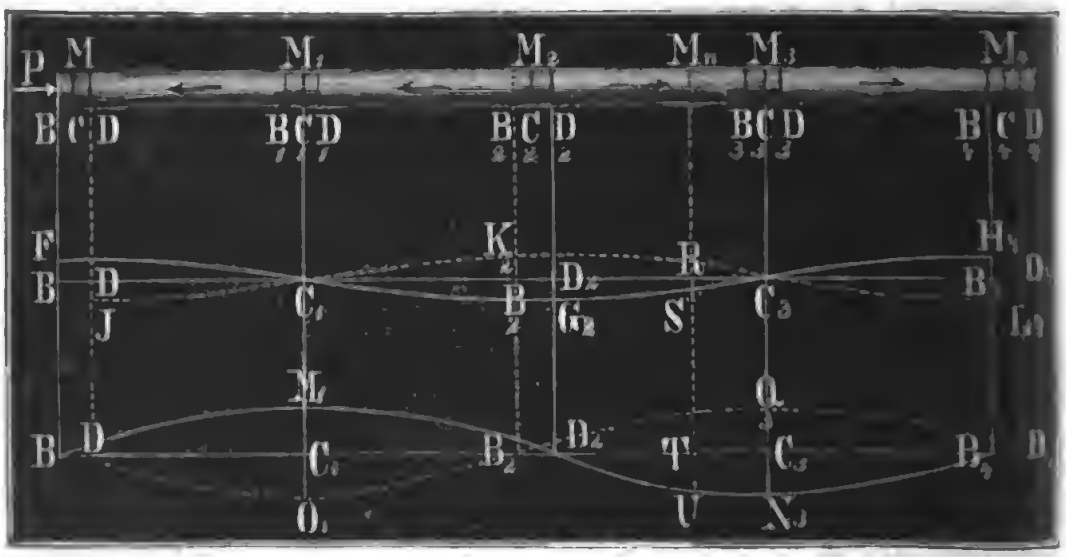
Anmerkung. Zum tieferen Studium des Magnetismus ſind außer der Phyſik von Pouillet und Müller, vorzüglich noch Lamont's Handbuch des Erdmagnetismus (Berlin 1849) und Gauß und Weber's Reſultate aus den Beobachtungen des magnetiſchen Vereines, Göttingen und Leipzig 1837 bis 1843, zu empfehlen.

Wellen.

§. 14. Wir haben bei den Längen- und Querſchwingungen prismatiſcher Körper im Obigen (§. 3, 4 und 5) gar nicht auf die Maſſe dieſer Körper Rückſicht genommen, ſondern nur die Maſſe des den Körper ſpannenden Gewichtes in Betracht gezogen. Im Folgenden wollen wir hingegen von einem ſpannenden Gewichte ganz abſehen, und vorausſetzen, daß der Körper durch einen momentanen Impuls, oder durch eine nur eine kurze Zeit lang wirkende Kraft in eine ſchwingende Bewegung geſetzt worden ſei, und daher den ſchwingenden Körper allein als träge Maſſe behandeln. Den einfachſten Fall bieten auch hier die Längenſchwingungen dar, betrachten wir daher auch dieſe zunächſt.

Wir wiſſen aus dem Obigen, daß ſämmtliche Theile einer prismatiſchen Stange BM_4, Fig. 654, in Schwingungen verſetzt werden, wenn man

Fig. 654



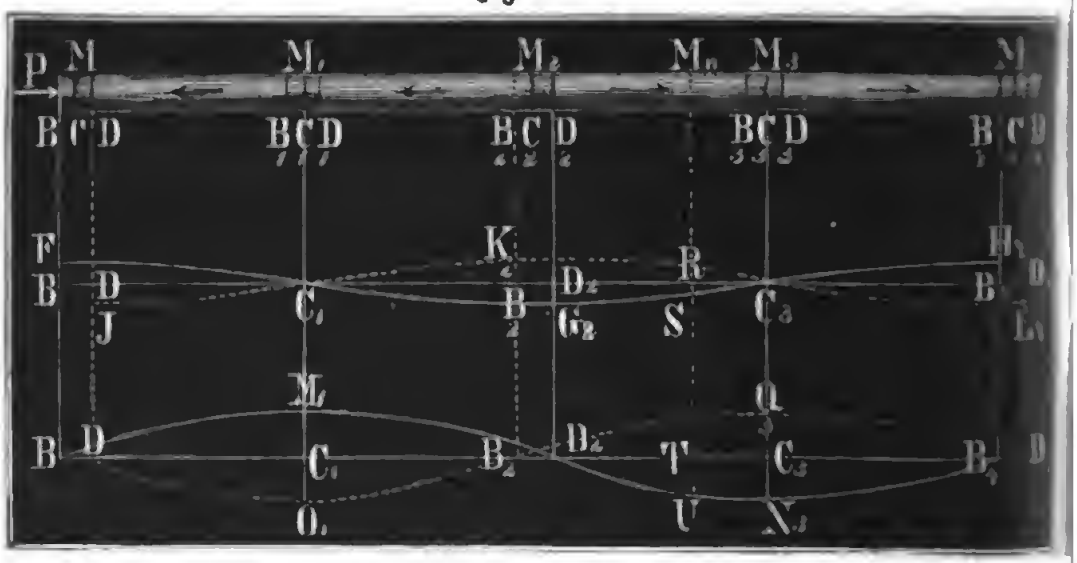
dieſe Stange durch eine in ihrer Axenrichtung wirkende Kraft P ausgedehnt oder comprimirt hat. Nicht allein das Endelement M, ſondern auch

jedes andere Element M_1, M_2 . . . der Stange ſchwingt dann innerhalb eines gewiſſen Raumes BD, B_1D_1, B_2D_2 . . . hin und her, den man die Schwingungsamplitude nennt; auch läßt ſich, wenn die Stange ſehr lang iſt, annehmen, daß dieſer Raum bei allen Elementen einer und derſelbe ſei. Wenn nun auch die Zeit, innerhalb welcher ein Stangenelement eine Schwingung vollendet, an allen Stellen der Stange eine und dieſelbe iſt, ſo können wir doch nicht vorausſetzen, daß ſich alle dieſe Elemente M, M_1, M_2 u. ſ. w. gleichzeitig in derſelben Bewegungsphaſe, z. B. gleichzeitig in der Mitte ihrer Schwingung befinden, ſondern wir müſſen vielmehr annehmen, daß die Mittheilung der von M ausgehenden Bewegung Zeit erfordere und derſelbe Bewegungszuſtand eines Elementes um ſo ſpäter eintrete, je entfernter dieſes Element von der Bewegungsquelle P entfernt iſt. Es iſt hiernach möglich, daß in dem Augenblicke, wenn M einen Schwung BD hin und zurück gemacht hat, das Element M_1 noch auf dem Rückwege begriffen, z. B. erſt in C_1 ſei, daß ferner das Element M_2 erſt einen einfachen Schwung gemacht habe, alſo den Ort D_2 einnehme, daß das Element M_3 erſt die Hälfte des Hinweges zurückgelegt habe, daher in C_3 ſtehe, daß endlich ein Element M_4 erſt eine Schwingung beginne, alſo mit M gleichzeitig ſchwinge. Die Geſchwindigkeit, mit welcher eine und dieſelbe Bewegungsphaſe von M aus nach und nach in dem Körper fortſchreitet, heißt die Fortpflanzungsgeſchwindigkeit (franz. vitesse de propagation, engl. velocity of propagation) der Schwingungen des Körpers. Ferner bezeichnet man den Inbegriff aller derjenigen Elemente von M bis M_4 des Körpers, welche ſich in den ſämmtlichen Bewegungsphaſen einer Schwingung befinden, alſo zwiſchen zwei Elementen M und M_4 von gleichem Bewegungszuſtande enthalten ſind, mit dem Namen einer Welle (franz. ondulation, engl. undulation, waving) des ſchwingenden Körpers, und nennt den Abſtand MM_4 ſelbſt die Länge der Welle. Eine Welle beſteht aus einem Hintertheile BD_2, innerhalb deſſen ſich die rückkehrenden Elemente, wie M_1, M_2 . . . befinden, und aus einem Vordertheile D_2B_2, welcher die noch vorwärtsgehenden Elemente M_3, M_4 . . . einſchließt; man nennt auch wohl BD_2 den verdünnten und D_2B_4 den verdichteten Theil der Welle, weil alle rückkehrenden Elemente innerhalb BD_2 in Ausdehnung, und alle hingehenden Elemente D_2B_4 noch im Zuſammendrücken begriffen ſind. Wellen.

§. 15. Die Bewegungs- und Geſchwindigkeitsphaſen innerhalb einer Welle laſſen ſich recht gut durch die Ordinaten von Schlangerlinien wie $FC_1G_2C_3H_4$ und $BM_1D_2N_3B_4$ darſtellen. In dem Augenblicke, wenn M in B eine neue Schwingung beginnt, und die größte Elongation und Null Geſchwindigkeit hat, befindet ſich M_1 in der Ruhelage,

Wellen. hat alſo die Elongation Null und die größte Geſchwindigkeit; beides wird auch durch die genannten Curven angezeigt, denn die erſte oder Elongationscurve geht in B um die Amplitude $BF = CB$ über die Axe BD, hin und durchſchneidet in C_1 dieſe Axe, wogegen die zweite oder Geſchwindigkeitscurve in B durch die Axe hindurchgeht und in C_1 um die Maximalgeſchwindigkeit C_1M_1 über der Axe hinläuft. In demſelben Augenblicke befindet ſich ferner das Element M_2 auf der andern Seite im größten Abſtande von ſeiner Ruhelage C_2 und es iſt ſeine Geſchwindigkeit wie bei

Fig 655.



M gleich Null; auch dies iſt aus beiden Curven zu erſehen, denn die eine läuft in D_2 um die Amplitude D_2G_2 unterhalb der Axe hin, und die andere ſchneidet die Axe daſelbſt, hat alſo die der Geſchwindigkeit entſprechende Ordinate Null. Ebenſo werden durch dieſe Curven die Bewegungs- und Geſchwindigkeitsphaſen der Elemente M_3, M_4 u. ſ. w. angegeben. Da z. B. die erſte Curve die Axe in C_3 ſchneidet und die zweite daſelbſt um den Maximalwerth C_3N_3 unter der Axe hinläuft, ſo wird dadurch angezeigt, daß in dieſem Augenblicke das Element M_3 durch ſeine Ruhelage mit der Maximalgeſchwindigkeit in poſitiver Richtung hindurch gehe. Will man die Bewegungsphaſe irgend eines anderen Elementes M_n zwiſchen M, M_1, M_2 u. ſ. w. im Augenblicke kennen lernen, wo das erſte Element M eine neue Schwingung beginnt, ſo darf man nur von demſelben ein Perpendikel auf die beſprochenen Curven herablaſſen. Das Stück RS dieſes Perpendikels zwiſchen der erſten Curve und ihrer Axe entſpricht der Elongation dieſes Elementes und das Stück TU zwiſchen der zweiten Curve und ihrer Axe giebt die Geſchwindigkeit deſſelben an. Da beide Ordinaten abwärts gerichtet ſind, ſo deuten ſie auch an, daß ſowohl die

Elongation als auch die Geschwindigkeit positiv sei, d. i. die Richtung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit habe. Wellen.

Befände sich das Element M in D, träte es also eine rückgängige Bewegung an, so würden sich die verschiedenen Elongationen der übrigen Elemente einer Welle durch die Ordinaten der punktirten Curve $JC_1K_2C_3L_4$, und die Geschwindigkeiten derselben durch die Ordinaten der punktirten Curve $DO_1B_2Q_3D_4$ repräsentiren lassen. Die doppelte Schwingungsdauer eines Elementes, d. i. die Zeit t, innerhalb welcher dasselbe den Weg $BD + DB$ zurücklegt, ist auch gleich der Zeit, innerhalb welcher die Schwingungsbewegung um die ganze Länge l einer Welle fortgepflanzt wird, ist daher c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so hat man die ganze Länge der Welle:

$$AB_4 = l = c \cdot 2t = 2ct.$$

Die Länge des Hintertheils der Welle ist aber

$$BD_2 = l_1 = BB_2 + B_2D_2 = ct + \lambda,$$

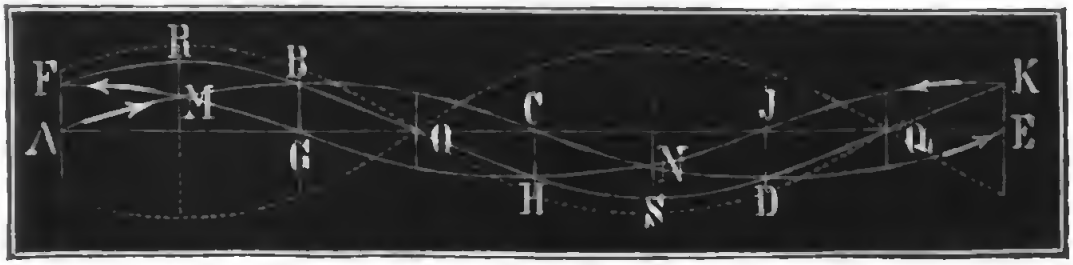
und die des Vordertheiles:

$$D_2B_4 = l_2 = D_2D_4 - B_2D_4 = ct - \lambda,$$

wo λ die ganze Schwingungsamplitude eines Elementes bezeichnet.

Anmerkung. Mit Hülfe der Schwingungscurven lassen sich auch die Erscheinungen vor Augen führen, welche mit der Interferenz der Wellen begleitet sind. Ziehen wir nur zwei gleiche und entgegengesetzt laufende Wellenzüge in Betracht, und hiervon wieder in $ABCDE$ und $FGHIK$, Fig. 656. nur diejenigen Curven, deren Ordinaten die Schwingungselongationen abschneiden. Aus den

Fig. 656.



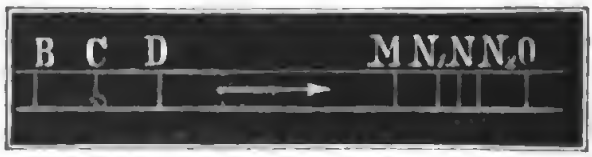
Schwingungselongationen eines zwei Wellen angehörenden Elementes entspringt eine mittlere Elongation, welche genau so gefunden wird, wie jede mittlere Bewegung aus zwei Seitenbewegungen (S. §. 27), und zwar hier durch die algebraische Addition der einfachen Elongationen. Hiernach werden in den Punkten M und N, wo sich beide Wellencurven begegnen, die Ordinaten verdoppelt, und dagegen in den Punkten O und Q, wo beide Curven auf entgegengesetzten Seiten von der Axe AE gleichviel abstehen, die Ordinaten vernullt, und es resultirt aus beiden Wellencurven eine dritte $FRBOHSDQK$, deren Ordinaten die Elongationen aller Elemente in der Axe AE angeben. Während die Wellenzüge ABC und FGH einander entgegenrücken, ändert sich natürlich auch die resultirende Wellencurve $FRBO$ u. s. w.; es ist indessen leicht zu ermessen, daß hierbei die Ruhepunkte O und Q ihren Ort nicht ändern, da hier die Ordinaten der einfachen Wellenzüge auch während der fortgesetzten Bewegung derselben gleich groß

und entgegengesetzt bleiben. Diese Punkte sind die sogenannten Schwingu
knoten.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

§. 16*). Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen läßt auf folgende Weise ausmitteln. Denken wir uns den schwingenden Kö BO, Fig. 657, aus unendlichen Elementen, jedes vom Querschnitte A von der Länge $BC = CD = dx$ bestehend, und nehmen wir an, daß

Fig. 657.



Bewegungszustand des nen Elementes BC= in einem Zeitelement vollkommen auf das gende Element CD= übergehe, daß also die wegungsphasen in der Axenrichtung des Körpers mit der Geschwind $c = \frac{dx}{dt}$ fortschreiten. Setzen wir voraus, daß die Elemente BC und in der Zeit t von C nach N schwingen und dadurch in die Lagen MN= und $NO = dx_2$ kommen, und bezeichnen wir die entsprechende Elong CN durch y. War nun die Trennungsfläche zwischen beiden Elem vor dt Secunden in N_1 und gelangt diese dt Secunden später nach so haben wir die entsprechenden Wege der Elemente: $NN_1 = dy_1$ $NN_2 = dy_2$, ferner die Geschwindigkeiten $v_1 = \frac{dy_1}{dt}$ und $v_2 =$ und daher die Retardation:

$$p = \frac{v_1 - v_2}{dt} = \frac{dy_1 - dy_2}{dt^2}.$$

Da dt Secunden vor dem Zeitpunkte, wo die Elemente BC und die Stellen MN und NO einnahmen, N_1 genau in derselben Phase wie jetzt O, so hat man auch $CN_1 = DO$; und da dt Secunden vor diesem Zeitpunkte N_2 mit M in einerlei Phase war, so folgt auch $CN_2 =$ Aus beiden Gleichungen ergiebt sich nun

$$N_1O = DO - DN_1 = DO - (CN_1 - CD) = CD \text{ und}$$
$$MN_2 = CN_2 - CM = CN_2 - (BM - BC) = BC, \text{ und}$$
$$NN_1 = dy_1 = N_1O - NO = CD - NO = dx - dx_2,$$
$$NN_2 = dy_2 = MN_2 - MN = BC - MN = dx - dx_1.$$

Es ist also das Wegelement dy_1 zugleich die Zusammendrückung $dx - dx_2$ des Elementes NO und das Wegelement dy_2 die Zusammendrückung $dx - dx_1$ des Elementes MN. Ist nun noch E der Elastizitätsmodul des schwingenden Stabes, so hat man die aus den Zusammendrückungen hervorgehenden Spannungen der Elemente MN und NO:

Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

$$S_1 = \left(\frac{dx - dx_1}{dx}\right) AE = \frac{dy_2}{dx} \cdot AE \text{ und}$$

$$S_2 = \left(\frac{dx - dx_2}{dx}\right) AE = \frac{dy_1}{dx} \cdot AE.$$

Durch Subtraction dieſer beiden Spannungen von einander erhält man nun die verzögernde Kraft: $P = S_2 - S_1 = \left(\frac{dy_1 - dy_2}{dx}\right) AE$, und iſt nun noch γ die Dichtigkeit der Stangenelemente BC, CD, alſo $Adx.\gamma$ das Gewicht und $\frac{Adx.\gamma}{g}$ die Maſſe M eines Stangenelementes, ſo hat man die Beſchleunigung deſſelben in N_1 auch

$$p = \frac{P}{M} = \left(\frac{dy_1 - dy_2}{dx}\right) AE \cdot \frac{g}{Adx\gamma} = \frac{gE}{\gamma} \cdot \frac{dy_1 - dy_2}{dx^2}.$$

Durch Gleichſetzen beider Werthe für p erhält man nun die Gleichung

$$\frac{dy_1 - dy_2}{dt^2} = \frac{gE}{\gamma} \cdot \frac{dy_1 - dy_2}{dx^2}, \text{ woraus}$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{gE}{\gamma}, \text{ oder } c^2 = \frac{gE}{\gamma},$$

alſo die Fortpflanzungsgeſchwindigkeit (Schallgeſchwindigkeit),

$$c = \sqrt{\frac{gE}{\gamma}} = \sqrt{gL},$$

wo L den Elaſticitätsmodul nach Länge bezeichnet, folgt.

Beiſpiel. Nimmt man den Elaſticitätsmodul des Tannenholzes $E = 1'800000$ Pfund und das Gewicht eines Cubikfußes deſſelben $= 30$ Pfd. an, ſo erhält man die Fortpflanzungsgeſchwindigkeit deſſelben

$$c = \sqrt{\frac{144.1'8000000}{30} . g} = \sqrt{144 \,.\, 60000 \,.\, g} = 16432 \text{ Fuß},$$

d. i. ungefähr 15 mal ſo groß als die der Luft.

Anmerkung. Dieſe Formel für die Fortpflanzungsgeſchwindigkeit gilt auch für eine geſpannte Saite, und ſogar für das Waſſer und für die Luft. Iſt p der Druck der Luft auf die Flächeneinheit, ſo hat man die den Verdichtungsverhältniſſen $\frac{dy_1}{dx}$ und $\frac{dy_2}{dx}$ entſprechenden Spannungen nach dem Mariotte'ſchen Geſetze $S_2 = \frac{pdx}{dx - dy_1}$ und $S_1 = \frac{pdx}{dx - dy_2}$, und daher die bewegende Kraft auf ein Element vom Querſchnitte A:

$$P = A\,(S_2 - S_1) = \frac{(dy_1 - dy_2)\,Apdx}{(dx - dy_1)\,(dx - dy_2)},$$

oder da $\frac{dy}{dx}$ nur ein kleiner Bruch iſt, alſo $(dx - dy_1)\,(dx - dy_2) = dx^2$ geſetzt werden kann, $P = \frac{(dy_1 - dy_2)\,Ap}{dx}$. Dieſer Ausdruck ſtimmt mit dem

Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Obigen, wenn man statt p, E einsetzt, vollkommen überein, es ist folglich die Schallgeschwindigkeit in der Luft $c = \sqrt{g \cdot \frac{p}{\gamma}}$.

Bei der Lehre von der Wärme wird im zweiten Bande gezeigt, daß wegen der Wärmeveränderung, welche mit der Dichtigkeitsveränderung der Luft nothwendig verbunden ist, an dieser Formel noch ein Coefficient anzubringen ist. Da die Dichtigkeit γ der Luft ihrer Spannung p proportional ist, so fällt auch p aus der Formel heraus, und es bleibt nur noch die Temperatur t in derselben zurück. Gewöhnlich nimmt man für Luft

$$c = 333\sqrt{1 + 0{,}00367 \cdot t} \text{ Meter} = 1061\sqrt{1 + 0{,}00367 \cdot t} \text{ Fuß}.$$

Beispiel. Wenn nach der Anmerkung des §. 295, eine Wassersäule durch 15 Pfd. Kraft um 0,000050 seines Volumens zusammengedrückt wird, so läßt sich für diese Flüssigkeit $E = \frac{15}{0{,}000050} = 300000$ Pfd., und daher die Schallgeschwindigkeit in derselben

$$c = \sqrt{31{,}25 \cdot \frac{300000 \cdot 144}{66}} = \sqrt{31{,}25 \cdot \frac{7200000}{11}} = 4523 \text{ Fuß},$$

also ungefähr 4,3 mal so groß als die Schallgeschwindigkeit in der Luft setzen.

Schwingungszeit. §. 17 *). Wir können nun auch die Zeit einer Schwingung finden, indem wir zunächst die Gleichung suchen, welche die Abhängigkeit der Schwingungselongation von der Zeit und von der die Ruhelage des schwingenden Elementes bestimmenden Abscisse x ausdrückt. Sicherlich ist y sowohl eine Funktion von t als auch eine von x, es läßt sich folglich $y = \varphi(t)$ und auch $y = \psi(x)$ setzen.

Aus der ersten dieser beiden Funktionen folgt durch Differenziiren die variable Schwingungsgeschwindigkeit

$$v = \frac{dy}{dt} = \varphi_1(t),$$

und ebenso die entsprechende Acceleration

$$p = \frac{dv}{dt} = \varphi_2(t),$$

wo $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ andere Funktionen von t ausdrücken (vergl. §. 19 *).

Die zweite Funktion giebt das Ausdehnungsverhältniß $\frac{dy}{dx} = \psi_1(x)$, also die Spannung

$$S = AE \cdot \frac{dy}{dx} = AE \cdot \psi_1(x),$$

daher die bewegende Kraft des Massenelementes $dM = Adx \cdot \frac{\gamma}{g}$,

$$dS = AE \cdot \frac{d[\psi_1(x)]}{dx} = \frac{AE\,\psi_2(x)}{dx},$$

und die entsprechende Acceleration $p = \frac{dS}{dM} = \frac{gE}{\gamma}\psi_2(x)$; wobei natürlich $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ andere Funktionen von x anzeigen.

Setzen wir die beiden Ausdrücke für p einander gleich, so erhalten wir folgende Endgleichung: Schwingungszeit.

$$\varphi_2(t) = \frac{gE}{\gamma} \cdot \psi_2(x), \text{ oder, da } \frac{gE}{\gamma} = c^2 \text{ ist,}$$
$$\varphi_2(t) = c^2 \cdot \psi_2(x).$$

Dieser Differenzialgleichung wird durch folgende Integralgleichung

$$y = \varphi(t) = \psi(x) = F(ct+x) + f(ct-x),$$

wo F und f unbestimmte Funktionen von den in den Parentheſen enthaltenen Größen bezeichnen, entsprochen, denn es ist

$$\varphi_1(t) = \frac{d[\varphi(t)]}{dt} = cF_1(ct+x) + cf_1(ct-x),$$

$$\varphi_2(t) = \frac{d[\varphi_1(t)]}{dt} = c^2F_2(ct+x) + c^2f_2(ct-x)$$
$$= c^2[F_2(ct+x) + f_2(ct-x)], \text{ ferner}$$

$$\psi_1(x) = \frac{d[\psi(x)]}{dx} = F_1(ct+x) - f_2(ct-x) \text{ und}$$

$$\psi_2(x) = \frac{d[\psi_1(x)]}{dx} = F_2(ct+x) + f_1(ct-x), \text{ also wirklich}$$
$$\varphi_2(t) = c^2 \cdot \psi_2(x).$$

Obgleich die Funktion $y = F(ct+x) + f(ct-x)$ eine unbestimmte ist, so läßt sie sich doch, wenn man noch nähere Bestimmungen des schwingenden Körpers giebt, dazu benutzen, um die Schwingungszeit des schwingenden Körpers zu finden. Wie dies in einigen Fällen möglich ist, wird aus Folgendem erhellen.

Anmerkung. Wenn man aus den Formeln $dy = vdt$ und $dx = cdt$, dt eliminirt, so erhält man den Ausdruck $\frac{dy}{dx} = \frac{v}{c}$, oder, da $\frac{dy}{dx}$ die Verdichtung σ des schwingenden Elementes ausdrückt, $\sigma = \frac{v}{c}$; es ist also die Verdichtung an jeder Stelle des schwingenden Stabes in einem und demselben Augenblicke der Schwingungsgeschwindigkeit dieser Stelle proportional.

§. 18 *). Nehmen wir zunächst an, der schwingende Körper habe die Länge l und sei an beiden Enden festgeklemmt. In diesem Falle ist sowohl für $x = 0$, als auch für $x = l$, $y = 0$, folglich Bestimmung der Elasticitätsmodul.

$$F(ct) + f(ct) = 0 \text{ und } F(ct+l) + f(ct-l) = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $f = -F$, und bringen wir diese Beziehung in der zweiten Gleichung an, so erhält man

$$f(ct+l) - f(ct-l) = 0, \text{ d. i. } f(ct+l) = f(ct-l),$$

oder, wenn man $ct-l = ct_1$ nimmt, $f(ct_1+2l) = f(ct_1)$. Es nimmt

Bestimmung der Elasticitätsmodul.

also die Funktion f stets denselben Werth wieder an, wenn ct_1 um $2l$, also die Zeit $t_1 = \frac{2l}{c}$ größer wird, und es ist folglich auch

$$t_1 = \frac{2l}{c} = 2l\sqrt{\frac{\gamma}{gE}}$$

die Zeit eines Doppelschwunges. Setzen wir zweitens voraus, daß der schwingende Körper an beiden Enden frei sei, so haben wir für $x = 0$ und $x = l$, S, also auch $\psi_1(x)$, $= 0$, daher

$$F_1(ct) - f_1(ct) = 0 \text{ und } F_1(ct+l) - f_1(ct-l) = 0.$$

Hiernach ist $f_1 = F_1$ und $f_1(ct+l) = f_1(ct-l)$, oder $f_1(ct_1+2l) = f_1(ct_1)$, und folglich wieder die Schwingungsdauer $t_1 = \frac{2l}{c}$.

Ist ferner der Körper an einem Ende frei und an dem anderen fest, so hat man für $x = 0$, $y = 0$ und für $x = l$, $S = 0$, daher

$$F(ct) + f(ct) = 0 \text{ und } F_1(ct+l) - f_1(ct-l) = 0,$$

es folgt nun $f = -F$, und folglich auch $f_1 = -F_1$, und daher

$$f_1(ct+l) + f_1(ct-l) = 0, \text{ oder } f_1(ct_1+2l) = -f_1(ct_1).$$

Hiernach nimmt also der Körper nach der Zeit $t_1 = \frac{2l}{c}$ stets den umgekehrten Bewegungszustand an, und es ist folglich erst in der doppelten Zeit $2t_1 = \frac{4l}{c}$ eine Schwingung vollendet. Man hat also hier die Schwingungsdauer

$$t_2 = \frac{4l}{c} = 4l\sqrt{\frac{\gamma}{gE}},$$

also doppelt so groß als in den beiden ersten Fällen.

Mittels der gefundenen Formeln kann man aus der beobachteten Schwingungszeit t, oder vielmehr aus der Anzahl n der Längenschwingungen, welche ein prismatischer Körper in einer gewissen Zeit macht, den Elasticitätsmodul $E = \left(\frac{2l}{t}\right)^2 \frac{\gamma}{g}$, und die Fortpflanzungs- oder Schallgeschwindigkeit in demselben, $c = \frac{2l}{t}$ berechnen.

Beispiel. Ein ganz an beiden Enden eingeklemmter Eisendraht von 60 Zoll Länge wurde durch Reibung nach seiner Axenrichtung in Longitudinalschwingungen versetzt, deren 1589 auf eine Secunde gingen. Wie groß ist hiernach der Elasticitätsmodul und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Drahteisens? Nach einer der obigen Formeln hat man den Elasticitätsmodul nach Länge oder Höhe

$$L = \frac{1}{g}\left(\frac{2l}{t}\right)^2 = \frac{1}{g}(2nl)^2 = \frac{(1589 \cdot 120)^2}{31{,}25 \cdot 12} = 96'950000 \text{ Zoll},$$

und wenn nun ein Cubikzoll dieſes Eiſens 0,294 Pfund wiegt, der Elaſticitäts-modul nach Gewicht: Beſtimmung der Elaſticitätsmodul.

$E = 96'950000 \,.\, 0{,}294 = 28'500000$ Pfund (Vergl. Tabelle §. 189).

Die Fortpflanzungs- oder Schallgeſchwindigkeit iſt

$$c = \sqrt{gL} = \sqrt{31{,}25 \,.\, 96'950000 \,.\, {}^1/_{12}} = \sqrt{31{,}25 \,.\, 8'080000} = 15890 \text{ Fuß},$$

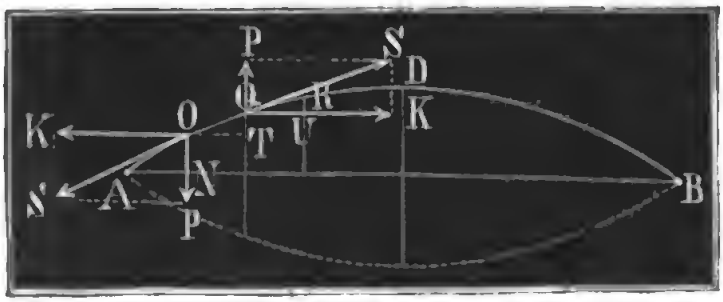
oder, die Schallgeſchwindigkeit $c_1 = 1060$ Fuß der Luft als Einheit angenommen,

$$c = \frac{15890}{1060} = 15.$$

Anmerkung. Sind die ſchwingenden Säulen ſehr lang, ſo hängt die Schwingungszeit von der Wellenlänge oder, nach Befinden, von dem Abſtand l zweier Schwingungsknoten ab; es iſt dann aber ſtets $t_1 = \frac{2l}{c}$. Dieſe Zeit beſtimmt auch die Höhe des mit den Schwingungen verbundenen Tones; je größer oder kleiner t_1 iſt, deſto tiefer oder höher fällt auch der Ton aus. Die Stärke des Schalles hingegen wächſt und nimmt ab mit den Schwingungselongationen. Bei den ſphäriſchen Wellen, in welchen ſich der Schall in der Luft und im Waſſer ausbreitet, bleibt c und t unverändert, und es nimmt nur die Schwingungselongation, alſo die Stärke des Schalles allmälig ab.

§. 19*). Die Querſchwingungen der Saiten und elaſtiſchen Stäbe laſſen ſich auf ähnliche Weiſe ausmitteln, wie die Longitudinalſchwingungen. Querſchwingungen einer Saite. Die geſpannten Saiten (franz. cordes, engl. strings) bieten den einfachern Fall dar, daher ſei auch von dieſen zunächſt die Rede. Es ſei ADB, Fig. 658, irgend eine Poſition der ſchwingenden Saite, A der eine,

Fig. 658.



B der andere Stützpunkt, $l = AB$ ihre Länge, G ihr Gewicht und S ihre als conſtant anzuſehende Spannung. Faſſen wir einen den Coordinaten $AN = x$ und $NO = y$ entſprechenden Punkt O der Saite in's Auge; zerlegen wir deſſen Spannkraft S parallel zu AB und rechtwinkelig gegen AB in die Seitenkräfte K und P, ſo können wir die letztere als die bewegende Kraft an einem Ende O des Elementes OQ anſehen. Läßt man den Bogen $AO = s$ um das Element $OQ = ds$, und eben dadurch auch die Ordinate y um ein Element $QT = dy$ wachſen, ſo erhalten wir in P, S, dy und ds die Kathetenpaare von zwei ähnlichen rechtwinkeligen Dreiecken OPS und QTO, und es iſt

$$\frac{P}{S} = \frac{QT}{OQ} = \frac{dy}{ds}; \text{ alſo } P = \frac{dy}{ds} \cdot S.$$

Querschwingungen einer Saite.

Auf daſſelbe Element OQ wirkt aber auch noch eine aus der Zerlegung der Gegenſpannung hervorgehende Kraft $P_1 = \frac{RU}{QR} \cdot S = \frac{dy_1}{ds} S$ entgegen, daher bleibt die bewegende, das Element OQ nach der Axe AB zurückführende Kraft: $P - P_1 = \left(\frac{dy - dy_1}{ds}\right) S$ übrig.

Die Maſſe M des Elementes iſt zwar der Länge $OQ = ds$ deſſelben proportional, ſetzen wir indeſſen nur kleine Schwingungselongationen y voraus, ſo können wir auch dieſelbe dem Elemente $OT = QU = dx$ der Abſciſſe proportional wachſend annehmen, alſo $M = \frac{dx}{l} \cdot \frac{G}{g}$ ſetzen. Dies vorausgeſetzt, erhalten wir nun die Acceleration, mit welcher das Element OQ ſich der Ruhelage in AB nähert:

$$p = \frac{P - P_1}{M} = \frac{dy - dy_1}{ds \,.\, dx} \cdot \frac{gSl}{G}, \text{ oder } ds = dx \text{ geſetzt,}$$

$$p = \frac{dy - dy_1}{dx^2} \cdot \frac{gSl}{G}.$$

Nun iſt y irgend eine Funktion von x, z. B. $\psi(x)$, daher auch $\frac{dy}{dx}$ eine andere Funktion $\psi_1(x)$ und $\frac{dy - dy_1}{dx^2} = \frac{d(dy - dy_1)}{dx^2} = \frac{d[\psi_1(x)]}{dx}$ eine dritte Funktion von $\psi_2(x)$ dieſer Größe, ſo wie

$$p = \psi_2(x) \cdot \frac{gSl}{G}.$$

Da aber auch y eine Funktion der Zeit t alſo etwa $y = \varphi(t)$ iſt, ſo hat man ebenſo die Geſchwindigkeit, mit welcher OQ zur Ruhelage zurückkehrt, $v = \frac{dy}{dt} = \varphi_1(t)$, und die entſprechende Acceleration:

$$p = \frac{d\varphi_1(t)}{dt.} = \varphi_2(t).$$

Wenn man nun beide Ausdrücke für p einander gleichſetzt, ſo erhält man ganz wie in Anhang, §. 17, die Differenzialgleichung

$$\varphi_2(t) = \psi_2(t) \cdot \frac{gSl}{G} = c^2 \psi_2(x),$$

und es läßt ſich daher auch wie dort

$$y = \varphi(t) = \psi(x) = F(ct + x) + f(ct - x) \text{ und}$$
$$v = c\,[F_1(ct + x) + f_1(ct - x)] \text{ ſetzen.}$$

Da auch hier für $x = 0$ und $x = l$, y und $v = 0$ iſt, ſo haben

ir wieder $f_1 = -F_1$ und $f_1(ct+l) = f(ct-l)$, oder $f(ct_1+2l) = f(ct_1)$; Querschwingungen einer Saite.
ist daher die Zeit einer Schwingung hin und zurück:

$$t_1 = \frac{2l}{c} = 2l\sqrt{\frac{G}{gSl}}, \text{ oder, wenn man } G = Al\gamma \text{ setzt,}$$

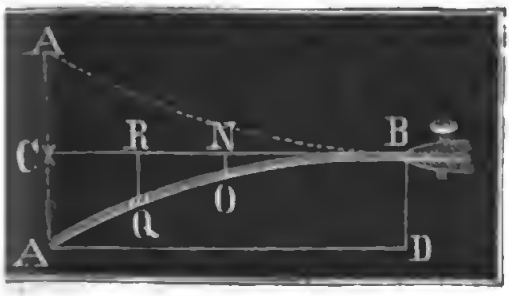
$$t_1 = 2l\sqrt{\frac{A\gamma}{gS}}.$$

Es wächst also die Schwingungsdauer einer Saite direct wie die Länge, ie die Quadratwurzel aus dem Gewichte $A\gamma$ der Längeneinheit und um- kehrt wie die Quadratwurzel aus der Spannung der Saite.

Beispiel. Da der halben Schwingungszeit der nächste Octaventon ent- richt, so wird nach dieser Regel eine Saite die Octave zu dem anfänglichen rundton geben, wenn man sie bis zur Hälfte abkürzt, oder in ihrer Mitte un- rstützt, oder, wenn man sie viermal so stark spannt, oder wenn man sie bei glei- er Spannung durch eine Saite ersetzt, von der die laufende Längeneinheit vier al so leicht ist als bei der ersten Saite.

§. 20 *). Die Bestimmung der Schwingungsdauer eines elastischen Stabes AB (franz. lames; engl. springs), Fig. 659, welcher an einem Querschwingungen eines Stabes.

Fig. 659.



Ende B festgehalten wird, läßt sich auf folgendem, allerdings etwas umständlichem Wege finden. Nach §. 191 ist, wenn r den Krümmungs- halbmesser des Stabes an einer durch die Coordinaten $CN = x_1$ und $NO = y_1$ bestimmten Stelle O bezeichnet, das Biegungsmoment des Bogens $AO = s_1$, $M = \frac{WE}{r}$.

Setzen wir nun die Kraft, mit welcher sich ein den Coordinaten $CR = x$ nd $RQ = y$ entsprechendes Element der Axe oder Ruhelage CB nähert, $= Pdx$, also dessen Moment $= \overline{NR} \cdot Pdx = (x_1 - x)\,Pdx$, so haben wir $\frac{WE}{r} = \int_0^{x_1} (x_1 - x)\,Pdx$.

Nun ist aber

$$\int_0^{x_1} (x_1 - x)\,Pdx = \int_0^{x_1} Px_1\,dx - \int_0^{x_1} Px\,dx$$

$$= x_1 \int_0^{x_1} P\,dx - \int_0^{x_1} Px\,dx,$$

oder wenn man $\int_0^{x_1} P\,dx = P_1$ und hiernach

$$\int_0^{x_1} Px\,dx = \int_0^{x_1} P\,dx \,.\, x = P_1 x_1 - \int_0^{x_1} P_1\,dx \text{ setzt,}$$

Querſchwingungen eines Stabes.

$\int_o^{x_1} (x_1 - x)\, P dx = \int_o^{x_1} P_1 dx$, alſo auch $\frac{WE}{r} = \int_o^{x_1} P_1 dx$.

Ferner iſt $r = -\frac{ds^3}{dx^2 d\,(tang.\,\alpha)}$ (ſ. Art. 27 der analytiſchen Hülfslehren), oder, da bei einer kleinen Biegung $ds = dx$ geſetzt werden kann, $r = -\frac{dx}{d\,(tang.\,\alpha)}$, daher folgt

$$-WE\frac{d\,(tang.\,\alpha)}{dx} = \int_o^{x_1} P_1 dx, \text{ und durch Differenziiren}$$

$$-WEd\left(\frac{d\,(tang.\,\alpha)}{dx}\right) = P_1 dx.$$

Setzt man nun $y = \psi(x)$, ferner $tang.\,\alpha = \frac{dy}{dx} = \psi_1(x)$, $\frac{d\,(tang.\,\alpha)}{dx} = \psi_2(x)$ und $d\left(\frac{d_2(tang.\,\alpha)}{dx^2}\right) = \psi_3(x)$, ſo erhält man die einfache Gleichung $P_1 = -WE\,.\,\psi_3(x)$, woraus durch nochmaliges Differenziiren $dP_1 = -WEd\psi_3(x)$, d. i. $Pdx = -WEd\psi_3(x)$ oder $P = -WE\frac{d\psi_3(x)}{dx} = -WE\psi_4(x)$ folgt.

Damit der Stab ſymmetriſch ſchwinge, können wir nur noch annehmen, daß P proportional mit y wachſe, alſo $P = Ky$ ſei; und hiernach erhalten wir nun

$WE\psi_4(x) = Ky$, oder $\psi_4(x) = \frac{K}{WE}\,.\,y = k^4 y$, wenn wir $\frac{K}{WE}$ mit k^4 bezeichnen.

Dieſer Differenzialgleichung $\psi_4(x) = k^4 y$ entſpricht die Gleichung

$$y = \psi(x) = A\,cos.(kx) + B\,sin.(kx) + Ce^{kx} + De^{-kx},$$

denn wenn man dieſe ſucceſſiv differenziirt, ſo erhält man

$\psi_1(x) = k\,[-A\,sin.(kx) + B\,cos.(kx) + Ce^{kx} - De^{-kx}]$,

$\psi_2(x) = k^2\,[-A\,cos.(kx) - B\,sin.(kx) + Ce^{kx} + De^{-kx}]$,

$\psi_3(x) = k^3\,[A\,sin.(kx) - B\,cos.(kx) + Ce^{kx} - De^{-kx}]$ und

$\psi_4(x) = k^4\,[A\,cos.(kx) + B\,sin.(kx) + Ce^{kx} + De^{kx}]$,

alſo wirklich

$\psi_4(x) = k^4 y$.

§. 21*). Die Schwingungszeit t des elaſtiſchen Stabes finden wir wieder wie oben, wenn wir $p = \varphi_2(t) = \frac{\text{Kraft}}{\text{Maſſe}}$ ſetzen. Nun iſt aber die Kraft eines Elementes, $= Pdx = -Kydx = -WEk^4 ydx$. und die Maſſe deſſelben $= Adx\,.\,\frac{\gamma}{g}$, daher folgt die Gleichung

$$\varphi_2(t) = -\frac{gWEk^4}{A\gamma} \cdot y = -\mu^2 y,$$

Querschwingungen eines Stabes.

wenn wir den Ausdruck $\frac{gWEk^4}{A\gamma}$ durch μ^2 bezeichnen.

Dieſer Differenzialgleichung entſpricht ſchon die einfache Formel

$$y = \varphi(t) = sin.\,(\mu t + \tau),$$

wo τ eine beliebige Anfangszeit ausdrückt, denn es iſt

$$v = \frac{dy}{dt} = \varphi_1(t) = \mu \,.\, cos.(\mu t + \tau) \text{ und}$$

$$p = \frac{dv}{dt} = \varphi_2(t) = -\mu\, sin.(\mu t + \tau), \text{ d. i. } \varphi_2(t) = -\mu^2 y.$$

Nehmen wir nun in der Gleichung

$$y = sin.\,(\mu t + \tau), \quad \tau = 0,$$

ſo bekommen wir $y = sin.\,(\mu t)$, daher für $\mu t = 0, \pi, 2\pi$ u. ſ. w. $y = 0$; und es iſt folglich $t_1 = \frac{\pi}{\mu}$ die halbe und

$$t = \frac{2\pi}{\mu} = \frac{2\pi}{k}\sqrt{\frac{A\gamma}{gWE}} \text{ die ganze Schwingungsdauer.}$$

Um hiernach die Zeit einer Schwingung berechnen zu können, muß nicht allein die Größe k, ſondern auch das Verhältniß $\frac{A}{W}$ bekannt ſein. Iſt der Stab cylindriſch und ſein Halbmeſſer $= r$, ſo hat man

$$\frac{A}{W} = \frac{\pi r^2}{\frac{1}{4}\pi r^4} = \frac{4}{r^2},$$

und iſt er parallelepipediſch, ſeine Breite b und Höhe h, ſo iſt

$$\frac{A}{W} = \frac{bh}{\frac{1}{12}bh^3} = \frac{12}{h^2} \text{ (ſ. §. 196 und §. 199).}$$

Hiernach folgt für die erſte Stabform

$$t = \frac{4\pi}{rk^2}\sqrt{\frac{\gamma}{gE}} \text{ und für den Stab von der zweiten Form}$$

$$t = \frac{4\pi}{hk^2}\sqrt{\frac{3\gamma}{gE}}$$

Die Größe k wird endlich aus der Gleichung

$$y = A\, cos.(kx) + B\, sin.(kx) + Ce^{kx} + De^{-kx}$$

auf folgende Weiſe gefunden.

Setzen wir in dieſe Formel die zuſammengehörigen Werthe $x = l$ und $y = 0$, ſo erhalten wir

$$1)\quad 0 = A\, cos.\,(kl) + B\, sin.\,(kl) + Ce^{kl} + De^{-kl}.$$

Thun wir ferner daſſelbe auch in der Gleichung

$$tang.\,\alpha = \frac{dy}{ds} = \varphi_1(x),$$

Querſchwingungen eines Stabes.

ſo bekommen wir

$$2)\quad 0 = -A\sin.(kl) + B\cos.(kl) + Ce^{kl} - De^{-kl}.$$

Da ferner das Biegungsmoment am Ende A des Stabes $=$ Null, und folglich der Krümmungshalbmeſſer $r = \infty$, alſo $\psi_2(x) = 0$ und ebenſo $\psi_3(x) = 0$ iſt, ſo folgt $0 = -A\cos.0 - B\sin.0 + Ce^0 + De^{-0}$, d. i. $-A + C + D = 0$, und

$0 = A\sin.0 - B\cos.0 + Ce^0 - De^{-0}$, d. i. $-B + C - D = 0$, daher 3) $A = C + D$ und 4) $B = C - D$.

Eliminirt man nun aus dieſen vier Gleichungen A und B, ſo erhält man

$(C+D)\cos.(kl) + (C-D)\sin.(kl) + Ce^{kl} + De^{-kl} = 0$, und

$-(C+D)\sin.(kl) + (C-D)\cos.(kl) + Ce^{kl} - De^{-kl} = 0$;

hieraus folgt durch Addition

$$C\cos.(kl) - D\sin.(kl) + Ce^{kl} = 0,$$

und durch Subtraction

$$D\cos.(kl) + C\sin.(kl) + De^{-kl} = 0, \text{ oder}$$

$$C[\cos.(kl) + e^{kl}] = D\sin.(kl) \text{ und}$$

$$D[\cos.(kl) + e^{-kl}] = -C\sin.(kl);$$

daher durch Diviſion:

$$-\frac{\cos.(kl) + e^{kl}}{\sin.(kl)} = \frac{\sin.(kl)}{\cos.(kl) + e^{-kl}}, \text{ endlich}$$

$$2 + \cos.(kl)(e^{kl} + e^{-kl}) = 0, \text{ oder } \cos.kl = -\frac{2}{e^{kl} + e^{-kl}}.$$

Von den verſchiedenen Werthen, welche, entſprechend den verſchiedenen Tönen, die der Stab je nach der Anzahl ſeiner Schwingungsknoten geben kann, iſt der kleinſte $kl = 1{,}87501$, wogegen die größeren nahe $= \frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$ u. ſ. w. ausfallen. Kommt es darauf an, aus der beobachteten Schwingungsdauer t den Elaſticitätsmodul E zu finden, ſo hat man in der Regel nur den kleinſten Werth in Betracht zu ziehen, es iſt daher $k = \frac{1{,}8751}{l}$ und $k^2 = \frac{3{,}516}{l^2}$, folglich für einen cylindriſchen Stab

$$E = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{4\pi}{r k^2 t}\right)^2 = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{4\pi l^2}{3{,}516\, r t}\right)^2 = 12{,}774\,\frac{\gamma}{g}\,\frac{l^4}{r^2 t^2},$$

und für einen parallelepipediſchen:

$$E = \frac{\gamma}{3g}\left(\frac{4\pi}{h k^2 t}\right)^2 = \frac{\gamma}{3g}\left(\frac{4\pi l^2}{3{,}516\, h t}\right)^2 = 4{,}2579 \cdot \frac{\gamma}{g}\,\frac{l^4}{h^2 t^2}$$

Anmerkung 1. Vergleicht man die Formel $t = \frac{4\pi}{r k^2}\sqrt{\frac{\gamma}{gE}}$ und $t_1 = 2l_1\sqrt{\frac{\gamma}{gE}}$ für die Quer- und Längenschwingungen eines und desselben Stabes mit einander, so erhält man die Proportion Querschwingungen eines Stabes.

$$t_1 : t = \frac{l^2}{r} : \frac{3{,}516}{2\pi}\, l_1, \text{ d. i. } t_1 : t = \frac{l^2}{r} : 0{,}5596\, l_1.$$

Wertheim hat für Gußstahl und Messing dieses Verhältniß durch Versuche bestätigt gefunden.

Anmerkung 2. Ueber die Querschwingungen elastischer Stäbe handelt ausführlich Seebeck in einer Abhandlung der Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften, Leipzig 1849, sowie in dem Programme der technischen Bildungsanstalt im Dresden vom Jahre 1846. Wertheim's Untersuchungen über die Elasticität der Metalle und des Holzes mittels Längen- und Querschwingungen werden in Poggendorff's Annalen, Ergänzungsband II. 1845, ziemlich ausführlich abgehandelt.

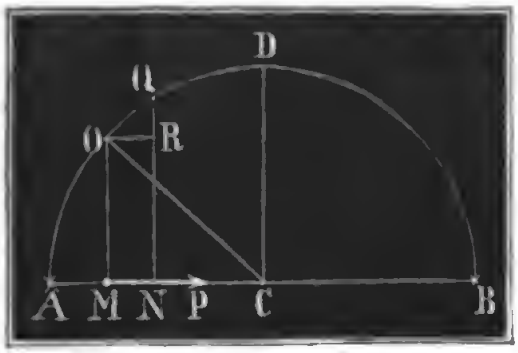
Anmerkung 3. Die Schwingungsdauer, oder vielmehr die Anzahl der Schwingungen eines Stabes in einer gewissen Zeit läßt sich wegen ihrer Kürze in der Regel nicht unmittelbar beobachten, sondern man muß sich hierbei besonderer Hülfsmittel bedienen. Man benutzt hierzu entweder nach Chladni, Savart u. s. w. die Höhe des von den Schwingungen erzeugten Tones, oder man wendet das zuerst von Duhamel angegebene Verfahren an, welches darin besteht, daß man von dem schwingenden Stab mittelst eines feinen Häkchens auf eine ganz gleichförmig umlaufende und mit Kienruß überzogene Glastafel eine Wellenlinie aufreißen läßt. Zur Erzielung einer möglichst gleichförmigen Umdrehungsbewegung kann man sich eines chronometrischen Apparates bedienen, welcher mit einem Windfange, ähnlich wie ein Bratenwender oder das Schlagwerk einer Thurmuhr, ausgerüstet ist, und von Morin in der Abhandlung »Description des appareils dynamometriques etc. Paris 1838« beschrieben wird. Wertheim findet die Anzahl der Schwingungen in einer gewissen Zeit dadurch, daß er mit dem zu untersuchenden Stabe noch einen andern Körper, z. B. eine Stimmgabel, schwingen läßt, dessen Schwingungszahl bekannt ist. Wenn man nun von beiden Körpern Wellencurven in die Rußschicht der rotirenden Glastafel einkratzen läßt und die Wellen derselben zählt, welche einem und demselben Centriwinkel entsprechen, so erhält man in dem Verhältnisse dieser Zahlen auch das Verhältniß der Schwingungszahlen. Was die Longitudinalschwingungen anlangt, so sind diese in der Regel auch mit kleinen Querschwingungen verbunden, weshalb hier die Stäbe zweifache Wellenlinien beschreiben, und die Anzahl der Längenschwingungen mit der der Querschwingungen leicht verglichen werden kann, wenn man die kleinen Wellen innerhalb einer Welle der großen Wellencurve auszählt.

§. 22. Zu den Kräften, welche die Schwingungen eines Körpers erzeugen, gesellen sich noch gewisse Bewegungshindernisse, deren Einfluß wir nun noch kennen lernen müssen. Ist ein solches Hinderniß constant, wie z. B. die Reibung an der Drehungsaxe eines Pendels oder an dem Stifte einer Magnetnadel, so hat dasselbe auf die Schwingungsdauer gar keinen Einfluß, sondern es wird nur durch dasselbe die Schwin- Schwingungshindernisse.

Schwingungshinderniſſe.

gungsweite bei jedem Ausſchlag um eine gewiſſe Größe kleiner. Wir haben oben in §. 1 (Anhang) in dem Falle, wenn die bewegende Kraft der Entfernung x vom Ruhe- oder Mittelpunkte C der Bewegung AB, Fig. 660, proportional iſt,

Fig. 660.



$$p = \mu x = \mu (a - x_1),$$

wo x_1 den durchlaufenen Weg AM bezeichnet, geſetzt. Bei Berückſichtigung der Reibung f haben wir dagegen für das Durchlaufen der erſten Weghälfte AC,

$$p = \mu(a - f - x_1),$$

und für das der zweiten Weghälfte CB, $p = -\mu\,[x_1 - (a + f)]$ zu ſchreiben; es beſteht alſo der Einfluß der Reibung f nur darin, daß durch ſie bei der einen Weghälfte a in $a - f$ und bei der anderen a in $a + f$, alſo der ganze Schwingungsweg $2a$, um $2a - 2f$ umgeändert, d. i. die Schwingungsweite bei jedem Ausſchlage um eine conſtante Größe $2f$ abgekürzt wird. Da endlich in der Formel $t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$ die Schwingungsweite gar nicht vorkommt, ſo kann folglich auch f keinen Einfluß auf dieſelbe ausüben.

Anders iſt es dagegen mit dem Widerſtande der Luft. Dieſer wächſt bei kleinen Geſchwindigkeiten, wie ſie bei Pendelbewegungen vorkommen, mehr nach der einfachen Geſchwindigkeit als nach dem Quadrate derſelben, wie beſonders aus Beſſel's Unterſuchungen (über die Länge des einfachen Pendels, Abhandl. der Akademie der Wiſſenſch. zu Berlin, 1826) hervorgeht, und ſich auch dadurch erklären läßt, daß dieſes Hinderniß vorzüglich aus der mit der Geſchwindigkeit v des ſchwingenden Körpers wachſenden Verdichtung und Verdünnung der Luft vor und hinter demſelben (ſ. den Anhang, §. 17, Anmerkung) erwächſt. Dies vorausgeſetzt, können wir die Acceleration des ſchwingenden Körpers, wenn wir denſelben im Auswärtsſchwingen begriffen annehmen, und ſeinen Weg vom Ruhepunkte aus meſſen,

$$p = -(\mu x + \nu v) \text{ oder } p + \nu v + \mu x = 0 \text{ annehmen.}$$

Setzen wir nun

$$x = f(t),\quad v = \frac{dx}{dt} = f_1(t) \text{ und } p = \frac{dv}{dt} = f_2(t),$$

ſo können wir auch $f_2(t) + \nu f_1(t) + \mu f(t) = 0$ ſchreiben, und dieſem durch die Integralgleichung

$$x = [b\,\cos.(\psi t \sqrt{\mu}) + b_1 \sin.(\psi t \sqrt{\mu})]\; e^{-\frac{\nu t}{2}},$$

wo b und b_1 noch zu bestimmende Constanten sind und $\psi = \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{4\mu}}$ ist, entsprechen. Nun ist aber für $t = 0$, auch $x = 0$, daher $b = 0$ und einfacher Schwingungshindernisse.

$$x = b_1 \sin.(\psi t \sqrt{\mu})\, e^{-\frac{\nu t}{2}}.$$

Da dieser Werth für $\psi t \sqrt{\mu} = \pi$ wieder Null wird, so ist folglich die Zeit einer einfachen Schwingung

$$t = \frac{\pi}{\psi\sqrt{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu + \frac{\nu^2}{4}}}, \text{ d. i. } \frac{1}{\psi} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\nu^2}{4\mu}}} \text{ mal so groß}$$

als wenn der Widerstand der Luft nicht vorhanden wäre.

Anmerkung. Es ist leicht zu erklären, weshalb die in Schwingungen versetzten Körper nach und nach immer kleinere und kleinere Schwingungen machen und zuletzt in Ruhe übergehen. Die Ursache dieser Erscheinung ist zwar zunächst der Widerstand der Luft, dann aber auch noch die Unvollkommenheit der Elasticität der schwingenden Körper, vermöge welcher sich die Körper, namentlich innerhalb kurzer Zeiten den auf sie wirkenden Kräften nicht vollkommen proportional ausdehnen und zusammendrücken.

§. 23. Den einfachsten Fall der Wellenbewegung des Wassers bieten die Schwingungen desselben in zwei communicirenden Röhren $ABCD$, Fig. 661, dar. Nehmen wir zunächst an, daß dieselben von gleichem Querschnitte A seien, und denken wir uns das Wasser in dem einen Schenkel um $HA = x$ über dem der Ruhelage entsprechenden Niveau HR gehoben, und im anderen um $RD = x$ gesunken. Wir haben dann die bewegende Kraft $P = A \,.\, 2x\gamma$, ferner, wenn l die ganze Länge $ABCD = HBCR$ der Wassermasse bezeichnet, die bewegte Masse $M = \frac{Al\gamma}{g}$, und daher die Beschleunigung, mit welcher der eine Wasserspiegel sinkt und der andere steigt: Schwingungen des Wassers.

Fig. 661.

$$p = \frac{P}{M} = \frac{2Ax\gamma}{Al\gamma}\, g = \frac{2gx}{l}.$$

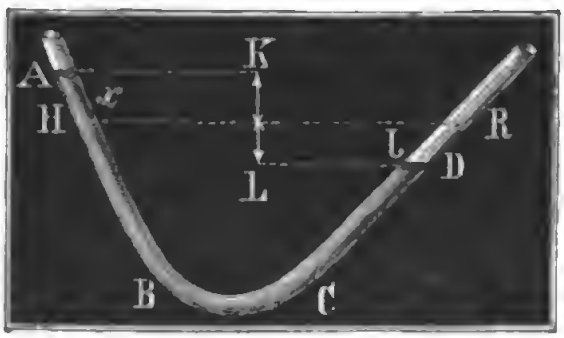
Da diese Formel ganz dem im Anhange §. 1 und §. 2 abgehandelten Schwingungsgesetze $p = \mu x$ entspricht, so haben wir auch hier die Zeit einer Schwingung $t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$. Da ferner beim einfachen

Schwingungen des Waſſers

Kreispendel von der Länge $\frac{l}{2}$, ebenfalls $t = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$ iſt, ſo ſchwingt alſo das Waſſer in den communicirenden Röhren von gleicher Weite mit dieſem Pendel iſochron.

Sind die beiden Schenkel der Röhre *ABCD*, Fig. 662, gegen den Horizont geneigt, bildet z. B. die Axe des einen den Winkel α, und die des anderen den Winkel β mit dem Horizonte, ſo entſpricht dem Wege $AH = DR = x$, welchen der Waſſerſpiegel in dem einen Schenkel auf- und in dem anderen abwärts gemacht hat, der Niveauabſtand

Fig. 662.



$$= x \sin.\alpha + x \sin.\beta$$
$$= x (\sin.\alpha + \sin.\beta),$$

daher iſt die Kraft

$P = A\gamma x (\sin.\alpha + \sin.\beta)$, ferner die Acceleration

$$p = \frac{g(\sin.\alpha + \sin\beta) \,.\, x}{l},$$ und die Schwingungsdauer

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g (\sin.\alpha + \sin.\beta)}}.$$

Sind endlich die Röhren von ungleicher Weite, ſo fällt die Beſtimmung der Schwingungsdauer bedeutend complicirter aus. Es ſei A der Querſchnitt und l die Länge der Mittelröhre, ferner α_1, A_1 und l_1 Neigungswinkel, Querſchnitt und Länge der einen, ſo wie α_2, A_2 und l_2 Neigungswinkel, Querſchnitt und Länge der anderen Seitenröhre; denken wir uns endlich das Waſſer in der Axe des einen Schenkels um x_1 geſtiegen und im anderen um x_2 geſunken. Wir haben zunächſt

$$A_1 x_1 = A_2 x_2, \text{ daher } x_2 = \frac{A_1}{A_2} x_1,$$

und die bewegende Kraft, auf A_1 reducirt:

$$P = A_1 (x_1 \sin.\alpha_1 + x_2 \sin.\alpha_2)\gamma = \frac{A_1\gamma}{A_2} (A_2 \sin.\alpha_1 + A_1 \sin.\alpha_2) x_1.$$

Die Waſſermaſſe in der Zwiſchenröhre iſt conſtant, und zwar $= \frac{Al\gamma}{g}$, und da ihre Geſchwindigkeit in dem Verhältniſſe $\frac{A_1}{A}$ zu der der Kraft ſteht, dieſelbe auf den Kraftpunkt reducirt: $= \left(\frac{A_1}{A}\right)^2 \cdot Al\gamma$. Die Waſſermaſſe im erſten Schenkel iſt $= \frac{A_1 (l_1 + x_1)\gamma}{g}$ und die im zweiten

$= \frac{A_2 (l_2 - x_2)\gamma}{g}$, oder auf den Kraftpunkt reducirt

Schwingungen des Wassers.

$$= \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{A_2 (l_2 - x_2)\gamma}{g}.$$

Endlich folgt die von P zu bewegende Masse:

$$M = A_1^2 \cdot \frac{\gamma}{g}\left(\frac{l}{A} + \frac{l_1 + x_1}{A_1} + \frac{l_2 - x_2}{A_2}\right)$$

$$= A_1^2 \cdot \frac{\gamma}{g}\left(\frac{l}{A} + \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \frac{x_1}{A_1} - \frac{A_1 x_1}{A_2^2}\right)$$

$$= \frac{A_1^2 \gamma}{g}\left[\frac{l}{A} + \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right) A_1 x\right],$$

und die Acceleration

$$p = \frac{P}{M} = \frac{\left(\frac{sin.\,\alpha_1}{A_1} + \frac{sin.\,\alpha_2}{A_2}\right) g x}{\frac{l}{A} + \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right) A_1 x}.$$

Wären die beiden Seitenröhren von gleichem Querschnitte, so hätte man $A_1 = A_2$, daher

$$p = \frac{(sin\ \alpha_1 + sin.\,\alpha_2)\, g x}{\left(\frac{l}{A} + \frac{l_1 + l_2}{A_1}\right) A_1} = \frac{(sin.\,\alpha_1 + sin.\,\alpha_2)\, g x}{\frac{A_1 l}{A} + l_1 + l_2},$$

und die Schwingungszeit:

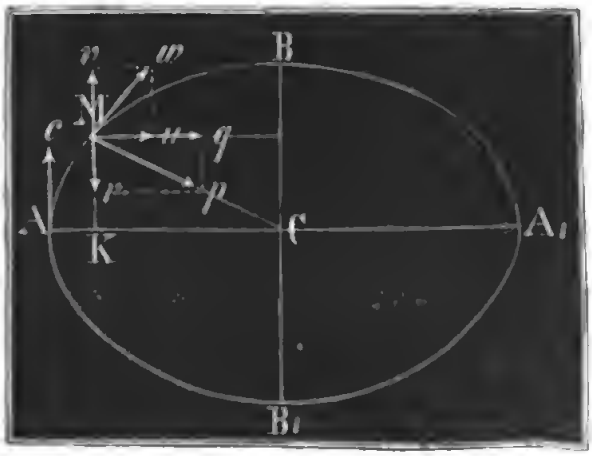
$$t = \pi \sqrt{\frac{A_1 l + A (l_1 + l_2)}{g A (sin.\,\alpha_1 + sin.\,\alpha_2)}}.$$

Anmerkung. Durch die Reibung und durch den Krümmungswiderstand erleiden natürlich diese Formeln noch einige Modificationen (vergl. Anhang, §. 22).

§. 24*). Wenn der Körper M, welcher durch eine Kraft P nach einem festen Punkte C, Fig. 663, mit einer Acceleration $\mu z = \mu \cdot CM$ hingetrieben wird, eine Anfangsgeschwindigkeit c hat, deren Richtung von der Kraftrichtung abweicht, so erfolgen seine Schwingungen nicht mehr in der geraden Linie, sondern in einer Ellipse, wie aus Folgendem hervorgehen wird. Es sei in dem Anfangspunkte A der Bewegung, die Bewegungsrichtung recht-

Wasserwellen.

Fig. 663.



Waſſerwellen. winkelig auf dem Abſtande $CA = a$ und die entſprechende Geſchwindigkeit $= c$. Legen wir die Coordinatenaxen durch C, und zwar die eine auf und die andere rechtwinkelig gegen CA. Bezeichnen wir nun die Coordinaten CK und KM durch x und y, ſo haben wir die mit den Axen parallel gehenden Componenten q und r von $p = \mu z$, da $\frac{q}{p} = \frac{x}{z}$ und $\frac{r}{p} = \frac{y}{z}$ iſt, $q = \mu x$ und $r = \mu y$. Sind nun u und v die ebenfalls den Axen parallel gerichteten Componenten der Geſchwindigkeit w des Körpers M, ſo haben wir nach §. 1, Anhang, $u = \sqrt{\mu(a^2 - x^2)}$; zugleich $c^2 - v^2 = 2\int r dy = 2\mu \int y dy = \mu y^2$, und daher $v = \sqrt{c^2 - \mu y^2}$. Wenn für $y = b$, $v = 0$ iſt, ſo hat man $0 = c^2 - \mu b^2$, daher $c = b\sqrt{\mu}$ und $v = \sqrt{\mu(b^2 - y^2)}$.

Nun iſt aber $u = \frac{dx}{dt}$ und $v = \frac{dy}{dt}$, daher folgt auch

$$\frac{u}{v} = \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{b^2 - y^2}}, \text{ oder } \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{b^2 - y^2}}, \text{ oder}$$

$$\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{d\left(\frac{y}{b}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}},$$

und daher (nach Art. 19, V. der analytiſchen Hülfslehren):

$$arc.\left(sin. = \frac{x}{a}\right) = arc.\left(sin. = \frac{y}{b}\right) + Con., \text{ oder da für } x = a, \; y = 0 \text{ iſt,}$$

$$arc.\left(sin. = \frac{a}{a}\right) = arc.\left(sin. = \frac{0}{b}\right) + Con., \text{ oder}$$

$$arc.\,(sin. = 1) = arc.\,(sin. = 0) + Con., \text{ d. i. } \frac{\pi}{2} = Con., \text{ und}$$

$$arc.\left(sin. = \frac{x}{a}\right) = arc.\left(sin. = \frac{y}{b}\right) + \frac{\pi}{2}, \text{ oder}$$

$$arc.\left(sin. = \frac{x}{a}\right) - arc.\left(sin. = \frac{y}{b}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Wenn aber die Differenz zweier Bögen $= \frac{\pi}{2}$ beträgt, ſo iſt der Sinus des einen gleich dem Coſinus des andern, d. i. $\frac{x}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$, oder

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Da dies die Gleichung einer Ellipſe iſt, ſo folgt auch, daß der Punkt,

welcher mit der Acceleration μz nach C getrieben oder gezogen wird, in Wasserwellen. einer Ellipse von den Halbaxen $CA = a$ und $CB = b$ um C läuft.

Auch folgt nun $dt = \frac{dy}{v} = \frac{dy}{\sqrt{\mu(b^2-y^2)}}$, daher die Zeit

$$t = \sqrt{\frac{1}{\mu}} \cdot arc.\left(sin. = \frac{y}{b}\right), \text{ oder umgekehrt}$$

$$y = b\ sin.\ (t\sqrt{\mu}), \text{ so wie } x = a\ cos.\ (t\sqrt{\mu}),$$

und die Zeit zum Durchlaufen eines elliptischen Quadranten, wenn man $y = b$ setzt,

$$t_1 = \sqrt{\frac{1}{\mu}}\ arc.\left(sin. = \frac{b}{b}\right) = \sqrt{\frac{1}{\mu}}\ arc.\ (sin. = 1) = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}},$$

also die Zeit zum Durchlaufen der halben Ellipse: $2t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$, und die Zeit einer ganzen Umdrehung oder Schwingung $= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$; also genau so groß, als wenn die Bewegung eine geradlinig wiederkehrende wäre. Noch folgt

$u = \sqrt{\mu(a^2-x^2)} = \sqrt{\mu[a^2-a^2[cos.(t\sqrt{\mu})]^2]} = \mu a\ sin.(t\sqrt{\mu})$ und

$v = \sqrt{\mu(b^2-y^2)} = \mu b\ cos.(t\sqrt{\mu})$,

und daher die Umdrehungsgeschwindigkeit

$$w = \sqrt{u^2+v^2} = \mu\sqrt{(a\ sin.t\sqrt{\mu})^2 + (b\ cos.t\sqrt{\mu})^2}.$$

Endlich kann man noch

$$x = \frac{a+b}{2}\ cos.(t\sqrt{\mu}) + \frac{a-b}{2}\ cos.(t\sqrt{\mu}) \text{ und}$$

$$y = \frac{a+b}{2}\ sin.(t\sqrt{\mu}) - \frac{a-b}{2}\ sin.(t\sqrt{\mu}) \text{ setzen,}$$

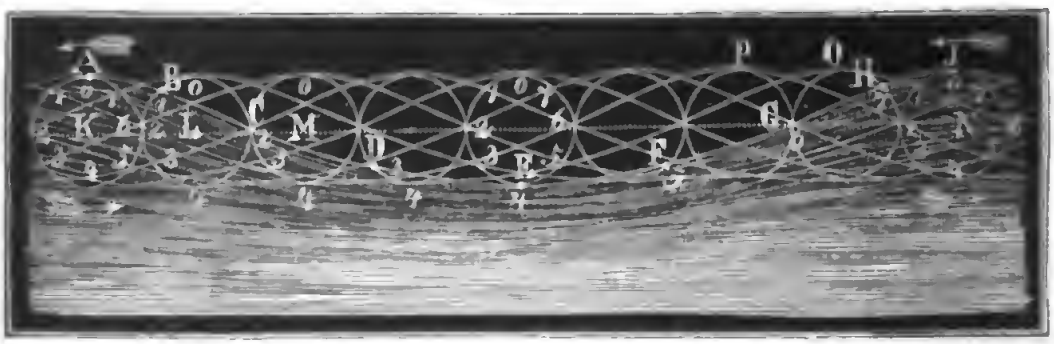
und da nun die ersten Glieder $\frac{a+b}{2}\ cos.(t\sqrt{\mu})$ und $\frac{a+b}{2}\ sin.(t\sqrt{\mu})$ einer gleichförmigen Bewegung in einem Kreise vom Halbmesser $\frac{a+b}{2}$, und die beiden anderen Glieder einer entgegengesetzten gleichförmigen in einem Kreise vom Halbmesser $\frac{a-b}{2}$ entsprechen, so kann man auch annehmen, daß die elliptische Bewegung des Punktes aus zwei kreisförmigen Bewegungen zusammengesetzt sei, daß nämlich der Punkt gleichförmig in

Wasserwellen. einem Kreise vom Halbmesser $\frac{a-b}{2}$ umlaufe, während das Centrum dieses Kreises gleichförmig in einem Kreise vom Halbmesser $\frac{a+b}{2}$ fortrückt.

Ist $b = 0$, so erfolgt zwar die Schwingung in einer geraden Linie, allein man kann sich auch denken, daß diese Schwingung aus zwei gleichen und entgegengesetzten Kreisbewegungen zusammengesetzt sei.

§. 25. Die elliptischen Schwingungsbewegungen finden sich den genauen Beobachtungen der Gebrüder Weber zu Folge bei den Bewegungen der Wasserwellen (franz. ondes, engl. waves) vor. Nicht allein jedes Wassertheilchen in der Oberfläche, sondern auch jedes Wassertheilchen unter derselben beschreibt während der Wellenbewegung des Wassers eine Ellipse. Wegen des Widerstandes am Boden sind jedoch die Ellipsen unter dem Wasser kleiner als die an der Oberfläche, und nehmen überhaupt mit dem Abstande von der Oberfläche ab. Die verschiedenen Elemente im Wasserspiegel, so wie in jeder andern Fläche parallel zu demselben, befinden sich in demselben Augenblicke in den verschiedensten Bewegungsphasen; während ein Element A, Fig. 664, seine Bahn in (0) beginnt, ist ein Element

Fig. 664.

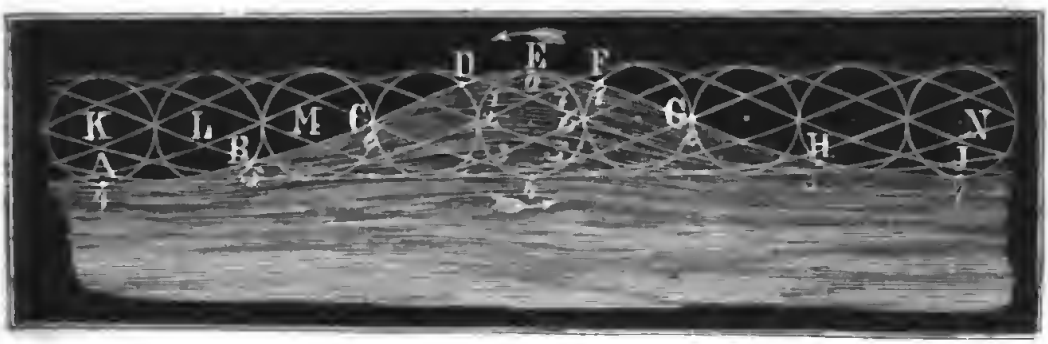


B schon in (1), ein anderes C in (2), ein drittes D in (3), ein viertes E in (4) u. s. w.; es bildet also in diesem Augenblicke der vertikale Durchschnitt der Oberfläche des Wassers eine cycloiden- oder trochoidenförmige Curve $ABCDEFGHJ$. Vor dem Eintritte der Wellenbewegung waren die Elemente in den Mittelpunkten $K, L \ldots\ldots N$ ihrer Bahnen und bildeten den horizontalen Wasserspiegel KN, während der Wellenbewegung hingegen befinden sie sich zum Theil über, zum Theil unter dieser Ebene, und haben natürlich stets ein Bestreben nach ihren Ruhepunkten $K, L \ldots O$ zurückzukehren. Die elliptischen Schwingungen finden jedoch nur so lange statt, als die Wellen unverändert bleiben, nimmt aber die Größe derselben allmälig ab, so wird auch die Bahn eines Elementes nach und nach eine engere und engere, und bildet daher keine Ellipse mehr, sondern eine Spi-

rallinie. Umgekehrt bildet sich sicherlich bei der Entstehung und dem Wachsen der Wellen die elliptische Bahn erst allmälig aus einer Spirallinie heraus. Wasserwellen.

Nach einem Zeittheilchen ist A in seiner Bahn nach (1), B nach (2), C nach (3) u. s. w. gerückt, und dadurch die Welle um den Horizontalabstand KL zwischen je zwei Elementen fortgeschoben worden; nach Verlauf eines zweiten Zeittheilchens befindet sich ferner A in (2), B in (3), C in (4), und es ist die Welle wieder um den Abstand $KL = LM$ fortgerückt; und so bewegt sich bei dem fernern Umlaufe der Wasserelemente, die Welle immer weiter und weiter fort, bis sie am Ende einer vollständigen Umdrehung eines Elementes in seiner Bahn ihre eigene Länge KN durchlaufen hat. Nach einer halben Umdrehung eines Wasserelementes ist, wie Fig. 665 zeigt, an die Stelle eines Wellenberges ein

Fig. 665.



Wellenthal und an die des letzteren ein Wellenberg gekommen. Dieses Fortschreiten der Welle besteht natürlich in keiner besonderen Bewegung des Wassers, sondern nur in einem Fortrücken einer und derselben Bewegungsphase, z. B. in dem Fortrücken des Wellengipfels J nach O, P u. s. w. Kennt man die Umlaufszeit t eines Wasserelementes und die Länge $AJ = s$ einer Welle, so kann man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben durch die Formel $c = \frac{s}{t}$ berechnen.

Die Höhe einer Welle, oder die Summe von der Höhe eines Wellenberges und der Tiefe eines Wellenthales ist der vertikalen Axe $2b$ der Ellipse gleich, in welcher die Wasserelemente an der Oberfläche umlaufen; die Länge CG des Wellenthales übertrifft die halbe Wellenlänge um die horizontale Axe $2a$ jener Ellipse, und die des Wellenberges ist natürlich um so viel kürzer als die halbe Länge der ganzen Welle. Hiernach wäre der Querschnitt eines Wellenthales größer, als der eines Wellenberges; da dies aber wegen der Unveränderlichkeit des Wasservolumens nicht möglich ist, so müssen die Mittelpunkte der elliptischen Bahnen noch etwas über dem Niveau des ruhigen Wasserspiegels stehen.

Wasserwellen. §. 26. Nach Weber's Versuchen ist die Bahn, in welcher sich jedes Wasserelement an der Oberfläche einer Welle bewegt, eine wenig gedrückte Ellipse, nach Emy sollen hingegen bei den Meereswellen die Wasserelemente aufrecht stehende Ellipsen durchlaufen. Mit der Tiefe der Elemente unter der Oberfläche nehmen beide Axen ihrer elliptischen Bahnen ab, jedoch, besonders nach Weber, die vertikalen Axen mehr als die horizontalen Axen. Nach der Tiefe zu scheint ein Fortschreiten der Wellen nicht statt zu finden; senkrecht unter einander befindliche Wasserelemente befinden sich, den Beobachtungen der Gebrüder Weber zu Folge, gleichzeitig in einer und derselben Bewegungsphase, wogegen die in einer horizontalen Linie liegenden Elemente eine stetige Folge der Bewegungsphasen bilden. Aus den erwähnten Beobachtungen geht ferner noch hervor, daß die Umlaufszeit eines Elementes, oder die Zeit, innerhalb welcher eine Welle um ihre eigene Länge fortschreitet, vorzüglich von dem Verhältnisse der beiden Bahnaxen abhängt; je größer das Verhältniß der horizontalen Axe $2a$ zur vertikalen Axe $2b$ der Bahn ist, desto größer ist auch die Umlaufszeit. Die tiefer liegenden Wassertheile durchlaufen ferner ihre Bahnen in kürzerer Zeit, als die in der Oberfläche, woraus wieder gefolgert werden muß, daß auch die Wellenlängen nach dem Boden zu abnehmen.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \frac{s}{t}$ einer Welle hängt, da die Umlaufszeit t mit dem Verhältnisse $\frac{a}{b}$ wächst, nicht allein von der Länge s, sondern auch von der Höhe b ab. Wenn eine Welle zwischen parallelen Wänden, z. B. in einem Kanale fortschreitet, so bleibt ihre Breite unverändert; es nimmt aber ihre Höhe b allmälig ab und ihre Länge allmälig so zu, daß in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit nur diejenige Veränderung eintritt, welche aus der Reibung des Wassers an den Wänden resultirt. Wenn hingegen eine Welle auf keiner Seite in ihrem Fortschreiten gehindert wird, und dieselbe einen in sich selbst zurücklaufenden Wall bildet, so vergrößert sich ihre Länge und Breite zugleich, und zwar auf Unkosten ihrer Höhe, und sie wird allmälig so flach, daß sie in kurzer Zeit von dem Auge nicht mehr wahrgenommen werden kann. Ist eine solche Welle anfangs nicht kreisförmig, so nähert sie sich wenigstens der Kreisgestalt immer mehr und mehr, je weiter sie fortschreitet. Nach den Weber'schen Versuchen soll die Höhe in arithmetischer Progression abnehmen, wenn die Welle in geometrischer Progression fortschreitet. Die Geschwindigkeit des Fortschreitens einer solchen Welle nimmt allmälig ab, je weiter dieselbe fortschreitet. Wenn umgekehrt eine Welle von außen nach innen fortschreitet, und sich dabei immer mehr und mehr zusam-

menzieht, so nimmt dieselbe an Höhe und Länge, so wie auch an Ge- Wasserwellen
schwindigkeit, allmälig zu.

Es findet hiernach ein großer Unterschied zwischen den Wasserwellen und den Schallwellen statt. Während bei diesen Wellen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nur von der Elasticität und Dichtigkeit des Mediums abhängt; ist dieselbe bei jenen Wellen nur eine Funktion der Wellenhöhe und Wellenlänge. Wenn die Wellenbewegung durch eine fast momentan wirkende Kraft, z B. durch Eintauchen und schnelles Herausziehen eines festen Körpers aus dem Wasser veranlaßt wird, so beschreiben die Wasserelemente immer kleiner und kleiner werdende elliptische Bahnen, oder vielmehr im Ganzen sich immer mehr und mehr zusammenziehende Spirallinien, und es fallen hierbei auch die Umdrehungszeiten immer kleiner und kleiner aus. Diesem Bewegungsverhältnisse ist die Entstehung einer ganzen Reihe immer kleiner und kleiner ausfallenden Wellen beizumessen. Bei dem weiteren Fortschreiten werden die folgenden Wellen von den vorhergehenden immer mehr und mehr verstärkt, während die vorderste Welle sich in kurzer Zeit so sehr verflacht, daß sie von dem Auge nicht mehr wahrgenommen wird. Dieses Zusammenfließen der Wellen verursacht die Entstehung kleiner Wellensysteme, welche besonders auf den Vorderflächen der Hauptwellen zahnförmig auftreten. Diese kleineren Wellen oder Zähne schreiten, nach Poisson und Cauchy, gleichförmig beschleunigt fort.

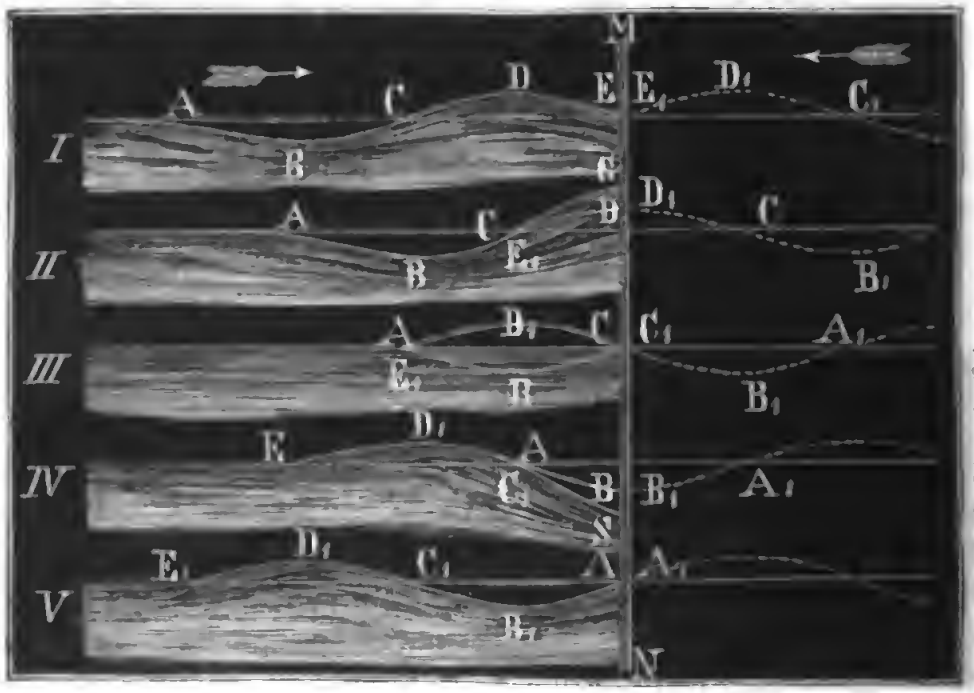
§. 27. Wenn sich zwei Wasserwellen durchkreuzen, so treten im Allgemeinen dieselben Erscheinungen ein, wie bei den Luft- und anderen Wellen; es setzt auch hier jede Welle nach dem Zusammentreffen ihre Bewegung fort, als wenn es gar nicht stattgefunden hätte; nur findet, nach Weber's Beobachtungen, ein kleiner Zeitverlust statt, so daß eine Welle nur wenig mehr Zeit braucht, einen gewissen Weg zu durchlaufen, wenn sie durch eine andere Welle hindurchgeht, als wenn sie frei fortschreitet. Kommen zwei Wellenberge zusammen, so entsteht ein fast doppelt so hoher Berg, und ebenso geben zwei Wellenthäler bei ihrem Zusammentreffen ein fast doppelt so tiefes Thal, als bei einer einfachen Welle. Die Weber'schen Versuche führen auf das Verhältniß 1 : 1,79 zwischen den Berghöhen der einfachen und der Doppelwelle. Bei der Interferenz oder dem Zusammenkommen eines Wellenberges mit einem Wellenthale heben sich beide gegenseitig auf und es bleibt die betreffende Stelle im Niveau des ruhigen Wasserspiegels. Was die Bahnen der einzelnen Wasserelemente anlangt, so gehen diese bei dem Zusammentreffen von zwei gleichen Wellen in gerade Linien über, die im Berggipfel senkrecht,

Wasserwellen. entfernt von demſelben aber ſchief, jedoch ſo ſtehen, daß ſie ſich oben gegen den Gipfel neigen.

Wenn ferner eine Waſſerwelle gegen eine feſte Wand anſtößt, ſo wird ſie von derſelben ſo zurückgeworfen, als wenn ſie von einem Orte herkäme, der eben ſo weit hinter der Wand abſteht, als der Ausgangspunkt der Welle vor derſelben, und es geht die zurückgeworfene Welle ebenſo durch die ankommende hindurch wie zwei ſich kreuzende Wellen überhaupt.

In Fig. 666, I., II. bis V. ſind die Erſcheinungen, welche ſich beim Zurückwerfen einer Welle *ABCDE* durch eine feſte Wand *MN* darbieten, vor Augen geführt. In I. kommt eben der Wellenberg *CDE* an der

Fig. 666.



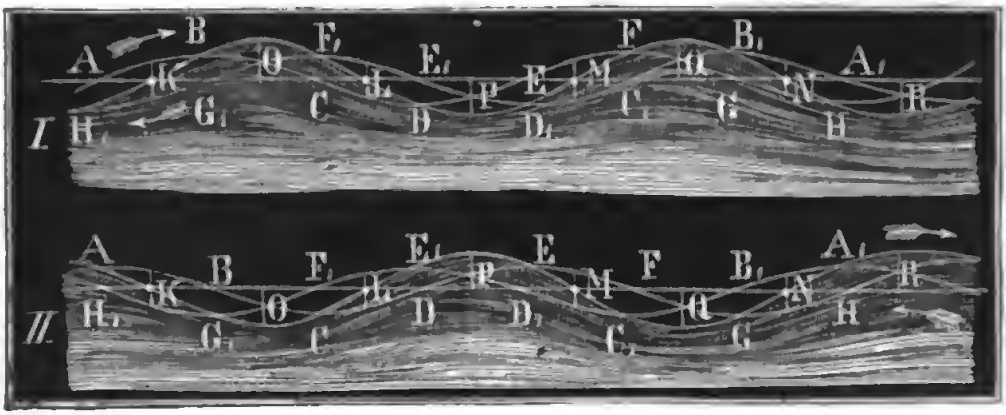
Wand *MN* an, und es beginnt das Reflectiren in Form einer umgekehrt laufenden Welle $C_1D_1E_1$; in II. iſt der Gipfel *D* des Wellenberges an der Wand angekommen, und es hat ſich mit demſelben die Hälfte D_1E_1 des zurückgeworfenen Wellenberges vereinigt, folglich entſteht ein halber Wellenberg *CG* von faſt doppelter Höhe. In III. erreicht eben erſt das Wellenthal *ABC* die feſte Wand, während der zurückgeworfene Wellenberg $C_1D_1E_1$ über demſelben hinweggeht; es tritt daher eine Interferenz ein, wobei die Welle einen Augenblick lang ganz verſchwindet. In IV. trifft die Thalſohle *B* der ankommenden Welle mit der Thalſohle B_1 der zurückgeworfenen Welle an der Wand zuſammen, es bildet ſich folglich

ein halbes Thal AS von der doppelten Tiefe. In V. iſt endlich die ankommende Welle $ABCDE$ vollſtändig durch die Wand MN zurückgeworfen, und dadurch in die umgekehrt laufende Welle $A_1B_1C_1D_1E_1$ verwandelt worden. Waſſerwellen.

Die Bahnen der Waſſerelemente erleiden durch den Anſtoß an die feſte Wand dieſelben Veränderungen, wie bei dem Durchkreuzen zweier Wellen; es wird auch hier in der Nähe der Wand der horizontale Theil dieſer Bewegung immer mehr und mehr aufgehoben, und dagegen der vertikale Component mehr und mehr verſtärkt, ſo daß nahe an der Wand dieſe Bahn in eine vertikale, und entfernter davon in eine ſchiefe Linie übergeht. Stößt die Welle ſchief gegen eine feſte Wand, ſo wird ſie, wie jeder elaſtiſche Körper, unter demſelben Winkel zurückgeworfen, unter welchen ſie auftrifft. Trifft die Welle nur theilweiſe gegen ein Hinderniß, ſo treten die Erſcheinungen der ſogenannten Inflexion ein, wobei ſich neue Wellen um die äußerſten Enden dieſer Hinderniſſe herum bilden.

Endlich entſtehen die ſtehenden Wellen des Waſſers wie die einer Saite oder eines anderen feſten Körpers, wenn ſich zwei gleich lange Wellen kreuzen, deren Ausgangspunkte um das 1, 3, 5, 7 . . . fache des Viertels einer Wellenlänge von einander abſtehen. Es ſei $ABCDEFGH$, Fig. 667 I. und II., die eine, und $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ die andere Welle.

Fig. 667.



In den Punkten K, L, M, N, wo beide Wellenzüge von der Mittellinie gleich weit abſtehen, ſich alſo die Bewegungen aufheben, bilden ſich feſte Interferenzpunkte, dagegen über und unter den Punkten O, P, Q, R, wo ſich beide Wellenlinien ſchneiden und daher die Wege verdoppeln, entſtehen abwechſelnd Berggipfel und Thalſohlen.

Anmerkung. Den vollſtändigſten Unterricht über die Wellenbewegung ertheilt folgendes Werk: Wellenlehre auf Experimente gegründet, u. ſ. w. von den Brüdern E. H. Weber und W. Weber, Leipzig 1825.« Einen guten Auszug hiervon findet man in dem Lehrbuche der mechaniſchen Naturlehre von Auguſt.

Wasserwellen. Die Abhandlungen über die Wellen von Laplace, Lagrange, Flaugergues, Gerstner und Poisson findet man in dem Weber'schen Werke sehr vollständig mitgetheilt und critisirt. Ueber Cauchy's Wellen-Theorie und Bidone's Versuche findet man Ausführlicheres in Gehler's physikalischem Wörterbuche, Art. Wellen. Emy's Wellentheorie ist unter dem Titel »Ueber die Bewegung der Wellen und über deren Bau am Meere und im Meere« von Wiesenfeld übersetzt, und 1839 in Wien erschienen.

Berichtigungen.

Seite 9, Zeile 2 von unten, $\sqrt{x^3_1,}$ statt $\sqrt{x^3 =}$.
» 13, » 1 » » d (*tang* α) statt (*tang.* α).
» 19, » 7 » oben, und statt oder.
» 25, » 6 » » (*sin.* x) statt *sin* x.
» 28, » 10 » » dx statt dx^0.
» 34, » 9 » » Art. statt §.
» 37, » 4 » oben Art » §.
» 38, » 10 » unten Art. » §.
» 39, » 4 » » Art. » §.
» 53, » 12 » » IV statt VI.
» 68, » 15 » oben *sin.* φ statt *sin.* ψ.
» 213, » 14 » unten, Glockengut auf Gußeisen statt Gußeisen auf Glockengut.
» 228, die Figur 235 betreffend, F statt $2F$ und F_1 statt F.
» 255, Zeile 12 von unten, P^2l^3 statt Pl^3 und $3a^2$ statt 3.
» 257, » 9 » oben, a statt α.
» 368, » 5 » unten, C statt B.
» 408, » 9 » » $^1/_{12}$ statt $^1/_6$.
» » » 11 » » $\frac{\pi r^2}{4}$ statt $\frac{\pi r^2}{2}$.

RETURN TO ➔ **CIRCULATION DEPARTMENT**
198 Main Stacks

LOAN PERIOD 1 **HOME USE**	2	3
4	5	6

ALL BOOKS MAY BE RECALLED AFTER 7 DAYS.
Renewls and Recharges may be made 4 days prior to the due date.
Books may be Renewed by calling 642-3405.

DUE AS STAMPED BELOW

AUG 02 2000

UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY
FORM NO. DD6 BERKELEY, CA 94720-6000

YC 13626

415434

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY